

Gerlinde Schaumann

Topographieeinfluß auf tellurische Felder -
Ein Deutungsversuch mit der Schwarz-Christoffel-Transformation

Im Rahmen meiner Diplomarbeit wird der Frage nachgegangen, welchen Einfluß die Topographie auf die induzierten tellurischen Felder an der Erdoberfläche hat. Für die theoretische Bestimmung der Feldverzerrung wird die konforme Abbildung herangezogen. Voraussetzung dafür ist, daß die betrachteten Eindringtiefen klein gegenüber den Geländeparametern sind.

$$p/h \ll 1$$

mit $p = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}$ und $h =$ Höhe, z.B. einer Geländestufe.

Die konforme Abbildungsvorschrift erfüllt eine analytische Funktion, welche die Punkte $P(x, y)$ einer komplexen z -Ebene mit $z = x + iy$ in eine komplexe w -Ebene mit $w = u + iv$ und $P = P(u, v)$ abbildet.

Diese Abbildungsfunktion muß den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Für die Anwendung der konformen Abbildung nimmt Schmucker (1970) eine ebene Oberfläche an, die einen oberen, nicht-leitenden von einem unteren, perfekt leitenden Halbraum trennt, siehe Abb. 1.

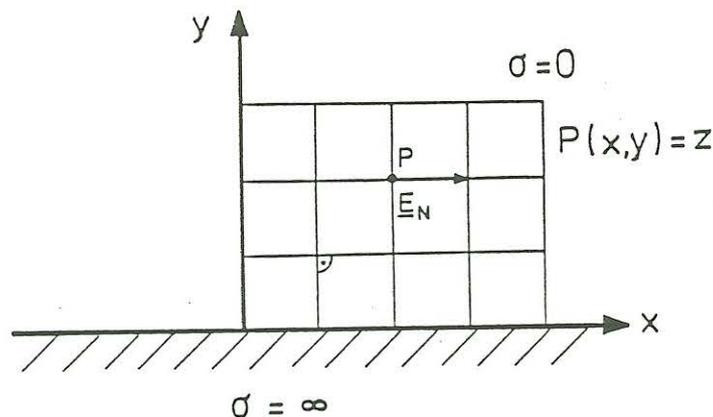


Abb. 1 Für einen Punkt $P = P(x, y)$ gilt: $z = x + iy$ komplex in einem rechtwinkligen Koordinatennetz

Im oberen, komplex angesetzten Halbraum existiere ein skalares elektrisches Potential. Die Potentialfunktion soll harmonisch sein, d.h. sie muß der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 U = 0$$

genügen und es soll gelten $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ an der Erdoberfläche.

Damit ist der elektrische Feldvektor $\underline{E} = -\text{grad } U$ tangential zur x -Achse und stellt das Normalfeld \underline{E}_N in einer nicht-leitenden Region über einem perfekt leitenden Untergrund mit einer ebenen Grenzfläche dar. Für eine nicht-ebene Oberfläche stelle die analytische Funktion

$$\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

eine konforme Abbildung derart dar, daß die x -Achse der z -Ebene in der transformierten w -Ebene die Form des Geländes wiedergibt. Die abgebildete Potentialfunktion U^* bleibt harmonisch und behält die Eigenschaft, daß ihre Ableitung senkrecht zur abgebildeten x -Achse verschwindet.

Für den transformierten Feldvektor \underline{E}^* gelten dann folgende Beziehungen:

$$\underline{E}^* = -\text{grad } U^*$$

an einem Bildpunkt P^* ist gestreckt bzw. gestaucht um den Faktor $\frac{1}{r}$ in Bezug auf \underline{E} im Punkt P und entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel ϕ gedreht, siehe Abb. 2.

Es gilt

$$r^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u_x^2 + u_y^2$$

$$\tan \phi = \frac{u_y}{u_x}$$

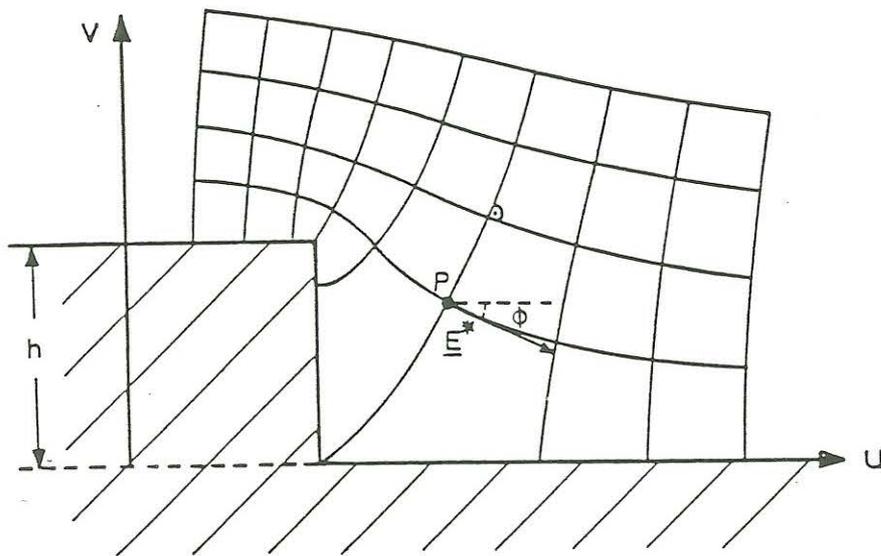


Abb. 2 Konformes Gitternetz in der w -Ebene

Damit ergibt sich für das transformierte elektrische Feld

$$|\underline{E}^*| = \frac{|\underline{E}_N|}{r}$$

und für das Verhältnis von transformiertem zu normalem Feld:

$$\frac{|\underline{E}^*|}{|\underline{E}_N|} = \frac{1}{r}$$

Mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation, einer speziellen konformen Abbildung, kann man ein Meßprofil mit Polygonzügen annähern. Die obere komplexe Halbebene wird dann in das Gebiet oberhalb eines ebenfalls in einer komplexen Ebene liegenden Polygons konform abgebildet (siehe Abb. 3).

Das Verhältnis von

$$\frac{|\underline{E}^*|}{|\underline{E}_N|}$$

ist mit einem Programm von Wendorff (1989) numerisch berechnet worden (siehe Abb. 4).

Im Juni 1989 wurden im Solling an einem Berghang elektrische Potentialdifferenzen in 11 Teilstrecken lückenlos vom Scheitel bis zur Sohle gleichzeitig registriert (siehe Abb. 5). Da als Profil die Falllinie des Hangs gewählt wurde, ergab sich eine Verdrehung des Profils um 28° von N nach W. Dies wurde in der Auswertung berücksichtigt. Die 5. Teilstrecke, die aus meßtechnischen Gründen rechtwinklig zu den übrigen Strecken liegt, wird im folgenden nicht weiter betrachtet. Ein Registrierbeispiel ist auf Abb. 6 zu sehen. Für jede der 11 Potentialdifferenzen ΔU_k wurden mit einem linearen bivariaten Ansatz die Übertragungsfunktionen zu gleichzeitig auf dem höchsten Punkt des Berges bzw. dem Fußpunkt registrierten H - und D -Feldern berechnet. (H = magn. Nord, D = magn. Ost). Im Frequenzbereich lautet der bivariate Ansatz:

$$\Delta U_k = C_1^k H + C_2^k D + \delta \Delta U_k \quad k = 1, 11.$$

Um einen Vergleich mit der theoretischen Kurve, die durch die konforme Abbildung gewonnen wurde, zu erhalten, wurde für jede 50 m-Teilstrecke Δx_k des Profils der Wert des Verhältnisses $\frac{E^*}{E_N}$ aufaddiert mit $|E_N| = 1$. Multipliziert mit Δx_k entspricht dies praktisch einer Integration entlang des Profils.

Ebenso wurden die Übertragungsfunktionen der einzelnen Teilstrecken aufaddiert. Damit ergibt sich für die Modellkurve

$$U(x_j) = \sum_{k=1}^j E_k^* \cdot \Delta x_k \cdot \frac{E_N}{E_N}$$

mit bekanntem Verhältnis $\frac{E_k^*}{E_N}$

Konforme Abbildung mit der Schwarz - Christoffel - Transformation

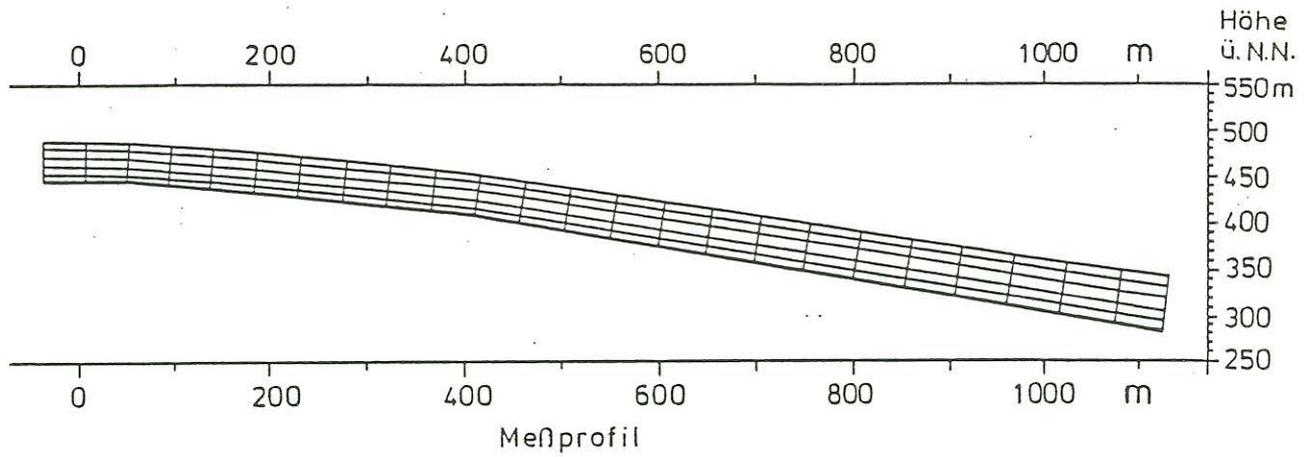


Abb. 3

Darstellung des Verhältnisses des transformierten E-Feldes zu dem normalen E-Feld entlang des Profils

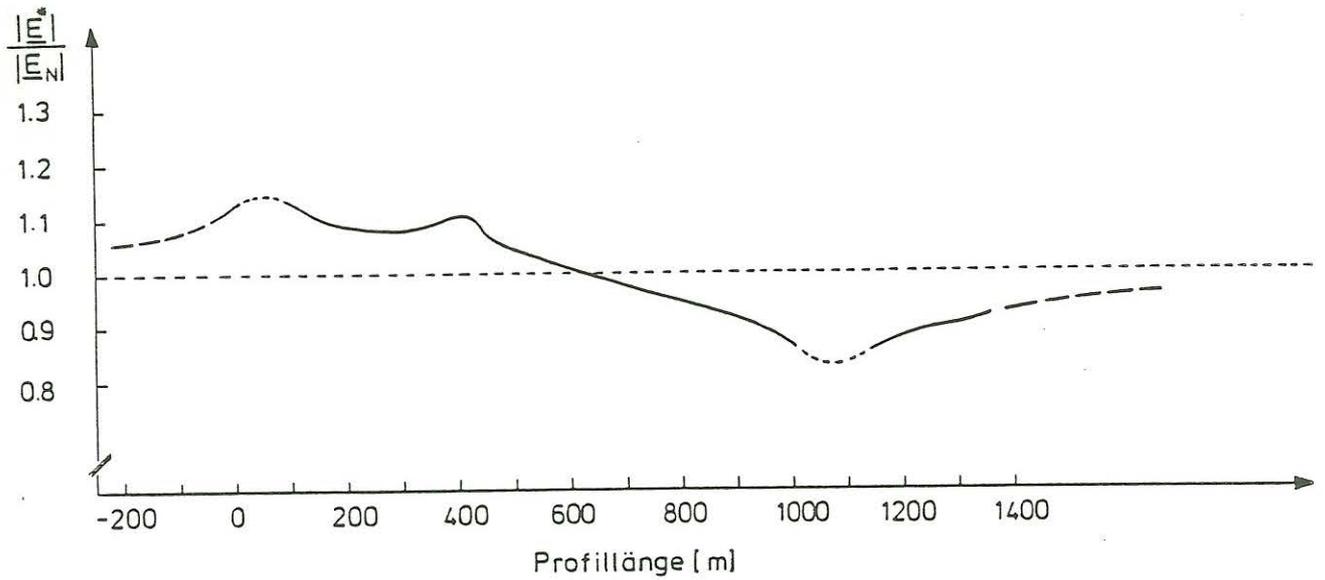


Abb. 4

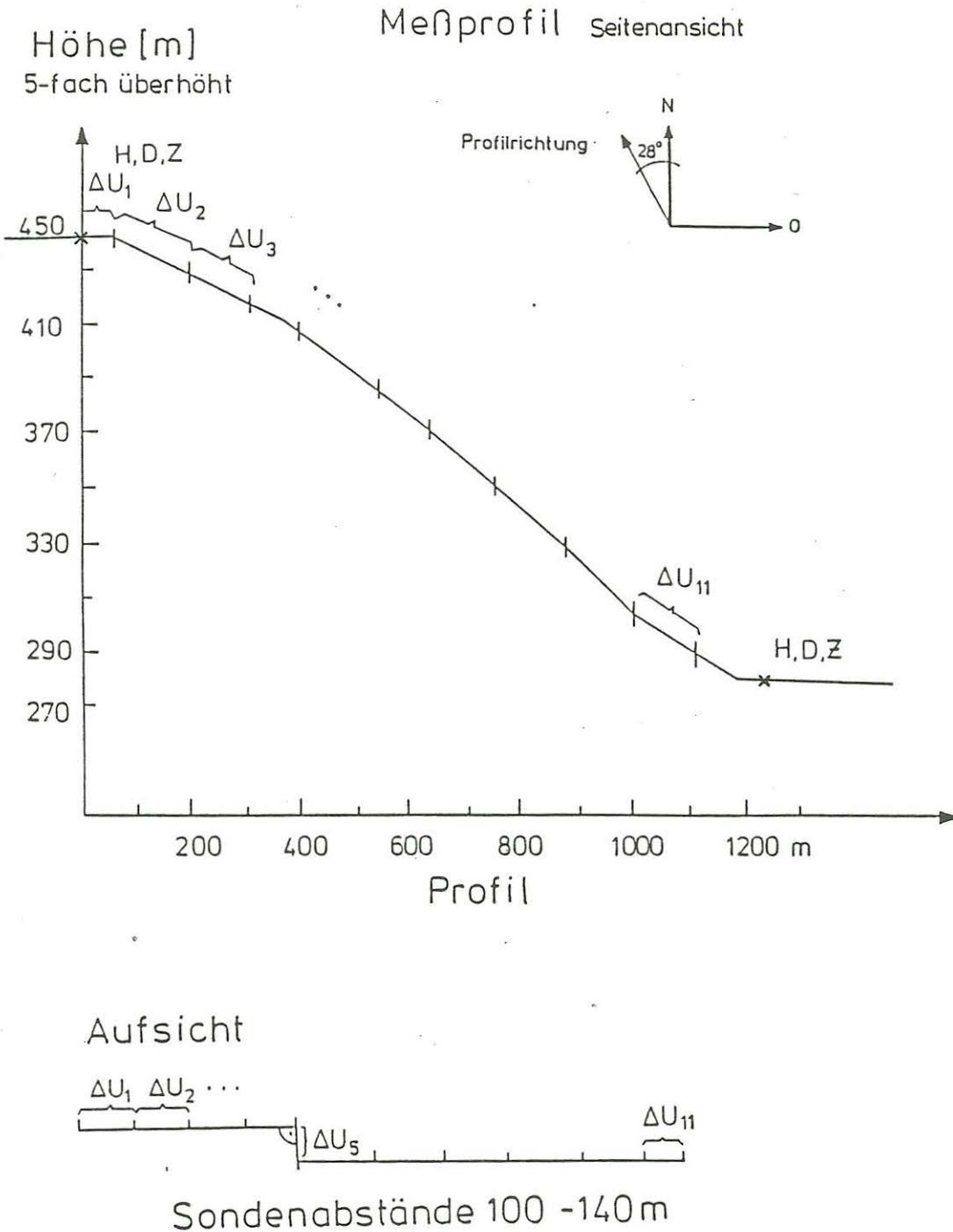


Abb. 5 Eingezeichnet sind die Teilstrecken vom Scheitel des Berges (Profilanfang) bis zum Fußpunkt im Tal (Profilende). Für jede Strecke wurde die Potentialdifferenz ΔU_k gemessen ($k = 1, 11$). Auf dem Berg und im Tal befand sich außerdem jeweils ein Induktionsmagnetometer.

Registrierbeispiel für einen 20 min-Effekt
für die E-Felder der 11 Teilstrecken des
Meßprofils

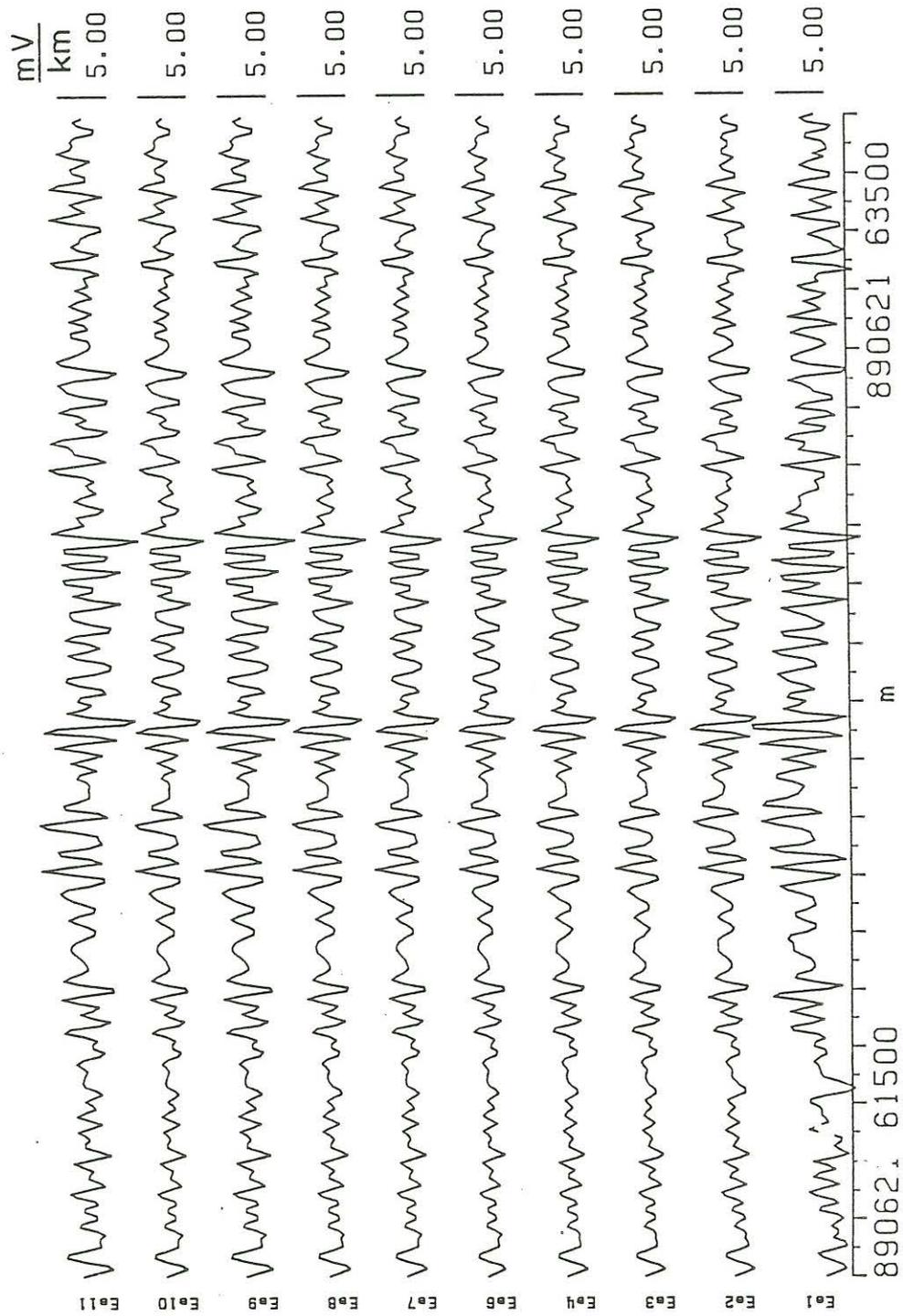


Abb. 9

(j = Gesamtanzahl der Teilstrecken, die aufaddiert werden;

$$U(x_j) = \text{Gesamtspannung der } j \text{ Teilstrecken und } x_j = \sum_{k=1}^j \Delta x_k$$

und für die Messung

$$\begin{aligned} U(x_j) &= \sum_{k=1}^j \Delta U_k \\ &= B \cdot \sum_{k=1}^j C_m^k \quad \text{mit} \quad m = 1 \quad \text{und} \quad B = H' \\ &\quad \text{bzw.} \quad m = 2 \quad \text{und} \quad B = D'. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^j C_m^k = \frac{U(x_j)}{B}$$

Die theoretische und die gemessene Kurve unterscheiden sich damit um den Faktor $\frac{E_N \cdot x_j}{B}$. Dies ist die Impedanz, die frequenzabhängig ist. Man muß deshalb für jede betrachtete Frequenz einen anderen Faktor wählen. In der Zeichnung sind die Modellkurve und die aus den Messungen resultierenden Kurven für drei Frequenzen aufgetragen, jeweils für die H - bzw. D -Komponente, die wie oben erwähnt, um einen Winkel von 28° zu H' bzw. D' korrigiert wurden (Abb. 7a u. 7b).

Man sieht deutlich eine Frequenzabhängigkeit der Kurven in beiden Fällen. Im Fall der Abhängigkeit von der H' -Komponente liegen die Werte der Übertragungsfunktion nahezu auf einer Geraden, bei der D' -Komponente ergibt sich eine nicht-lineare Schwankung der Werte. Dies ist zu erwarten, da die D' -Komponente senkrecht zu den Auslagen steht und damit einen stärkeren Einfluß als die H' -Komponente auf das induzierte Feld längs des Profils aufweisen soll.

Im Fall der D' -Abhängigkeit liegen die Beträge der aufsummierten Übertragungsfunktionen für den ersten Teil des Meßprofils über, im zweiten Teil des Profils unter einer Ausgleichsgeraden, wobei die Fehler der Übertragungsfunktionen proportional zur Größe der Symbole sind. Deutlich ist auch die Abweichung der aufsummierten Übertragungsfunktionen von der theoretischen Modellkurve zu erkennen. Man hat demnach im oberen Bereich des Hanges mit größeren, im unteren Bereich mit kleineren Übertragungsfunktionen zu rechnen. Aus der Modellkurve in Abb. 4 ist zu entnehmen, daß das E^* -Feld auf dem Scheitel des Berges (Profilpunkt 0m) um 10% größer als das normale E_N -Feld ist, bei dem Profilpunkt 500m sind es noch 5% und bei Profilpunkt 900m sollte das E^* -Feld etwa 10% kleiner als das Normalfeld sein. Die Extremwerte sind allerdings nur näherungsweise bestimmbar, weil sich an diesen Stellen eigentlich Singularitäten befinden, was von der nicht berechenbaren Ableitung an den Unstetigkeitsstellen des Polygonzuges der Schwarz-Christoffel-Transformation herrührt.

Für die aus den Messungen gewonnenen Übertragungsfunktionen ergibt sich für den oberen Teil des Profils bis zur 6. Teilstrecke eine Abweichung von der Ausgleichsgeraden nach oben, um maximal 15% (2. Teilstrecke) für 0,5 cpm. Dies ist qualitativ

Darstellung der aufaddierten Beträge der Übertragungsfunktionen für die
7a): H'-Komponente
7b): D'-Komponente

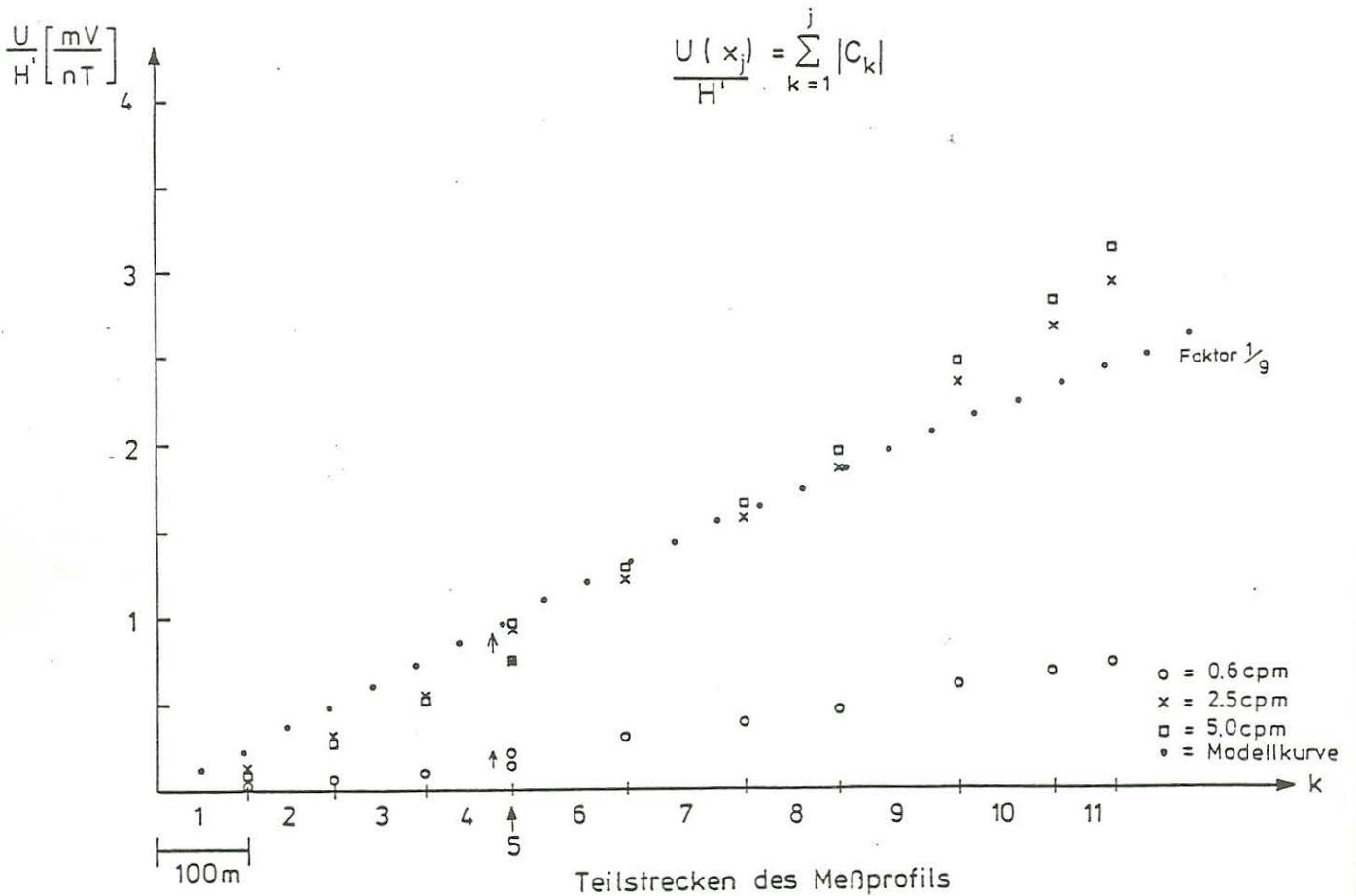


Abb. 7a Aufgetragen sind für drei Frequenzen die aufsummierten Beträge der Übertragungsfunktionen der gemessenen Spannungen in Abhängigkeit von der H'-Komponente entlang des Profils. Die 5. Teilstrecke, die rechtwinklig zu den anderen Strecken liegt, ist für den mit einem Pfeil angedeuteten Versatz im Kurvenverlauf verantwortlich. Die Modellkurve wurde mit dem Faktor 1/9 multipliziert, um dieselbe Größenordnung der durch die Messung gewonnenen Kurven zu erhalten.

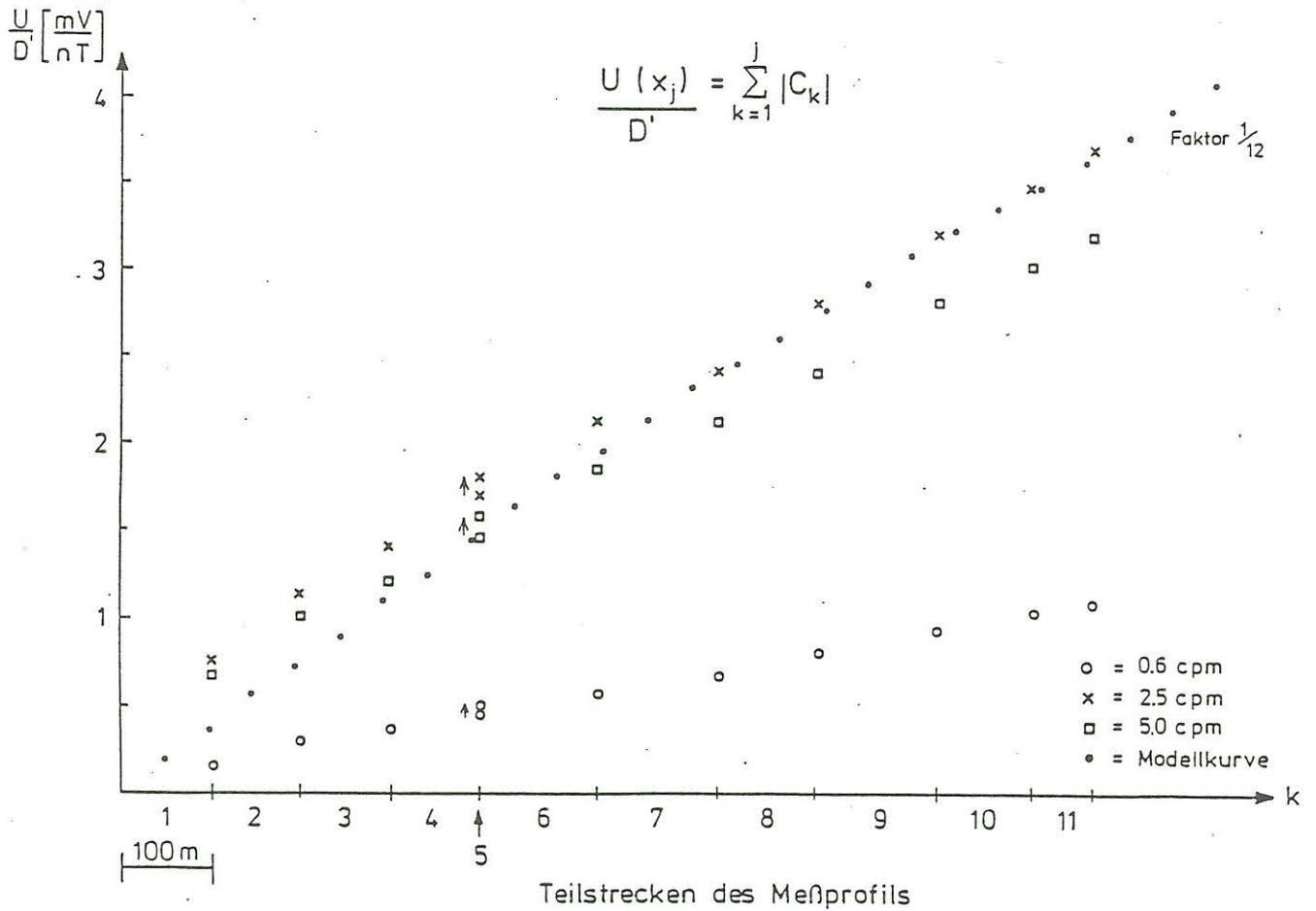


Abb. 7b Wie in Abb. 7a sind für drei Frequenzen die aufsummierten Beträge der Übertragungsfunktionen der gemessenen Spannungen in Abhängigkeit von der D'-Komponente entlang des Profils aufgetragen. Die Modellkurve wurde hier mit einem Faktor 1/12 multipliziert.

durch die dort liegende obere Hang-"Kante" zu erklären. Für den unteren Teil des Profils von der 7. bis zur 11. Teilstrecke liegen die Übertragungsfunktionen unterhalb der Ausgleichsgeraden, maximal um 4% bei 5,0 cpm. Bei ungünstiger Wahl der Meßstationen ist demnach der topographische Effekt auf die Übertragungsfunktionen mit zu berücksichtigen. Für weitere Aussagen über den Geländeeinfluß auf tellurische Felder sollen noch univariate Analysen zwischen den E -Feldern der Teilstrecken und dem aus allen gemessenen E -Feldern gemittelten E -Feld gemacht werden, um Abweichungen entlang des Hangprofils zu sehen. Insbesondere erwies sich das E -Feld der 1. Teilstrecke als Bezugfeld ungeeignet.

Literatur

- Schmucker, U.: Conformal Mapping Methods. Anomalies of Geomagnetic Variations in the South Western United States, Vol. 13 Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography, La Jolla, California, 1970
- Wendorff, L.: Ein erdmagnetisches Profil über die Elfas-Achse mit einer Anwendung der Schwarz-Christoffel-Transformation. Diplomarbeit, Institut für Geophysik Universität Göttingen, 1984