Erich Schinke

Berechnung der elektromagnetischen Kugel-Response

Bei der Interpretation von längerperiodischen Schwankungen des Erdmagnetfeldes, z. B. Sq, alsInduktionseffekt der Erde, verursacht durch ein fluktuierendes Magnetfeld mit äußeren Quellen,interessiert die Berechnung der globalen elektromagnetischen Response von Erdmodellen.

1 Erdmodelle

In diesem Vortrag werden konzentrisch geschichtete sphärische Erdmodelle betrachtet. Modellparameter sind Anzahl und Radien der Kugelschalen und deren konstante elektrische Leitfähigkeiten. Die relative Permeabilität wird generell gleich 1 gesetzt. Der Kugelschalenbereich zwischen Modellkugel und Quellregion des äußeren, die Induktion antreibenden Magnetfeldes wird als frei von Leitungsströmen angenommen (Leitfähigkeit $\sigma = 0$). Dieser wird als Außenraum Ω_a bezeicnet, die Modellkugel als K_a, a ist der Erdradius. Der Kugelmittelpunkt ist Ursprung der sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, φ.

2 Felddarstellungen

Im Außenraum kann das Magnetfeld als Gradientenfeld geschrieben werden. Es ist superponiert aus dem äußeren, die Induktion hervorrufenden Magnetfeld $\underline{B}_e$ und dem Magnetfeli $\underline{B}_i$ der im Inneren der Kugel induzierten Ströme:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \underline{B}_e(\underline{r}) + \underline{B}_i(\underline{r}) = - \operatorname{grad}\phi(\underline{r}) \quad , \quad \underline{r} \in \Omega_a \qquad (1)$$

Die Kugelfunktionsentwicklung von ϕ läßt sich wie folgt angeben:

$$\phi(\underline{r}) = a \sum_{n,m} \left\{ \varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a}\right)^n + \iota_n^m \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} Y_{nm}(\vartheta,\varphi)$$

$$= a \sum_{n,m} \varepsilon_n^m \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^n + q_n^m \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} Y_{nm}(\vartheta,\varphi) \qquad (2)$$

mit $\quad q_n^m := \dfrac{\iota_n^m}{\varepsilon_n^m}$

ε_n^m und ι_n^m sind die komplexen Koeffizienten von äußerem und innerem Potentialanteil, $Y_{nm}(\vartheta,\varphi) = P_n^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}$ die Kugelflächenfunktionen.

Hat das induzierende Feld $\underline{B}_e$ harmonische Zeitabhängigkeit $(e^{i\omega t})$, so sind die im Inneren der Modellkugel induzierten Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ divergenzfreie Lösungen der Vektor-Helmholtzgleichung

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\underline{B}(\underline{r}) = 0 \quad , \; \underline{r} \in K_a \qquad (3)$$

mit $\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\varepsilon_r - i\omega\mu_0\sigma$ bzw., bei Vernachlässigung der Verschiebungsströme in der quasistationären Näherung,

$$\varkappa^2 = - i\omega\mu_0\sigma \; . \qquad (3a)$$

Divergenzfreie Felder können in toroidalen und poloidalen Anteil zerlegt werden. Ein äußeres Gradientenfeld $\underline{B}_e$ regt nur ein poloidales $\underline{B}$ in der Kugel an und das zugehörige toroidale $\underline{E}$. Auch diese Felder können aus einer skalaren Potentialfunktion $\Psi(\underline{r})$ gebildet werden, die Lösung der skalaren Helmholtzgleichung ist:

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\Psi(\underline{r}) = 0 , \quad \underline{r} \in K_a \; . \qquad (4)$$

Analog (2) kann Ψ nach Eigenlösungen der skalaren Helmholtzgleichung entwickelt werden.

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{r}) &= \sum_{n,m} \left\{ a_n^m\, j_n(\varkappa r) + b_n^m\, \eta_n(\varkappa r) \right\} Y_{nm}(\vartheta,\varphi) \\ &= \sum_{n,m} a_n^m \left\{ j_n(\varkappa r) + d_n^m\, \eta_n(\varkappa r) \right\} Y_{nm}(\vartheta,\varphi) \qquad (5) \end{aligned}$$

mit $d_n^m := \dfrac{b_n^m}{a_n^m} \quad , \; \underline{r} \in K_a$

j_n und η_n sind sphärische Bessel- bzw. Neumannfunktionen. Die komplexen Koeffizienten a_n^m und b_n^m sind für jede Kugelschale speziell zu bestimmen. Im Kern der Modellkugel wird b_n^m bzw. d_n^m Null sein, weil η_n im Nullpunkt singulär ist.
Mit Ψ erhält man

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{i}{\omega}\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, (\underline{r}\, \Psi(\underline{r})) \qquad (6a)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\, (\underline{r}\, \Psi(\underline{r})) \quad , \; \underline{r} \in K_a \qquad (6b) \; .$$

3 Definition der Response der Kugel

Koppelt man an den Grenzflächen der Kugelschalen und an der Kugeloberfläche die Felder (1) und (6a) entsprechend den elektromagnetischen Übergangsbedingungen (Stetigkeit der Normal- und Tangentialkomponente von $\underline{B}$ ist hier hinreichend) aneinander an, so lassen sich bei Vorgabe der Koeffizienten ε_n^m des induzierenden Feldes $\underline{B}_e$ alle unbestimmten Koeffizienten ι_n^m, a_n^m, b_n^m berechnen. Hierbei zeigt sich, daß die Quotienten d_n^m (5) durch die Parameter der jeweiligen Schale und die der darunter liegenden (inneren) Schalen festgelegt sind. Weiter zeigt sich, daß für fest gewähltes n d_n^m nicht von m abhängt. Wir können also schreiben $\frac{b_n^m}{a_n^m} = d_n$. Beide Eigenschaften übertragen sich infolge der Übergangsbedingungen von innen nach außen, so daß auch für das Potential des Außenfeldes (2) gilt: $\frac{\iota_n^m}{\varepsilon_n^m} = q_n$.
Diese Koeffizienten q_n sind also durch das Modell festgelgt. Aus dem Potential des anregenden Feldes erhält man mit ihnen das Potential des inneren Anteils des Außenfeldes $\underline{B}_i$.

Die Felder im Kugelinneren waren als Lösungen der Vektor-Helmholtzgleichung geschrieben worden. Das gilt für die betrachteten Modelle bei harmonischer Zeitabhängigkeit aller Felder bzw. für zeitliche Fourierkomponenten von Feldern. Das bedeutet aber, daß alle Entwicklungskoeffizienten der Potentiale von ω abhängen.

Damit wird folgende Definition der elektromagnetischen Response q_n der Kugel motiviert :

$$q_n := \frac{\iota_n^m}{\varepsilon_n^m} \qquad (7)$$

Die Response q_n ist eine Funktion von ω, sie ist im angegebenen Sinne intrinsisch und entartet (unabhängig von m bei festem n).

4 Übergangsbedingungen, Radialfunktion und Response

Die Übergangsbedingungen an den inneren Grenzschichten der Modellkugel sind äquivalent zu der Bedingung an der Radialanteil von (5):

$$\frac{\frac{d}{dr}\left\{r\left(j_n \varkappa r + d_n \eta_n(\varkappa r)\right)\right\}}{j_n(\varkappa r) + d_n \eta_n(\varkappa r)} \quad \text{muß steig sein an Grenzflächen.}$$

Mit Anwendung der rekursiven Ableitungsformel für sphärische

Besselfunktionen ergit sich hieraus eine weitere äquivalente Bedingung fürdie Radialfunktion

$$g_n(\varkappa r) := -i\,\frac{j_n(\varkappa r) + d_n\,\eta_n(\varkappa r)}{j_{n-1}(\varkappa r) + d_n\,\eta_{n-1}(\varkappa r)} \quad \text{(Schmucker (1970))} \qquad (8)$$

Diese Bedingung, die hier benutzt wird, ist:

$$\frac{\varkappa}{g_n(\varkappa r)} \quad \text{muß stetig sein an Grenzflächen} \qquad (9)$$

Mit dem Wert von g_n an der Kugeloberfläche erhält man schließlich die gesuchte Response

$$q_n = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{(2n+1)\,g_n(\varkappa_1 a)}{\varkappa_1 a}\right) \qquad (10)$$

5 Fortsetzung der Radialfunktion

Auf Grund des Wegfalls der Neumannfunktion im Kern der Modellkugel ist der Wert von g_n an der Oberfläche des Kerns:

$$g_n(\varkappa\, r_N) = -i\,\frac{j_n(\varkappa_N r_N)}{j_{n-1}(\varkappa_N r_N)} \quad \text{(vgl. Abb.1)}$$

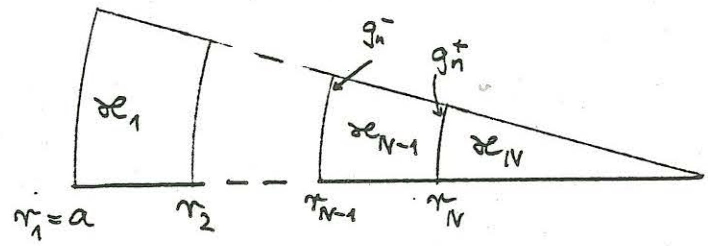

Abb.1 Modellparameter

Mit (9) wird g_n durch die Grenzfläche bei r_N fortgesetzt. Die Fortsetzung durch die darüber liegende Kugelschale wird mit Symbol + für $\varkappa_{N-1} r_N$ und - für $\varkappa_{N-1} r_{N-1}$, die Argumente der Radialfunktion an der unteren bzw. oberen Schichtgrenze, angegeben:

$$g_n^- = \frac{g_n^+[\eta_n^-\, j_{n-1}^+] + i[\eta_n^-\, j_n^+]}{i g_n^+[\eta_{n-1}^-\, j_{n-1}^+] + [\eta_n^+\, j_{n-1}^-]} \qquad (11)$$

mit dem Kommutatorsymbol $[\eta_n^-\, j_m^+] := \eta_n^- j_m^+ - j_n^- \eta_m^+$ (12).

Die Iteration dieser beiden Schritte, Fortsetzung von g_n durch Schalengrenzen und durch Schalen, ergibt schließlich denOberflächenwert $g_n(\varkappa_1 a)$ und die Response q_n (10).

Die Kommutatoren (12)haben folgende Invarianzeigenschaft: Ersetzt man η und j durch ein beliebiges anderes Paar linear unabhängiger Lösungen der Besselschen Differentialgleichung ohne Änderung von Grad und Argument, so ändert sich der Wert des Kommutators nicht bis auf triviale Faktoren ($\pm 1, \pm i, \pm \frac{i}{2}$).

6. Programmieren der Radialfunktion

Der Kommutatoraufbau der Fortsetzungsprozedur zeigt ein Problem der Berechnung. Bei großzügiger Wahl der Zulässigkeitsbereichefür Grad n und Argument $\varkappa r$ können schnell overflow-Schwierigkeiten bei den Funktionen oder Fehler bei der Multiplikation sehr großer und sehr kleiner Zahlen auftreten.

Ziel war, die Radialfunktion für Grade $n \in [1,100]$ und Argumente $|\varkappa r| \in (0,100]$ zu berechnen. Die sphärischen Besselfunktionen wurden wegen des speziellen komplexen Arguments $\varkappa r$ (vgl. (3a)) über die modifizierten sphärischen Funktionen bestimmt. Das $n/|\varkappa r|$ -Feld wurde mit drei Darstellungen der sphärischen Besselfunktionen abgedeckt, die hier mit der Numerierung von Abramowitz/Stegun zitiert werden:

MINI	Reihen für kleine Argumente	10.2.5 , 10.2.6
HYP	Rekursionsformeln mit hyperbolischen trigonometrischen Funktionen	10.2.12
ASY	Gleichförmig asymptotische Formeln	9.7.7 , 9.7.8

Die Feldaufteilung zeigt Abb.2. In den verschiedenen Darstellungen wurden unterschiedliche Funktionspaare zur Berechnung der Kommutatoren benutzt; das ist wegen der erwähnten Invarianz zulässig. Ungenaue Produktberechnungen lassen sich durch Abspalten und Verrechnen der Asmptotik vermeiden. Durch überlappende Berechnung der Bereiche von Abb.2 wurde befriedigende Übereistimmung erzielt.

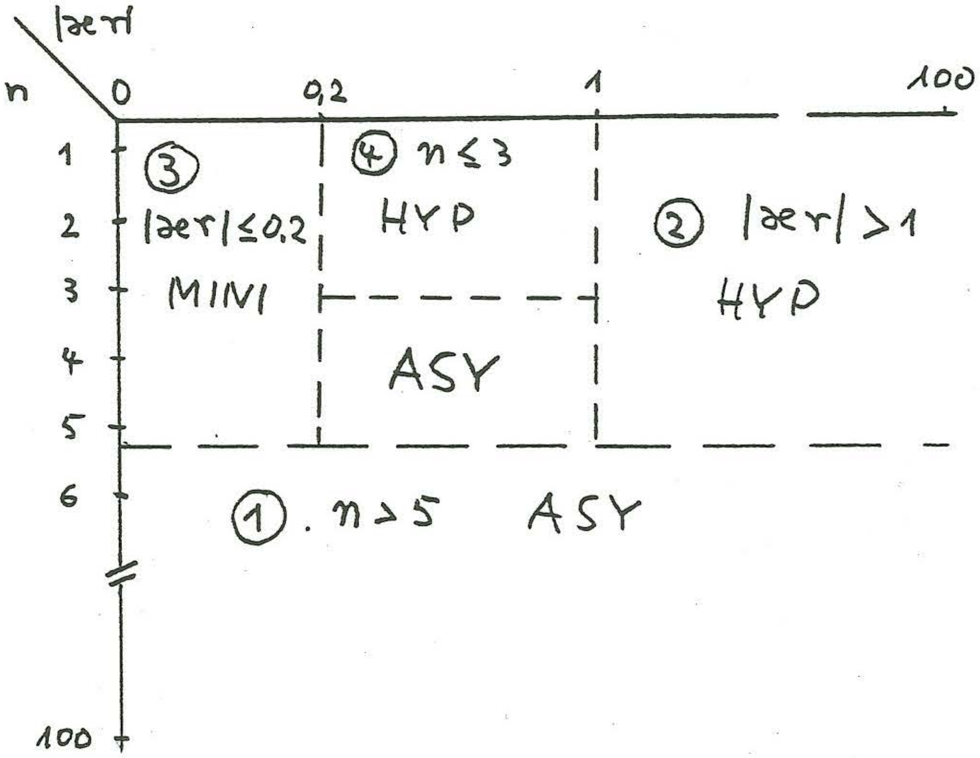

Abb.2 Feldaufteilung der Darstellungen

Literatur

Abramowitz,M. and J.A.Stegun (1972): "Handbook of Mathematical Functions", New York

Schmucker,U. (1970): "Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States", Scripps Bull.,13, Berkeley