

Die Randintegralgleichungsmethode bei 3D – Modellrechnungen

Martin Petry, Göttingen

1 Einleitung

3D-Modellrechnungen haben erst in den letzten Jahren eine größere Bedeutung erlangt, da die hierfür benötigten Rechen- und Speicherkapazitäten erst nach den jüngsten Fortschritten in der Computertechnologie zur Verfügung stehen. Trotzdem hat sich bereits ein Verfahren – anscheinend – klar durchgesetzt: die *Volumenintegralgleichungsmethode*, die darin besteht, das gegebene Differentialgleichungsproblem in ein Volumenintegralgleichungsproblem umzuformen und dieses dann numerisch zu lösen.

Bei der bisher nur wenig untersuchten *Randintegralgleichungsmethode* (Doherty, 1988) formt man hingegen das gegebene Differentialgleichungsproblem in ein Randintegralgleichungsproblem um, das dann ebenfalls numerisch gelöst werden muß.

Es gibt zwei Gründe, die die genauere Untersuchung der Randintegralgleichungsmethode lohnend erscheinen lassen:

- *Methodenvergleich* – da die praktisch relevanten 3D-Modelle nicht analytisch lösbar sind, kann nicht überprüft werden, ob die mit den existierenden (Volumenintegralgleichungs-) Programmen errechneten Lösungen tatsächlich die wahren Lösungen approximieren; ein (erfolgreicher) Vergleich mit Lösungen, die durch eine ganz andere Methode (z.B. die Randintegralgleichungsmethode) berechnet wurden, könnte das Vertrauen in die angewendeten Methoden erhöhen.
- *Effizienz* – die Randintegralgleichungsmethode erfordert nur die numerische Berechnung zweidimensionaler Integrale (Integrationsgebiet ist die Oberfläche der Anomalie), während die Volumenintegralgleichungsmethode die Berechnung dreidimensionaler Integrale (Integrationsgebiet ist die Anomalie) erfordert; deshalb darf erwartet werden, daß die auf der Randintegralgleichungsmethode basierenden Verfahren hinsichtlich Rechenzeit und Speicherbedarf günstiger sind als die auf der Volumenintegralgleichungsmethode basierenden Verfahren.

Einschränkend muß aber gesagt werden, daß die Randintegralgleichungsmethode nur bei *homogenen* Anomalien angewendet werden kann.

Im folgenden Abschnitt soll nun ein Modell formuliert werden, dessen numerische Lösung mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode in den weiteren Abschnitten beschrieben wird.

2 Das 3D - Modell

Gegeben seien die quasistationären Maxwell - Gleichungen (Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

in einem horizontal geschichteten Halbraum (mit konstanten Leitfähigkeiten $\sigma = \sigma_n$ in den einzelnen Schichten), sowie eine homogene, kugelförmige Anomalie A, die ganz im Inneren einer Schicht liege und die Leitfähigkeit $\sigma = \sigma_A$ besitze.

Die Tangentialkomponenten des \mathbf{E} - und \mathbf{B} - Feldes sind auf dem Rand ∂A von A stetig.

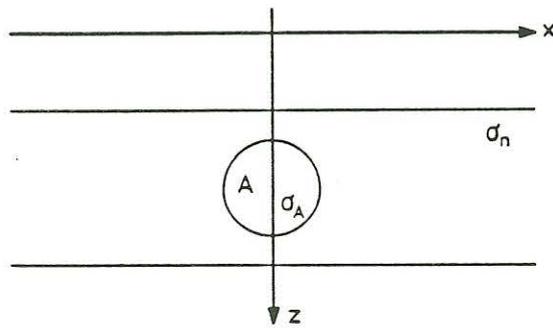


Abb.1: Kugelförmige Anomalie A im horizontal geschichteten Halbraum

Im folgenden werden mit \mathbf{E}_A und \mathbf{B}_A stets die \mathbf{E} - und \mathbf{B} - Felder innerhalb der Anomalie A bezeichnet, während \mathbf{E} und \mathbf{B} die gesamten Felder außerhalb der Anomalie bezeichnen. \mathbf{E} und \mathbf{B} können in ihre *normalen* und *anomalen* Anteile aufgespalten werden. Es gilt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_a$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_a$$

Zu dem oben angegebenen Modell soll nun das *Vorwärts - Problem* betrachtet werden: An der Erdoberfläche (d.h. für $z = 0$) ist \mathbf{E}_n gegeben. Hieraus soll \mathbf{E} an der Erdoberfläche berechnet werden.

3 Herleitung der Randintegralgleichungen

Um dieses Vorwärts - Problem als Randintegralgleichungsproblem formulieren zu können, werden Greensche Tensoren benötigt.

In einem Vollraum mit Leitfähigkeit σ ist der Greensche Tensor $\hat{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ zeilenweise definiert als divergenzfreie, ausstrahlende Lösung der Induktionsgleichung

$$\Delta \hat{\underline{G}}_j^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \kappa^2 \hat{\underline{G}}_j^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j$$

wobei $\mathbf{e}_j, j = 1, 2, 3$, die Einheitsvektoren in Richtung x, y, z bezeichnen und $\kappa^2 = i\omega\mu_0\sigma$ mit $\text{Re } \kappa \geq 0$ ist.

Zur Notation: *Vektoren* sind durch Fettdruck und *Tensoren* durch zusätzliches Unterstreichen gekennzeichnet. Der *Aufpunkt* wird stets mit \mathbf{r} , der *Quellpunkt* stets mit \mathbf{r}' bezeichnet.

$\hat{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ist analytisch bekannt, es gilt:

$$\hat{\underline{G}}_j^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\frac{1}{\kappa^2} \text{rot}_{\mathbf{r}}^2(\Phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j)$$

mit

$$\Phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e^{-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Definiert man

$$\hat{\underline{G}}_j^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') := -\text{rot}_{\mathbf{r}} \hat{\underline{G}}_j^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad ,$$

gilt also

$$\hat{\underline{G}}_j^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\text{rot}_{\mathbf{r}}(\Phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_j) \quad .$$

Analog zum Vollraum-Fall definiert man im geschichteten Halbraum den Greenschen Tensor $\underline{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ als divergenzfreie, ausstrahlende Lösung der Induktionsgleichung in den einzelnen Schichten, die an den Schichtgrenzen bestimmte Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Die Berechnung des Tensors $\underline{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ erfolgt über einen Ansatz mit 2 skalaren Potentialen, die rekursiv (von Schicht zu Schicht) berechnet werden (Weidelt, 1975).

Analog zum Vollraum-Fall definiert man auch im geschichteten Halbraum den Tensor $\underline{\underline{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ zeilenweise durch:

$$\underline{\underline{G}}_j^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') := -\text{rot}_{\mathbf{r}} \underline{\underline{G}}_j^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad .$$

Die Tensoren $\underline{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ und $\underline{\underline{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ kann man zerlegen in ihren (singulären) Vollraum-Anteil und einen glatten Tensor:

$$\underline{\underline{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \hat{\underline{\underline{G}}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \underline{\underline{D}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad .$$

$$\underline{\underline{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \hat{\underline{\underline{G}}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \underline{\underline{D}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad .$$

Mit Hilfe der Tensoren kann man nun die Darstellungssätze von Stratton und Chu formulieren. Für das E_a - Feld außerhalb der Anomalie ($r \notin \bar{A}$) gilt:

$$-E_a(r) = \int_{\partial A} \underline{G}^M(r|r') \cdot [\nu(r') \times E_a(r')] do \\ + i\omega \int_{\partial A} \underline{G}^N(r|r') \cdot [\nu(r') \times B_a(r')] do ,$$

wobei $\nu(r')$ die in das Äußere von A gerichtete Einheitsnormale der Fläche ∂A im Punkt r' ist.

Für das E_n - Feld gilt ($r \notin \bar{A}$):

$$0 = \int_{\partial A} \underline{G}^M(r|r') \cdot [\nu(r') \times E_n(r')] do \\ + i\omega \int_{\partial A} \underline{G}^N(r|r') \cdot [\nu(r') \times B_n(r')] do .$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man ($r \notin \bar{A}$):

$$E_n(r) - E(r) = \int_{\partial A} \underline{G}^M(r|r') \cdot [\nu(r') \times E(r')] do \quad (1) \\ + i\omega \int_{\partial A} \underline{G}^N(r|r') \cdot [\nu(r') \times B(r')] do .$$

Diese Gleichung zeigt, daß man das gesuchte E - Feld an der Erdoberfläche kennt, wenn man die tangentialen E - und B - Felder auf dem Rand der Anomalie kennt.

Um diese beiden Tangentialfelder berechnen zu können, benötigt man noch den Darstellungssatz für das B_A - Feld innerhalb der Anomalie. Er lautet ($r \in A$):

$$B_A(r) = \int_{\partial A} \hat{\underline{G}}_A^M(r|r') \cdot [\nu(r') \times B_A(r')] do \quad (2) \\ - \mu_0 \sigma_A \int_{\partial A} \hat{\underline{G}}_A^N(r|r') \cdot [\nu(r') \times E_A(r')] do .$$

Dabei bezeichnen $\hat{\underline{G}}_A^N(r|r')$ und $\hat{\underline{G}}_A^M(r|r')$ die Tensoren zum Vollraum mit der Leitfähigkeit σ_A .

Multipliziert man die Gleichungen (1) und (2) vektoriell mit $\nu(r)$ und läßt r gegen den Rand von A laufen, so erhält man – unter Beachtung der für die auftretenden Integraloperatoren geltenden *Sprungbeziehungen* – das System von Randintegralgleichungen 2.Art ($r \in \partial A$):

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} [\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] &= \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \underline{\mathbf{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] do \\ &+ i\omega \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \underline{\mathbf{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] do \\ \frac{1}{2} [\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] &= \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_A^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] do \\ &- \mu_0 \sigma_A \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\underline{\mathbf{G}}}_A^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] do . \end{aligned}$$

Lösung dieses Randintegralgleichungssystems sind die Tangentialfelder $[\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})]$ und $[\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$, die - in den Darstellungssatz (1) eingesetzt - das im 2. Abschnitt formulierte Problem lösen. Das vorgelegte Differentialgleichungsproblem ist somit in ein Randintegralgleichungsproblem umgeformt worden.

4 Die Nyströmmethode

Da das Randintegralgleichungssystem nicht analytisch lösbar ist, soll es numerisch gelöst werden und zwar mit der Nyströmmethode (Quadraturformelmethode).

Die Nyströmmethode ist ein in der numerischen Mathematik sorgfältig analysiertes Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen 2. Art (Kress, 1989). Es besteht aus drei Schritten:

- Wahl geeigneter Quadraturformeln
- Ersetzen der auftretenden Integrale durch die Quadraturformeln
- Auswertung der Gleichungen an den Stützstellen der Quadraturformeln

Damit erhält man ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsvektor aus den Näherungswerten für die Werte der gesuchten Funktion an den Stützstellen der verwendeten Quadraturformeln besteht.

Entscheidend für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens ist die Güte der gewählten Quadraturformeln. Wenn mehrere Quadraturformeln gewählt werden müssen (weil in der zu lösenden Integralgleichung unterschiedlich glatte Integranden auftreten), sollten diese möglichst gleiche Approximationsgüte besitzen. Außerdem müssen sie dieselbe Stützstellenmenge verwenden, da sonst das resultierende Gleichungssystem nicht lösbar ist.

5 Quadraturformeln

In diesem Abschnitt sollen Quadraturformeln angegeben werden, mit deren Hilfe die Nyströmmethode auf das im 3. Abschnitt hergeleitete Randintegralgleichungssystem angewen-

det werden kann. Dazu werden zunächst die im Randintegralgleichungssystem auftretenden Halbraum - Tensoren in ihre singulären und glatten Anteile aufgespalten. Man erhält ($\mathbf{r} \in \partial A$):

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} [\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] &= \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\mathbf{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] do \\ &+ \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \mathbf{D}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] do \\ &+ i\omega \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\mathbf{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] do \\ &+ i\omega \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \mathbf{D}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] do \\ \frac{1}{2} [\nu(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] &= \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\mathbf{G}}_A^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] do \\ &- \mu_0 \sigma_A \nu(\mathbf{r}) \times \int_{\partial A} \hat{\mathbf{G}}_A^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot [\nu(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] do. \end{aligned}$$

Dieses System transformiert man nun noch auf die Einheitssphäre S^2 , und wählt dann Quadraturformeln für die auftretenden Integraloperatoren, die entweder glatte Kerne oder aber einen Vollraum - Tensor als Kern haben

Die *glatten* Integranden sollen durch die Gauß - Produktformel approximiert werden, d.h. durch

$$\int_{S^2} f(\mathbf{r}') do \approx \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^{2K-1} w_i f(t_i, s_j) \quad ,$$

wobei w_i die Gewichte und (t_i, s_j) die Stützstellen der Gauß - Produktformel sind.

Die Integraloperatoren mit singulärem Kern, d.h. die Operatoren

$$\mathbf{M}f(\mathbf{r}) := \nu(\mathbf{r}) \times \int_{S^2} \hat{\mathbf{G}}^M(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot f(\mathbf{r}') do, \quad \mathbf{r} \in S^2,$$

und

$$\mathbf{N}f(\mathbf{r}) := \nu(\mathbf{r}) \times \int_{S^2} \hat{\mathbf{G}}^N(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot f(\mathbf{r}') do, \quad \mathbf{r} \in S^2,$$

werden durch *Projektionsquadraturformeln* approximiert. Die Idee hierzu geht auf Wienert zurück, der analoge Projektionsquadraturformeln für die Integraloperatoren zur skalaren Helmholtzgleichung angegeben hat: die Belegungsfunktion wird auf den Eigenraum des zu approximierenden Integraloperators projiziert. Das Integral mit der projizierten Belegungsfunktion kann exakt angegeben werden und dient als Approximation für das Integral mit der ursprünglichen Belegungsfunktion.

Die Integraloperatoren M und N besitzen die Eigenfunktionen (Kress, 1983)

$$\text{Grad } Y_l^m$$

und

$$\nu \times \text{Grad } Y_l^m,$$

wobei Grad den Oberflächengradienten und Y_l^m die Kugelfunktionen l -ter Ordnung vom Grade m bezeichnen.

Es gilt:

$$M(\text{Grad } Y_l^m) = \gamma_l^M \text{Grad } Y_l^m$$

$$M(\nu \times \text{Grad } Y_l^m) = \eta_l^M \nu \times \text{Grad } Y_l^m$$

und

$$N(\text{Grad } Y_l^m) = \gamma_l^N \text{Grad } Y_l^m$$

$$N(\nu \times \text{Grad } Y_l^m) = \eta_l^N \nu \times \text{Grad } Y_l^m,$$

d.h. die Eigenwerte hängen nur von der Ordnung l (und natürlich von der Wellenzahl κ) ab.

Definiert man die Projektion auf die Eigenfunktionen durch:

$$Pf := \sum_{l=1}^{K-1} \frac{1}{l(l+1)} \left[\sum_{m=-l}^l \langle f, \text{Grad } Y_l^m \rangle \text{Grad } Y_l^m + \sum_{m=-l}^l \langle f, \nu \times \text{Grad } Y_l^m \rangle \nu \times \text{Grad } Y_l^m \right],$$

wobei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das diskrete Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^{2K-1} w_i f(t_i, s_j) \cdot \overline{g(t_i, s_j)}$$

für vektorwertige Funktionen f und g bezeichnet wird (hier sind wieder w_i die Gewichte der Gauß-Produktformel und (t_i, s_j) deren Stützstellen, \bar{g} die zu g konjugiert komplexe Funktion), so erhält man die Approximationen

$$Mf(\mathbf{r}) \approx MPf(\mathbf{r})$$

$$= \sum_{l=1}^{K-1} \left[\frac{\gamma_l^M}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \langle f, \text{Grad } Y_l^m \rangle \text{Grad } Y_l^m + \frac{\eta_l^M}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \langle f, \nu \times \text{Grad } Y_l^m \rangle \nu \times \text{Grad } Y_l^m \right]$$

und

$$Nf(\mathbf{r}) \approx NPF(\mathbf{r})$$

$$= \sum_{l=1}^{K-1} \left[\frac{\gamma_l^N}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \langle f, \text{Grad } Y_l^m \rangle \text{Grad } Y_l^m + \frac{\eta_l^N}{l(l+1)} \sum_{m=-l}^l \langle f, \nu \times \text{Grad } Y_l^m \rangle \nu \times \text{Grad } Y_l^m \right]$$

Für *glatte* Integranden entspricht die Approximation durch die Gauß - Produktformel der Approximation durch die Projektion des Integranden, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} f(\mathbf{r}') \, d\omega &\approx \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^{2K-1} w_i f(t_i, s_j) \\ &= \int_{S^2} Pf(\mathbf{r}') \, d\omega \end{aligned}$$

Also haben die Projektionsquadraturformeln dieselbe Approximationsgüte wie die Gauß - Produktformel.

Außerdem ist durch die Definition des diskreten Skalarproduktes sichergestellt, daß die Projektionsquadraturformeln dieselben Stützstellen wie die Gauß - Produktformel verwenden. Die in diesen Abschnitt angegebenen Quadraturformeln haben also die oben genannten Eigenschaften *geeigneter* Quadraturformeln und können deshalb zur numerischen Lösung des Randintegralgleichungssystems eingesetzt werden.

Damit ist die theoretische Herleitung der Randintegralgleichungsmethode abgeschlossen. An einer Implementierung des Verfahrens wird zur Zeit gearbeitet, ein Methodenvergleich mit einem Volumenintegralgleichungsprogramm sowie ein Vergleich mit gemessenen Daten (an einer durch Bohrungen bekannten Anomalie) sind geplant.

LITERATUR

- DOHERTY, J.: EM modelling using surface integral equations. Geophysical Prospecting, 36, 1988, 644-668.
- KRESS, R.: Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering. NAM-Bericht 35, Göttingen, 1983.
- KRESS, R.: Linear integral equations. Springer, Berlin, 1989.
- STRATTON, J.A. and CHU, L.J.: Diffraction theory of electromagnetic waves. Phys. Review, 56, 1939, 99-107.
- WEIDELT, P.: EM induction in 3D structures. J. Geophys., 41, 1975, 85-109.
- WIENERT, L.: Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^3 . Dissertation, Göttingen, 1990.