

U. SCHMUCKER

"Globale Analysen von Sq und L: Zur Abtrennung ihrer inneren EM-induzierten Anteile mit und ohne Feldmodelle"

Mit der Darstellung tagesperiodischer S-Variationen durch Kugelfunktionen hat es folgende Bewandnis: Da sie an einem gegebenen Ort auf der Erdoberfläche im wesentlichen durch den jeweiligen Stand der Sonne bestimmt werden, bezieht man die Darstellung zweckmäßigerweise auf ihre harmonischen Koeffizienten in Ortszeit $T = t + \lambda$. Dabei ist t die Weltzeit, λ die geographische Länge des Ortes. Die Zeit wird in Winkelmaß gemessen, so daß 2π dem vollen Tag entspricht. Die Poldistanz eines Ortes wird mit θ bezeichnet.

Sei nun $V_m(\theta, \lambda)$ die m -te komplexe harmonische Amplitude des Potentials von S, also das Potential insgesamt an diesem Ort

$$V(T, \theta, \lambda) = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \{ V_m(\theta, \lambda) e^{imT} \},$$

so wird zur Darstellung nach dem Vorbild von Parkinson (1977) der Ansatz gewählt (R_E : Erdradius)

$$\begin{aligned} V_m(\theta, \lambda) = R_E \{ & \sum_{n=m}^N A_n^m P_n^m(\cos\theta) \\ & + e^{-i\lambda} \sum_{n=m-1}^{N-1} B_n^m P_n^{m-1}(\cos\theta) \\ & + e^{+i\lambda} \sum_{n=m+1}^{N+1} C_n^m P_n^{m+1}(\cos\theta) \} \end{aligned} \quad (1)$$

In der ersten Teilsumme mit den A-Koeffizienten ist der dominierende ortszeitabhängige Anteil von S enthalten. Durch die nachfolgenden Teilsummen wird eine gewisse Nichtortszeitabhängigkeit einbezogen. Für eine vollständige Entwicklung wäre die Darstellung durch weitere Teilsummen mit $\exp(\pm 2i\lambda)$, $\exp(\pm 3i\lambda)$, zu ergänzen..

Die gleichfalls komplexen Entwicklungskoeffizienten A, B und C erhält man durch eine Ausgleichsrechnung aus vorgegebenen harmonischen Koeffizienten H_m und D_m der Horizontalkomponenten von S an weltweit verteilten Observatorien mit $H = + R_E^{-1} \partial V / \partial \theta$, $D = - R_E^{-1} \sin \theta^{-1} \partial V / \partial \lambda$. Da für jede Harmonische V_m des Potentials 3N Koeffizienten bestimmt werden, muß die Zahl der verfügbaren Observatorien genügend groß sein, möglichst ein Vielfaches von $3(N-m+1)$.

Ganz entsprechend liefern die harmonischen Koeffizienten Z_m der Vertikalkomponente einen zweiten, unabhängigen Satz von Entwicklungskoeffizienten a, b und c in der Darstellung

$$Z_m = \sum_m^N a_n^m P_n^m(\cos \theta) + e^{-i\lambda} \sum_{m-1}^{N-1} b_n^m P_n^{m-1}(\cos \theta) + e^{i\lambda} \sum_{m+1}^{N+1} c_n^m P_n^{m+1}(\cos \theta) . \quad (2)$$

Beide Sätze von Koeffizienten enthalten Anteile von äußerem Ursprung (Subskript "e") und innerem Ursprung (Subskript "i") bezüglich der Erdoberfläche in verschiedenen Kombinationen. Es gilt

$$A_n^m = A_{n,e}^m + A_{n,i}^m \quad (3)$$

$$a_n^m = n A_{n,e}^m - (n+1) A_{n,i}^m$$

mit entsprechenden Ausdrücken für die übrigen Koeffizienten.

Die durch die Kugelfunktionsentwicklung ermöglichte Aufspaltung in äußere und innere Anteile ist an keine Voraussetzungen gebunden - abgesehen von denjenigen, daß das Magnetfeld von S an der Erdoberfläche ein Potentialfeld ist mit den alternativen r-Abhängigkeiten r^n ("e") und $r^{-(n+1)}$ ("i"). Es besteht aber kein Anlaß daran zu zweifeln, daß der äußere Anteil von S das Magnetfeld von Strömen in der Ionosphäre darstellt und daß der innere Anteil auf Strömen in der Erde beruht, die durch dieses Feld induziert werden. In diesem dritten Sq Beitrag geht es um den inneren Anteil und seine Beziehungen zur Leit-

fähigkeitsverteilung $\sigma = \sigma(r, \theta, \lambda)$ im Erdinnern. Hierzu sollen drei Hypothesen aufgestellt und anhand eines Datensatzes geprüft werden.

Hypothese 1: Die Leitfähigkeit der Erde sei - zumindest im Bereich der Eindringtiefe von S-Variationen bis etwa 800 km - eine reine Funktion der Tiefe. Dann läßt sich für dieses sphärische Erdmodell $\sigma = \sigma(r)$ eine Responsefunktion $Q_n(f)$ angeben, die für einen vorgegebenen Grad n als Funktion der Frequenz f den inneren Anteil aus dem äußeren Anteil ableitet:

$$A_{n,i}^m = Q_n(f) A_{n,e}^m \quad (4)$$

oder, umgeschrieben auf die Entwicklungskoeffizienten des Oberflächenfeldes:

$$a_n^m = \frac{n(1 - \frac{n+1}{n} Q_n)}{1 + Q_n} A_n^m$$

Indem man $Q_n(f)$ durch eine neue Response

$$C_n(f) = \frac{R_E}{n+1} \frac{1 - \frac{n+1}{n} Q_n}{1 + Q_n} \quad (5)$$

ersetzt, die die anschauliche Bedeutung einer Eindringtiefe hat und mit $2\pi i f$ multipliziert die magnetotellurische Impedanz ergibt, erhält die Normalbeziehung zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Vertikal- und Horizontalkomponenten die Form

$$a_n^m = n(n+1) C_n / R_E \cdot A_n^m \quad (6)$$

mit identischen Beziehungen für die B und C Koeffizienten.

Dabei ist zu beachten, daß wegen der sphärischen Symmetrie des Leiters die Response nicht von der Ordnung $m(\pm 1)$ der Kugelfunktionen abhängt, sondern allein von deren Grad n . So ist gewährleistet, daß die Beziehungen (4) und (6) für jede beliebige Polage gelten. Für eine feste Frequenz oder Harmonische von S müssen danach die Koeffizientenverhältnisse für gleiches n alle gleich sein:

$$a_n^m / A_n^m = b_n^m / B_n^m = c_n^m / C_n^m$$

Außerdem dürften sich diese Verhältnisse nur sehr stetig mit dem Grad n ändern, wenn man sie durch $n(n+1)$ teilt und so in Eindringtiefen im Verhältnis zum Erdradius überführt. Schließlich ist auch die Abhängigkeit der Response von der Frequenz modellunabhängigen Beschränkungen unterworfen (s. Abb.1).

Globale Analysen von S-Variationen mit Observatoriumsdaten zeigen, daß nur die im Betrag größten Koeffizienten pro Periode den genannten Voraussetzungen für ein sphärisches Erdmodell wenigstens einigermaßen genügen. Dies könnte bedeuten, daß entweder alle weiteren Terme nicht signifikant sind, oder aber daß im inneren Anteil von S-Variationen Leitfähigkeitsanomalien σ_a wirksam werden, daß also von einem allgemeinen Erdmodell $\sigma = \sigma_n(r) + \sigma_a(r, \theta, \lambda)$ im Bereich der Eindringtiefe auszugehen ist.

Dies müssen nicht unbedingt tiefliegende Mantelinhomogenitäten sein, etwa ein systematischer Unterschied der Mantelleitfähigkeit unter Ozeanen und Kontinenten, sondern es könnten auch, wie Modellrechnungen nahelegen, induzierte Ströme in den Weltmeeren selbst für Anomalien des inneren Anteils sorgen. Aus Beobachtungen in Kalifornien ist bekannt, daß auch der Sq-Gang einen Küsteneffekt in Z besitzt (Schmucker, 1970; Fig. 25). Auch gibt es starke Anomalien auf dem Festland, wie etwa die große Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie, die sich bis zum Sq-Gang auswirken (Schmucker, 1959; Abb.14; Fanselau, 1968; Abb.1,2).

Es soll daher für das Folgende angenommen werden, daß auch die Entwicklungskoeffizienten mit kleinen Beträgen eine Bedeutung haben und daß sie nicht etwa ein Artefakt der Analyse sind, bedingt durch Datenfehler oder die Stationsauswahl oder die Auswahl der berechneten Koeffizienten.

Für ein nicht-sphärisches Erdmodell lassen sich zwar immer noch lineare Responsefunktionen zwischen den Anteilen angeben, doch zu jedem äußeren Term gehört jetzt eine Vielzahl von inneren Termen, die sich alle überlagern. Der innere Term $A_{n,i}^m$ etwa würde aus einem Normalanteil $Q_n A_{n,e}^m$, der zu σ_n gehört, und einem anomalen Anteil ΔA_n^m zusammengesetzt sein, der durch Übertragungsfunktionen zu allen äußeren Termen in Beziehung zu setzen wäre.

Es soll jetzt aber nicht versucht werden, solche anomalen Anteile in S mit Modellrechnungen vom Normalanteil abzutrennen, um dann $\sigma_n(r)$ zu finden. Rechnungen hierzu sind vielfach durchgeführt worden, ohne daß sich allerdings bisher ein Bezug zu Beobachtungen herstellen ließ (P.C. Kendall und D.A. Quinney, 1983).

Es soll vielmehr ein Weg aufgezeigt werden, anomale innere Anteile des Tagesganges den Beobachtungen direkt zu entnehmen. Hierzu werden zwei Alternativen ohne und mit Verwendung eines Erdmodells untersucht:

Hypothese 2: Das äußere Quellenfeld wird durch einige dominierende Terme hinreichend genau dargestellt, etwa durch die A-Terme des Ortszeitanteils oder auch nur den führenden A-Term mit $n = m+1$. Alle übrigen Terme sind anomal und somit rein inneren Ursprungs. Für sie muß nach (3) gelten

$$a_n^m = - (n+1) A_n^m, b_n^m = \dots \quad (8)$$

Hypothese 3: Alle Terme können äußere und innere Anteile enthalten. Durch ein vorgegebenes sphärisches Erdmodell $\sigma = \sigma_n(r)$ und die zugehörige Responsefunktion wird ihr innerer Normalanteil festgelegt und die verbleibende Differenz zum beobachteten Wert als anomaler Anteil definiert:

$$A_n^m = (1+Q_n) A_{n,e}^m + \Delta A_n^m \quad (9)$$

$$a_n^m = n(n+1) C_n/R_E \cdot A_{n,e}^m + \Delta a_n^m$$

mit entsprechenden Gleichungen für die übrigen Koeffizienten (Gl. 4 und 6).

Die durch Gl.(9) definierten anomalen Anteile müssen inneren Ursprungs sein. Also gilt wieder nach (3) zusätzlich

$$\Delta a_n^m = - (n+1) \Delta A_n^m \quad (10)$$

Damit läßt sich die Gl.9 nach den beiden verbliebenen Unbekannten auflösen:

$$A_{n,e}^m = \frac{(n+1) A_n^m + a_n^m}{2n+1}, \quad (11)$$

$$\Delta A_n^m = \frac{1+Q_n}{2n+1} \left\{ \frac{n(n+1) C_n}{R_E} \cdot A_n^m - a_n^m \right\} \quad (12)$$

Gl.(11) ist die unveränderte Gaußsche Trennungsformel für den äußeren Potentialanteil, Gl.(12) ist neu. Indem man etwa aus den tiefer eindringenden und von Anomalien weniger betroffenen Dst-Variationen ein globales Erdmodell ableitet und sich für dieses Modell die Response der S-Variation ausrechnet, liefern Gl.(12) und (10) aus den beobachteten Koeffizienten A_n^m und a_n^m deren anomale Anteile ΔA_n^m und Δa_n^m .

Die Hypothesen 1 bis 3 sollen nun mit Daten überprüft werden. Hierzu gibt es drei große S-Analysen: die von Malin und Parkinson für das IGY 1957/58 und die von Winch für 1964/65. Gewählt wurde diejenige von Parkinson, da er die Kugelfunktionsentwicklungen monatsweise mit den Mittelwerten der jeweils fünf ruhigen Tage durchgeführt hat. Da sich die Quellenstruktur von S stark mit der Jahreszeit verändert, ist es unklar, wie sich eine Mittlung über das ganze Jahr, wie sie Malin und Winch vorgenommen haben, auf etwaige anomale Anteile auswirkt.

Tabelle 1 enthält Parkinsons Entwicklungskoeffizienten im Mittel über die sechs Monate der September-Äquinoktien 1957 und 58, und zwar für die zweite Harmonische des Tagesganges mit $m=2$ und einer Periode von 12h.

Parkinson hat in jeder Teilsumme (s. Gl.1 und 2) vier Terme berechnet, also insgesamt 12 Koeffizienten für jede Harmonische aus Beobachtungen an etwa 40 weltweit verteilten Observatorien. Die drei im Betrag größten Potentialkoeffizienten sind in der Tabelle unterstrichen.

Tabelle 1 Entwicklungskoeffizienten der 12 h-Harmonischen des Tagesganges der September-Äquinoktien 1957/58 nach Parkinson (1977, Tabelle VT auf S. 42), in 1/100 nT.

n	A_n^2	B_n^2	C_n^2
1	—	58 - 13i	—
2	<u>164 - 467i</u>	-38 + 23i	—
3	<u>-876 - 214i</u>	<u>15 - 219i</u>	-12 + 26i
4	- 9 - 30i	-13 + 78i	-39 + 32i
5	38 + 79i	—	-10 + 102i
6	—	—	15 - 7i
n	a_n^2	b_n^2	c_n^2
1	—	20 + 30i	—
2	- 26 - 112i	-94 - 54i	—
3	-718 + 113i	-64 - 126i	67 - 48i
4	-101 - 94i	-12 + 84i	-32 + 93i
5	88 + 78i	—	-26 + 31i
6	—	—	0 - 135i

Nach Hypothese 1 wird nun zunächst für jeden Term eine Eindringtiefe nach Gl.(5) bestimmt. Sie stehen in Tabelle 2 hinter den zu erwartenden Modelleindringtiefen für den jeweiligen Grad n der Kugelfunktion und das 3-schalige Erdmodell in Abb.1.

Man erkennt, daß nur die drei unterstrichenen Hauptterme einigermaßen sinnvolle Werte liefern, daß also die Hypothese eines globalen sphärischen Erdmodells nur auf diese Terme anwendbar ist und auch hier eigentlich nur auf den führenden Term A_3^2 .

Tabelle 2 Eindringtiefen C_n der zweiten S-Harmonischen, in km.

n	Erdmodell	A	B	C
1	537 -282i	—	694 +1803i	—
2	535 -273i	<u>208 -132i</u>	259 + 59i	—
3	530 -261i	<u>395 -165i</u>	<u>293 - 175i</u>	-1329 + 755i
4	524 -246i	1211 -709i	342 - 8i	216 + 582i
5	516 -228i	263--110i	—	69 + 47i
6	506 -209i	—	—	523 -1121i

Hypothese 2 ist anhand der Tabelle 1 leicht zu prüfen. Nach Gl.(8) sollten die Koeffizienten von Z bis zu siebenmal größer sein als diejenigen des Potentials, außerdem umgekehrt im Vorzeichen. Beides trifft auch nur näherungsweise nirgends zu. Alle Terme enthalten also äußere und innere Anteile, diese aber offensichtlich mit deutlichen anomalen Anteilen.

Zur Prüfung von Hypothese 3 ist nun die Vorgabe eines Erdmodells notwendig. Abb.1 zeigt rechts oben das gewählte Modell zusammen mit seiner C-Response. Es entstammt der Dst und Sq Analyse mit Daten von küstenfernen europäischen Observatorien. Näheres steht im Landolt-Börnstein: Schmucker, 1984; Tabellen 6 und 7 auf S. 111/112, Datensatz "SCH"; zur Modellrechnung vgl. Abschnitt 2.3.1.7, Modell SCH (1).

Tabelle 3 enthält das Ergebnis der Rechnungen für die drei im Betrag größten Koeffizienten. Um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, sind sie zusätzlich zu den bisher behandelten September-Äquinoktien SE auch für die März-Äquinoktien ME sowie den nördlichen und südlichen Sommer NS und SS durchgeführt worden. In der ersten Spalte stehen die nach Gl.(11) berechneten äußeren Potentialanteile $(A_{n,e}^m, \dots)$, in der zweiten die mit dem Erdmodell berechneten inneren Normalanteile $(Q_n \cdot A_{n,e}^m)$ und in der letzten Spalte die nach Gl.(12) berechneten inneren anomalen Anteile (ΔA_n^m) .

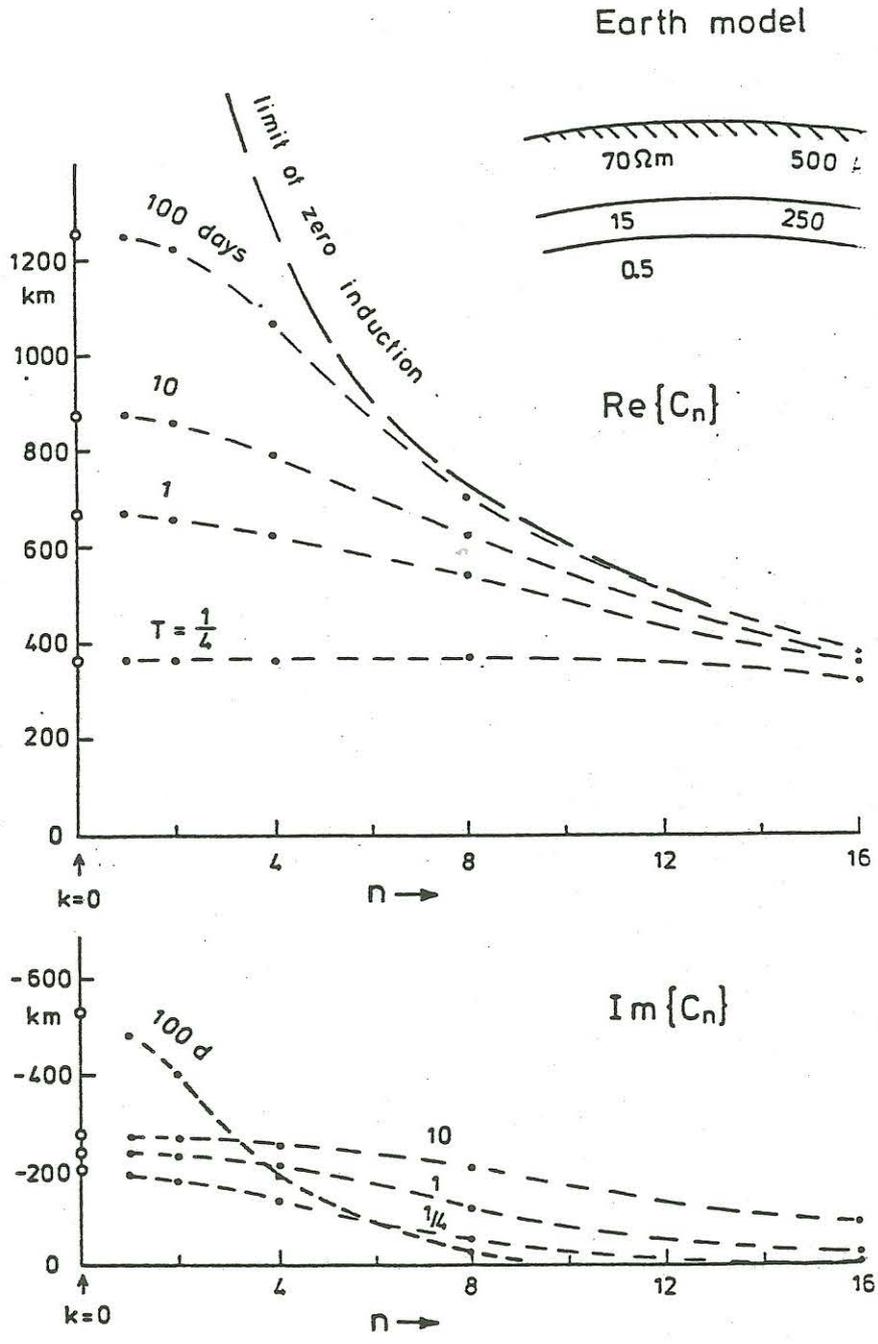


Abb. 1

Tabelle 3 Zerlegung der Potentialkoeffizienten des Tagesganges im IGY für vier Jahreszeiten, in 1/100 nT .

Koeffi- zient	Jahres- zeit	Äußerer Anteil	Innerer Normal- anteil	Innerer anomaler Anteil
A_2^2	SE	93 -303i	71 -117i	0 -47i
	ME	143 - 22i	63 + 6i	31 -27i
	NS	-99 -321i	-9 -146i	5 -63i
	SS	151 +198i	42 + 99i	27 - 9i
A_3^2	SE	-603 -106i	-219 -123i	-54 +15i
	ME	-671 - 70i	-250 -118i	-47 +39i
	NS	-525 -146i	-184 -128i	-62 + 6i
	SS	-523 -166i	-179 -135i	-34 -13i
B_3^1	SE	- 1 -143i	20 - 55i	- 4 -21i
	ME	24 -158i	31 - 38i	-37 +52i
A_4^2	NS	-120 - 25i	- 37 - 27i	28 + 8i
	SS	87 2i	29 + 15i	-10 - 4i

In Tabelle 3 ist eine gewisse Reproduzierbarkeit des anomalen Anteils von Jahreszeit zu Jahreszeit durchaus zu erkennen, insbesondere im führenden A_3^2 -Term. Bei den anderen Termen ist zu berücksichtigen, daß auch ihre äußeren Anteile stark mit den Jahreszeiten wechseln, was sich wegen der veränderten Quellfeldstruktur auf ihre anomalen Anteile auswirken könnte.

Die Prüfung der Hypothese 3 ist also erfolgversprechend verlaufen. Um abschließend noch zu sehen, ob die abgetrennten anomalen inneren Anteile auch physikalisch einigermaßen sinnvoll sind, wurden die zugehörigen äquivalenten Stromsysteme berech-

net, und zwar in der Summation über die drei verfügbaren Sq-Harmonischen der Parkinson'schen Analyse. Abb.2 zeigt das Ergebnis für die September-Äquinoktien. Als Zeitpunkt der Darstellung wurde 0 h Weltzeit gewählt, weil dann der südliche Sq-Wirbel über dem Stillen Ozean liegt und der nördliche nahe den asiatischen Landmassen.

Die linke Karte zeigt zu dem genannten Zeitpunkt das äquivalente Stromsystem des äußeren Anteils, die rechte Karte das Stromsystem des inneren Anteils insgesamt und die untere Karte das Stromsystem des davon abgetrennten anomalen Anteils. In der linken und rechten Darstellung, die aus der Arbeit von Parkinson kopiert sind und außer den genannten Harmonischen auch die jeweiligen Absolutterme enthalten, fließen zwischen den Stromlinien 25 und 20.9 kA in dem angezeigten Richtungssinn. Die Zahlen in der Wirbelmitte beziehen sich auf den Gesamtstrom. In der unteren Darstellung, die ich Nils Olsen verdanke, fließen zwischen den Stromlinien nur 10 kA.

Nach dieser Darstellung scheint der nach Hypothese 3 bestimmte anomale Potentialanteil sinnvoll zu sein. Auf der ozeanbedeckten Südhalbkugel verstärkt das anomale Stromsystem den normalinduzierten Anteil, möglicherweise durch zusätzliche Induktion in den Ozeanen, auf der kontinentalen Nordhalbkugel ist es umgekehrt. Einschränkend ist aber darauf zu verweisen, daß Parkinson seine Analyse mit vergleichsweise nur wenigen Observatorien auf der Südhalbkugel durchgeführt hat und daß Versuche, die hier beschriebenen Ergebnisse mit den Koeffizienten der Malinschen und Winchschen Analyse zu reproduzieren, erfolglos verliefen. Es verbleiben also Zweifel, wie weit die Kugelfunktionsentwicklung von S durch die Lage der gewählten Observatorien und den Ansatz der Analyse beeinflusst wird.

Literatur

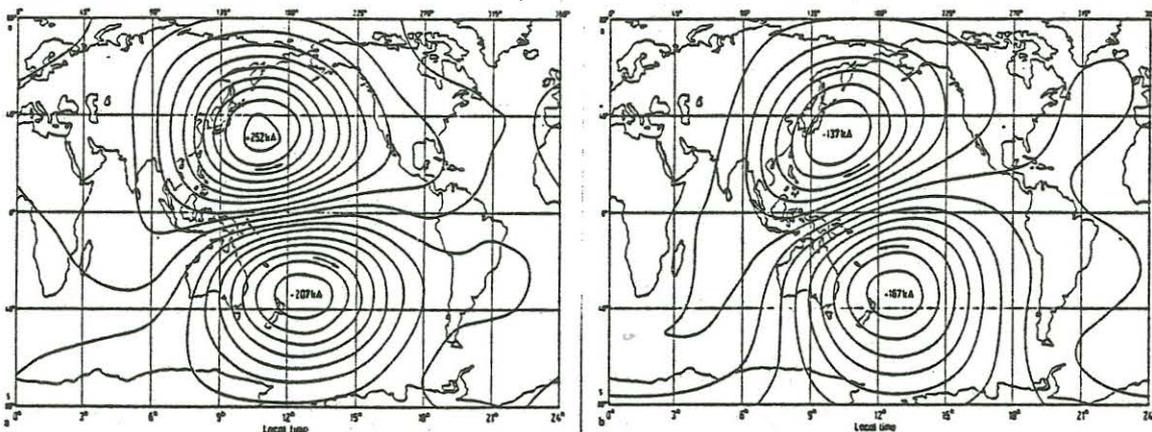
- Fanslau, G.: The use of range-differences for the interpretation of conductivity anomalies. Phys. Earth Planet. Int. 1, 177-180, 1968.
- Kendall, P.C. and D.A. Quinney: Induction in the oceans. Geophys. J.R. astr. Soc. 74, 239-255, 1983 - mit ausführlichen Literaturhinweisen.

Parkinson, W.D.: An analysis of the geomagnetic diurnal variation during the International Geophysical Year. Bulletin 173, Bureau of Mineral Resources, Geology and Geophysics, Australien Government Publishing Service Canberra, 1977.

Schmucker, U.: Erdmagnetische Tiefensondierung in Deutschland 1957-59. Magnetogramme und erste Auswertung. Abhandl. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Beiträge zum Internationalen Geophysikalischen Jahr No. 5, 1959.

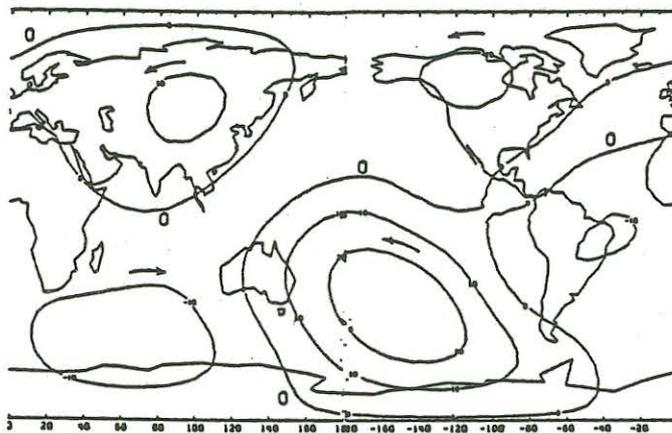
Schmucker, U.: Anomalies of geomagnetic variations in the Southwestern United States. Vol. 13, Bulletin Scripps Institution of Oceanography, La Jolla, California, 1970.

Schmucker, U.: Magnetic and electric fields due to electromagnetic induction by external sources; depth distribution of the electrical conductivity. In: Landolt-Börnstein, New Series Vol. V 2b, Springer Berlin, 1985.



Äußerer Anteil

Innerer Anteil



Anomaler innerer Anteil

Abb.2: Äquivalente Stromsysteme