

Grundlagen neuerer Inversionsmethoden und ihre Anwendung auf 1-D Inversion in der Magnetotellurik

Mauricio Miguel Martínez
Freie Universität Berlin *

Die Interpretation von ρ , Kurven mit 1-D Modellen stellt ein nicht lineares Inversionsproblem dar. Um diese Aufgabe zu erledigen habe ich zwei Optimierungsverfahren, die gezielte Zufallssuche und das M-Fitting Verfahren, angewandt.

1 Die gezielte Zufallssuche

Die gezielte Zufallssuche beinhaltet Eigenschaften aus Montecarlo-, Evolutionsstrategie- und Simplexverfahren. Aus Montecarlo stammt die Arbeit mit zufallsgesteuerten Modellen, aus der Evolutionsstrategie das Kriterium von Mutation und Selektion und aus dem Simplex die Möglichkeit der Beschränkung des Arbeitsparameterraumes und die Arbeitsweise mit einer Untermenge mit der Anzahl der Parameter plus ein Element.

Der Algorithmus wurde von Price (1977) entwickelt. Der erste Schritt ist die Anlegung von Intervallgrenzen für jeden Parameter, so daß ein erlaubter Parameterraum definiert wird. Hier besteht die Möglichkeit auch a-priori Information mitwirken zu lassen. Da die Werte der Parameter innerhalb der Grenzen zufällig ausgewählt werden, kann man mit der Anwendung diverser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (Gleich-, Normal-, Lognormal-, Poissonverteilung, etc.) die Topologie des Parameterraumes beschreiben.

Nach der Festlegung des erlaubten Parameterraumes werden L Punkte zufällig ausgewählt. Je größer L ist, desto erschöpfender wird die Suche nach dem globalen Minimum sein.

*Institut für Geophysikalische Wissenschaften, Hochschulgelände Lankwitz, Haus N, Malteserstr. 74-100, 1000 Berlin 46

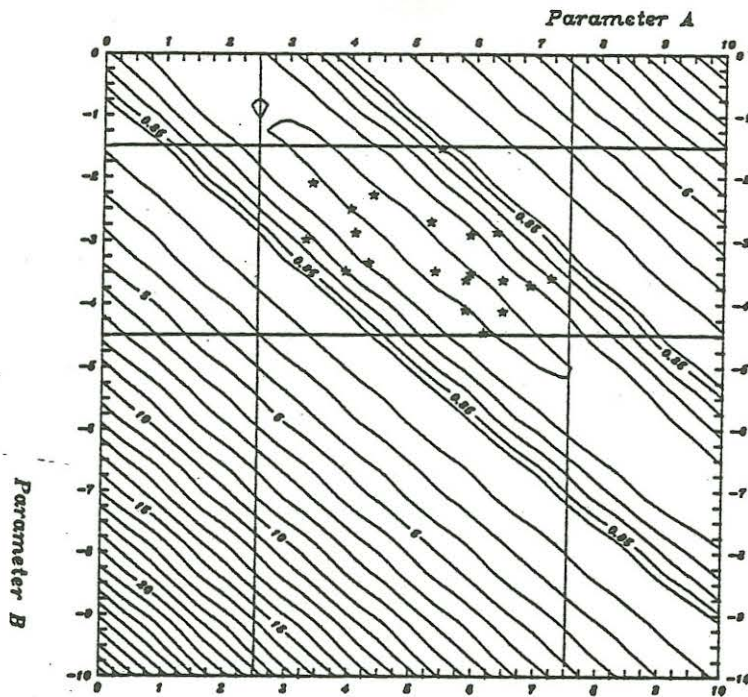


Abbildung 1: Zweidimensionaler Parameterraum: Parameter A ist zwischen 2.5 und 7.5 begrenzt; Parameter B zwischen -1.5 und -4.5. Die Isolinien zeigen den Abstand zwischen der Lösung und den Meßdaten, $L = 20$ Punkte. Die Werte der Parameter wurden mit Hilfe einer Gleichverteilung ausgewählt.

Für die Fortsetzung der Suche wird ein Mutations- und Selektionskriterium definiert. Die Mutationen werden mit Hilfe eines zufälligen ausgewählten Simplex (eine Menge von Punkten mit der Anzahl der Parameter plus ein Element) aus der folgende Gleichung bestimmt :

$$p^* = 2 \cdot g^* - r_{M+1}^* \quad (1)$$

wobei M die Anzahl der Parameter ist, in p^* die Koordinaten eines Vergleichspunktes, in g^* die Koordinaten des Schwerpunktes der ersten M Punkte, und in r_{M+1}^* die Koordinaten des $(M + 1)$ -ten Punktes gespeichert sind. Auf den Vergleichspunkt p^* werden jetzt die Selektionskriterien angewendet.

- Er muß innerhalb des erlaubten Parameterraumes liegen.
- Er soll einen niedrigeren Funktionswert als der Funktionswert des Punktes q^* (*Maximum*) haben.

Erfüllt der Punkt p^* diese Bedingungen, wird er gegen den Punkt q^* ausgetauscht und eine neue Iteration wird gestartet.

Die Iterationen werden wiederholt bis entweder ein Punkt der L Suchpunkte oder alle L Suchpunkte einen niedrigeren Funktionswert haben als eine vorher festgelegte Toleranz. Diese Toleranz kann normalerweise mit dem

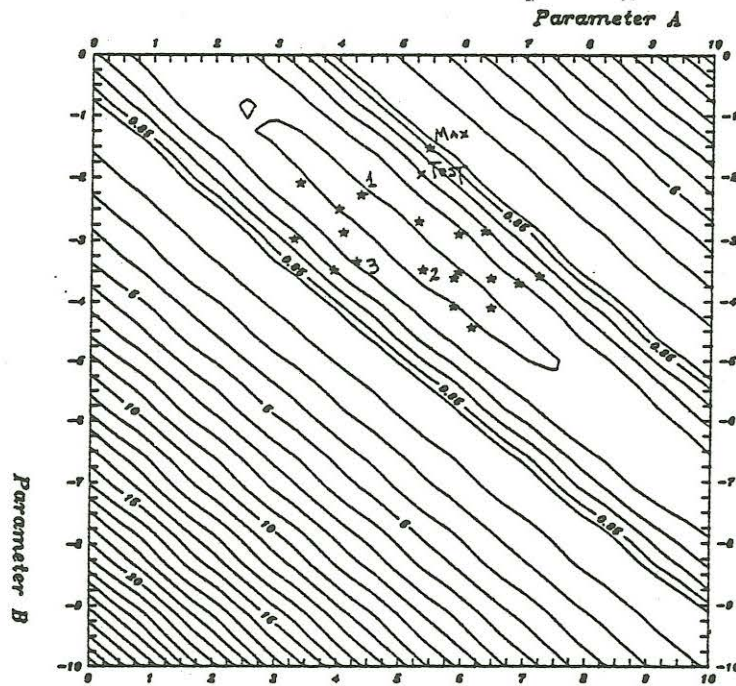


Abbildung 2: Der Simplex besteht aus den Punkten 1, 2 und 3. Die Punkte 1 und 2 wurden zur Berechnung von g^* benutzt. Der Punkt Test ist der Punkt p^* und der Punkt Max ist der Punkt q^* .

Rauschniveau der Daten in Verbindung gebracht werden. Die Kovarianzmatrix C der Parameter kann direkt berechnet werden, ohne Linearität in der Nähe der Schätzung annehmen zu müssen, und sie kann nach der folgenden Gleichung berechnet werden, wobei c_{ij} die Elemente der Kovarianzmatrix C der Parameter sind, p_{ik}^* die k -te Schätzung der i -ten Parameter, und p_i^* die beste Schätzung der i -ten Parameter sind.

$$c_{ij} = \frac{1}{L-1} \sum_{k=1}^L (p_{ik}^* - p_i^*)(p_{jk}^* - p_j^*) \quad (2)$$

p_i^* wird nach der folgenden Gleichung berechnet.

$$p_i^* = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L p_{ik}^* \quad (3)$$

Die Kovarianzmatrix C kann normiert werden, um die Korrelationsmatrix R zu gewinnen. Die Elemente der Korrelationsmatrix R werden wie folgt berechnet.

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} \cdot c_{jj}}} \quad (4)$$

2 Das M-Fitting Verfahren

Die Methode der kleinsten Quadrate bezieht sich auf die folgenden Definitionen der Statistik : x sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$, dann heißt, das i -te Moment von x :

$$\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x) dx \quad (5)$$

und das i -te zentrale Moment von x :

$$\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^i f(x) dx \quad (6)$$

wobei für die Methode der kleinsten Quadrate das erste Moment α_1 (der Erwartungswert) und das zweite zentrale Moment μ_2 (die Varianz oder Dispersion) von besondere Bedeutung sind.

$$\alpha_1 = E\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (7)$$

$$\mu_2 = V\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\{x\})^2 f(x) dx \quad (8)$$

Der Erwartungswert $E\{x\}$ ist ein Maß für das Zentrum der Verteilung. Die Wurzel aus der Varianz $V\{x\}$ heißt Streuung oder Standardabweichung und wird mit σ bezeichnet. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Verteilung um den Erwartungswert. Die Methode der kleinsten Quadrate minimiert die Varianz bzw. die Streuung der Meßdaten um ein Modell, das die Rolle des Erwartungswertes übernimmt. Wenn Ausreißer in den Meßdaten anwesend sind, wird die Streuung stark beeinflusst, und die Schätzung nach dem kleinsten Quadrate wird falsch liegen, weil die angenommene Normalverteilung der Fehler zerstört wurde.

Um der Einfluß von Abweichungen oder Störfaktoren der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Fehler in den Daten zu minimieren, entwickelte Steiner(1980) das M-Fitting Verfahren (*The most frequent value Fitting*) oder die Anpassung nach dem häufigsten Wert. Der Erwartungswert wird so erweitert, daß er jetzt auch eine Gewichtsfunktion $G(x)$ beinhaltet.

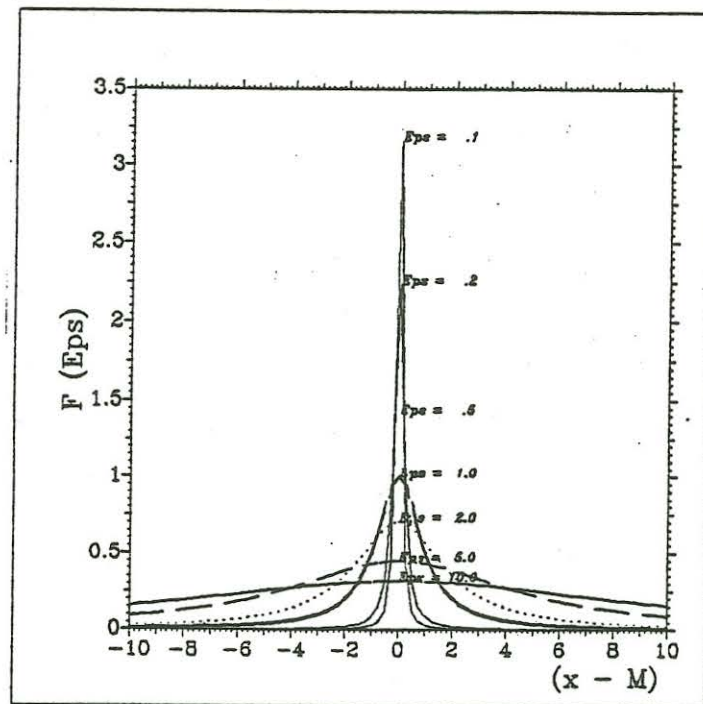


Abbildung 3: Funktion $F(\epsilon)$ in Abhängigkeit der Abweichung $(x - M)$ und der „tuning“ Konstante ϵ , für $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x) dx} \quad (9)$$

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(x - M)^2 + \epsilon^2} \quad (10)$$

Weil in der Definition des häufigsten Wert M dieser selbst enthalten ist, soll er mit Hilfe eines iterativen Verfahrens gefunden werden. Der optimale Wert für die „tuning“ Konstante ϵ wird aus der folgenden Bedingung abgeleitet :

$$F(\epsilon) = \epsilon^3 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x) dx \right]^2 = \text{Maximum} \quad (11)$$

So wird erreicht, daß die Gewichtsfunktion $G(x)$ mit den größten Werten der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ multipliziert wird. Die Punkte mit kleineren Abweichungen werden in jeder Iteration bei der Berechnung der Schätzung der Parameter eine größere Rolle spielen, als die Punkte mit größeren Abweichungen. Die Anwesenheit von Ausreißern in den Daten zerstört die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Fehler in den Daten. Mit der adaptiven Berechnung der Gewichtsfunktion $G(x)$ wird eine Art Korrektur der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion vorgenommen, so daß die meisten Werten mit niedrigeren Abweichungen, oder die häufigsten Werte (most frequent), die Schätzung bestimmen.

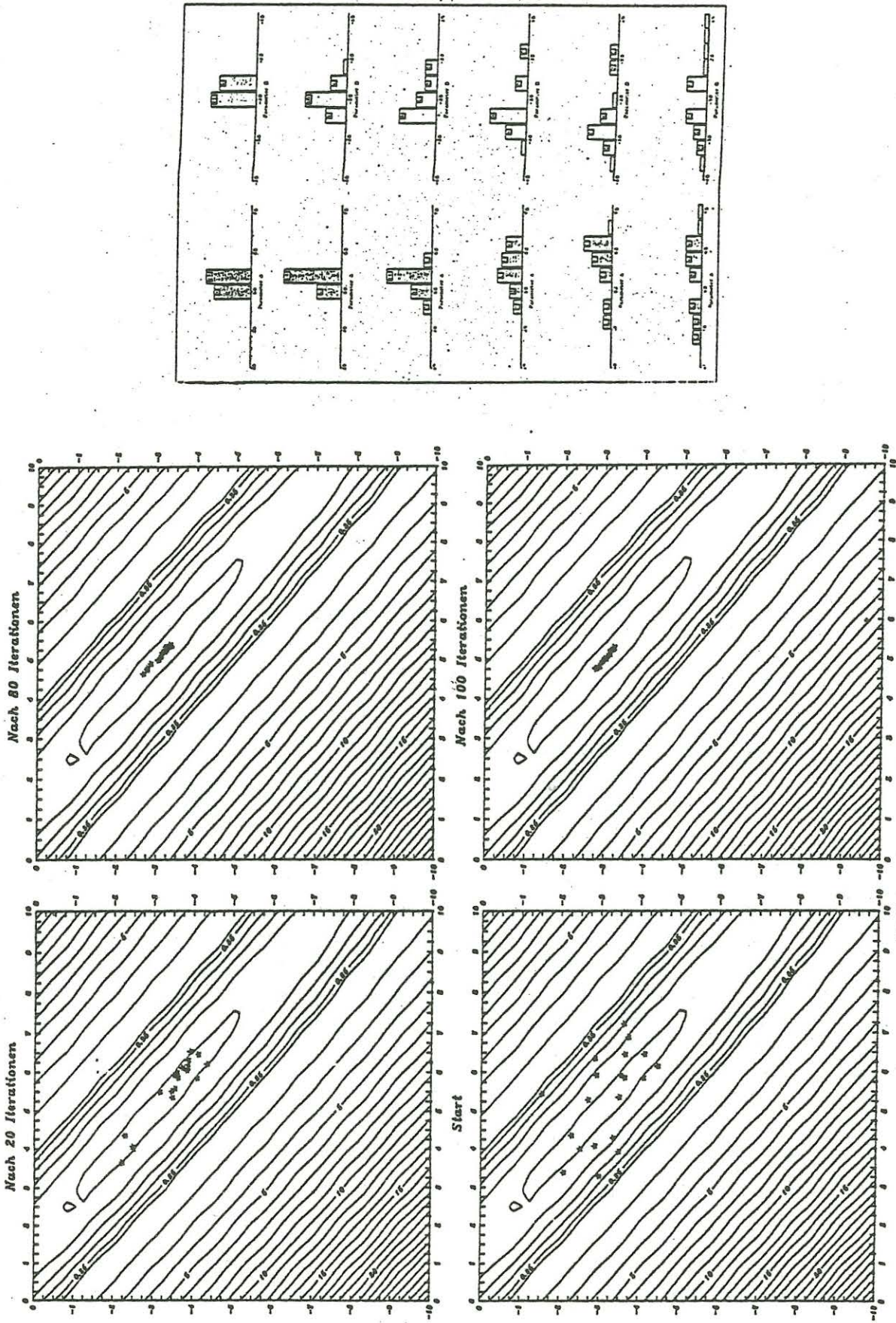


Abbildung 4: Die vier Isolinien-Diagramme links zeigen die Entwicklung der 20 Suchpunkte im Parameterraum, und wie sie auf den Weg zum Minimum die Topologie des Parameterraumes „erkennen“. Das Bild rechts zeigt Häufigkeitsdiagramme der Parameter A und B innerhalb der Intervallgrenzen nach jeweils 20 weiteren Iterationen; unten die Startsituation und oben nach 100 Iterationen.

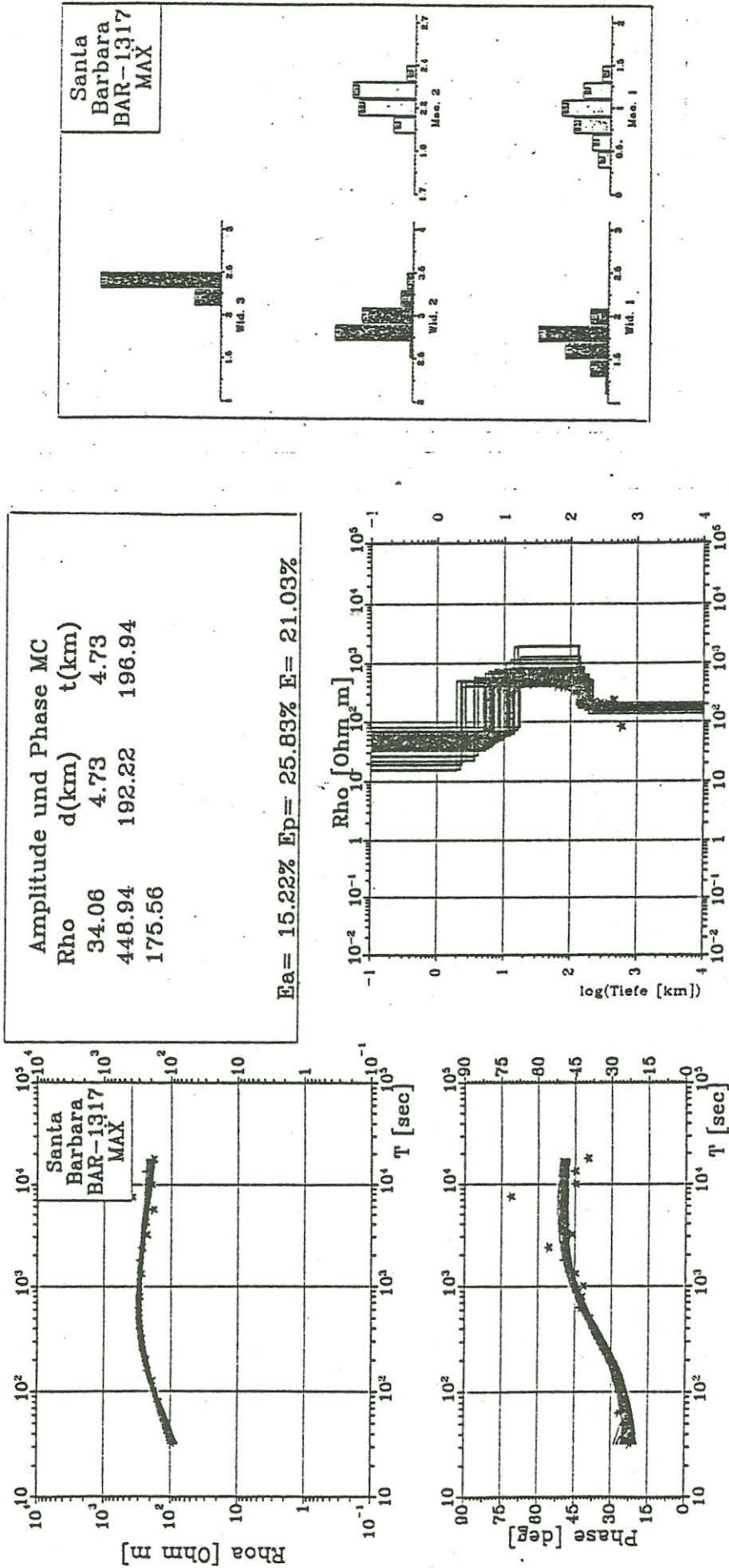


Abbildung 5: Interpretation einer ρ , Kurve (Bolivien 1984) mit einem 3-Schichten Modell nach der gezielten Zufallsuche mit 50 Suchpunkten: Rechts Häufigkeitsdiagramme des Widerstandes und der Mächtigkeit jeder Schicht am Ende der Suche.

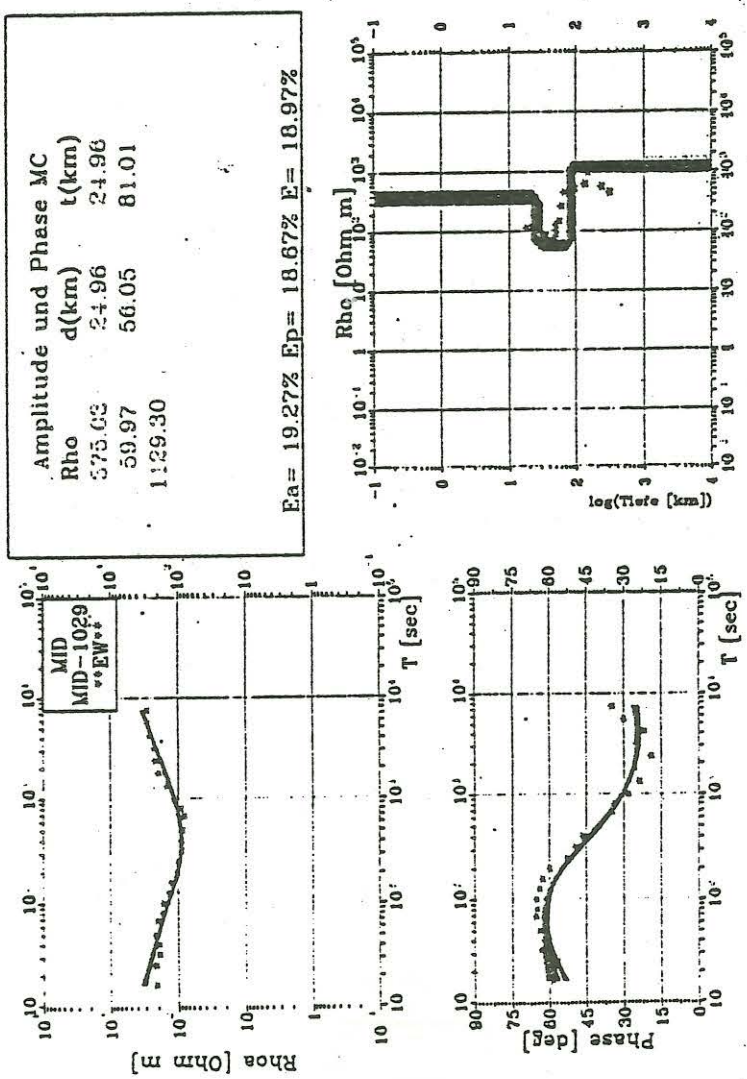
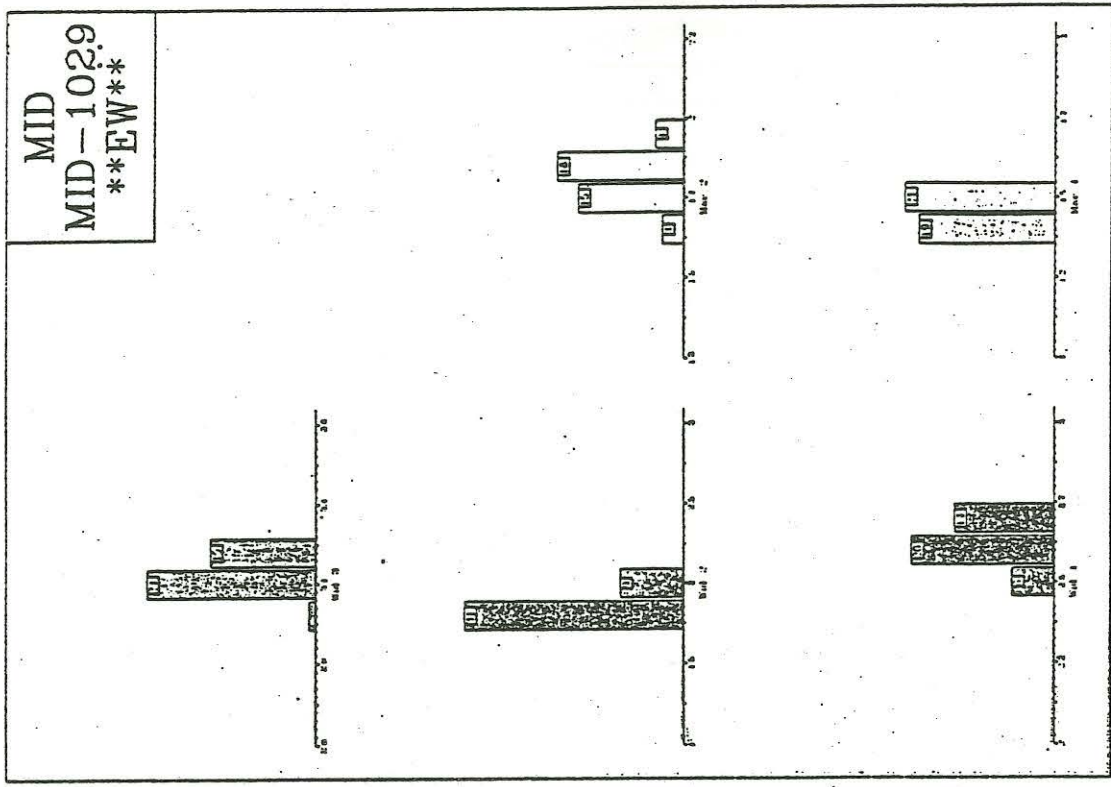


Abbildung 6: Interpretation einer ρ , Kurve (Marokko 1982) mit einem 3-Schichten Modell nach der gezielten Zufallsuche mit 50 Suchpunkten: Rechts Häufigkeitsdiagramme des Widerstand und der Mächtigkeit jeder Schicht am Ende der Suche.

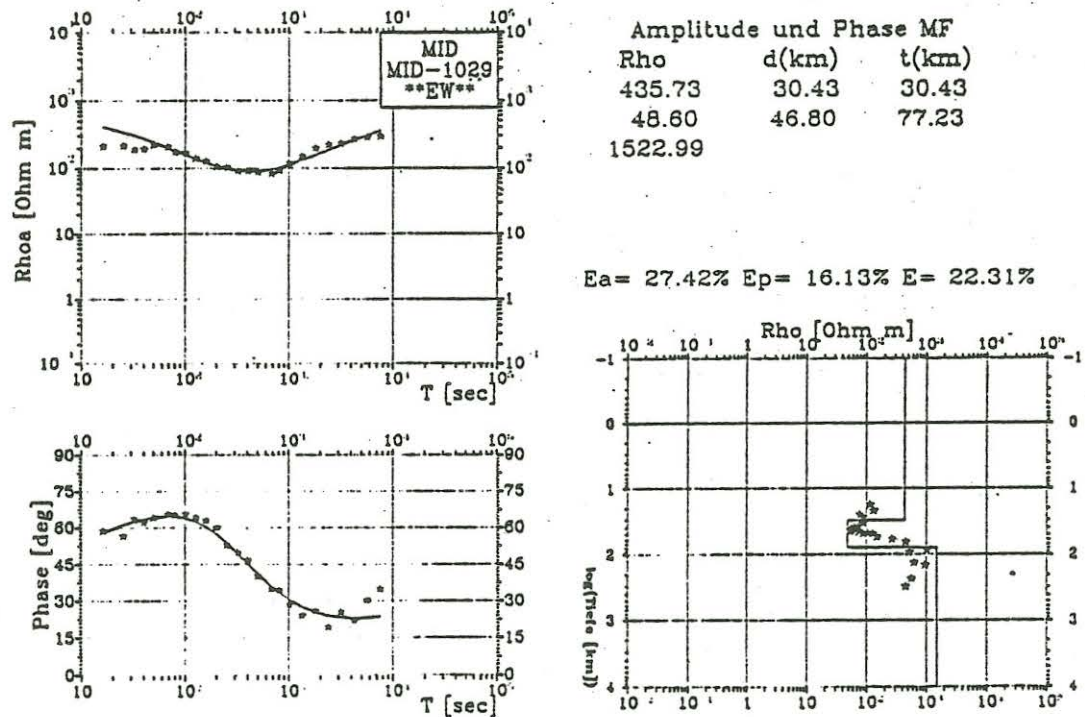
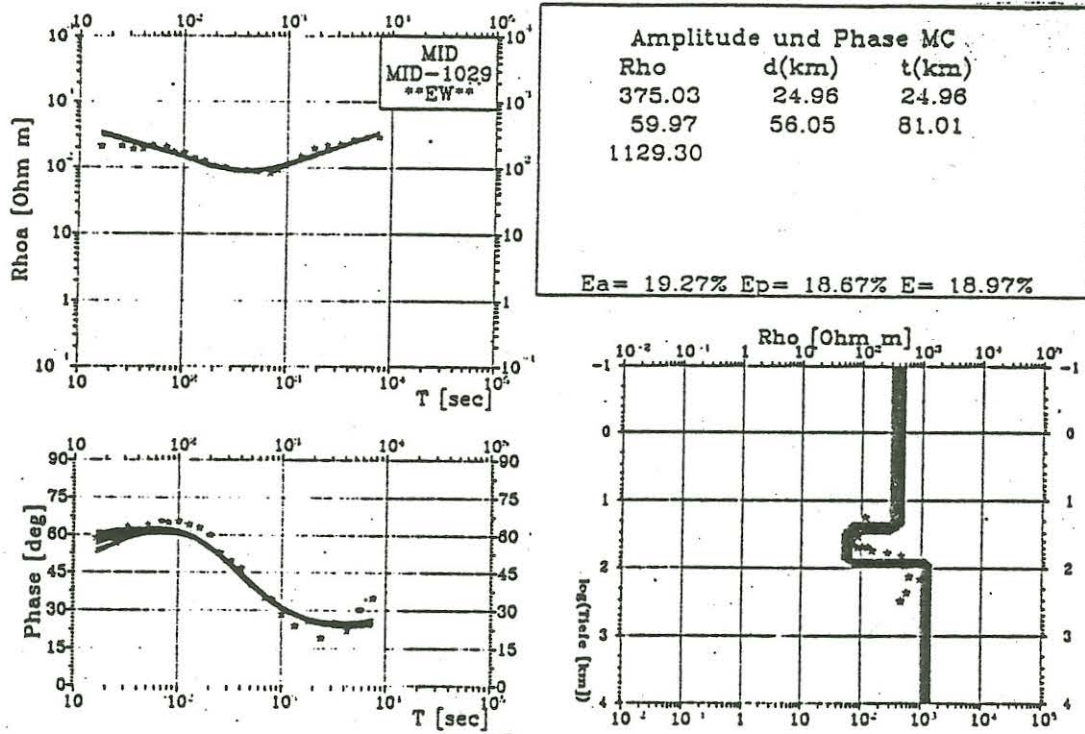
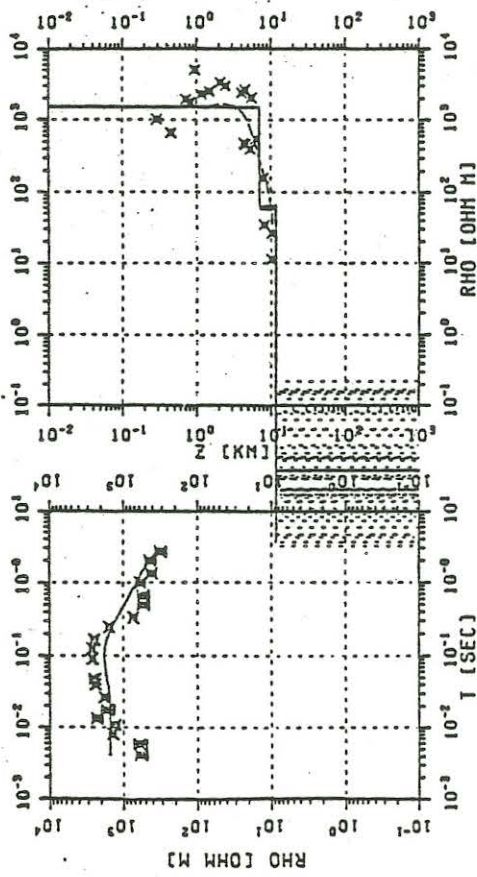


Abbildung 7: Oben: Interpretation nach der gezielten Zufallssuche; unten: Interpretation nach M-Fitting; Startmodell aus der gezielten Zufallssuche.

BEIDL GEOMETRA RHO YX

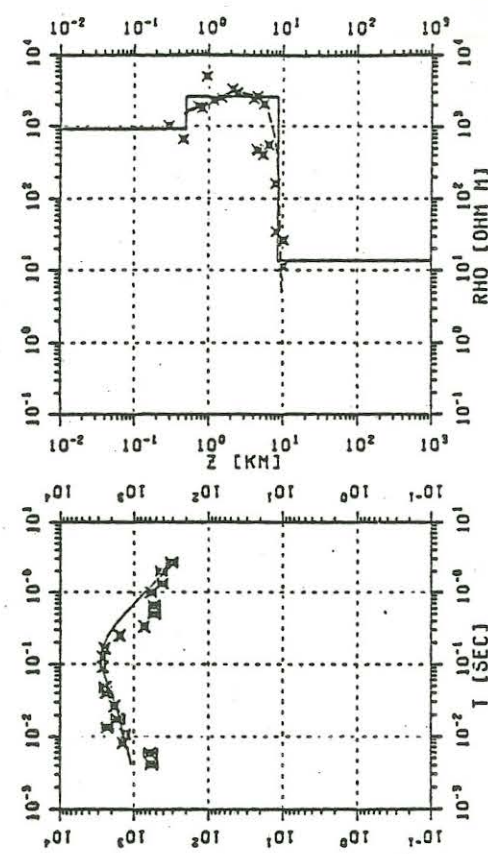
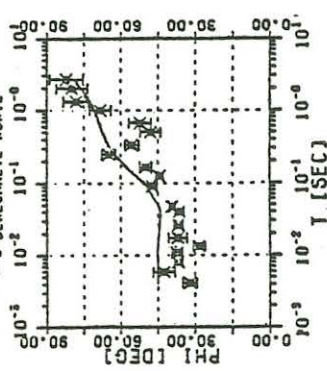
BEIDL GEOMETRA RHO YX



x = BEOBSCHTETE DATEN
- = BERECHNETE KURVE

MONTE CARLO MODELL (53.6Z)
RHO (OHM M) 1519.59
MAE (KHM) 63.48
TIEFFE (KM) 7.89
RHO (OHM M) 4.60
MAE (KHM) 11.88
TIEFFE (KM) 11.88

x = BEOBSCHTETE DATEN
- = BERECHNETE KURVE



x = RHO(z=1)
- = BERECHNETES MODELL

M-FITTING MODELL (26.1Z)
RHO (OHM M) 821.57
MAE (KHM) 2602.68
TIEFFE (KM) 13.62
RHO (OHM M) 6.07
MAE (KHM) 8.07
TIEFFE (KM) 8.57

x = BEOBSCHTETE DATEN
- = BERECHNETE KURVE

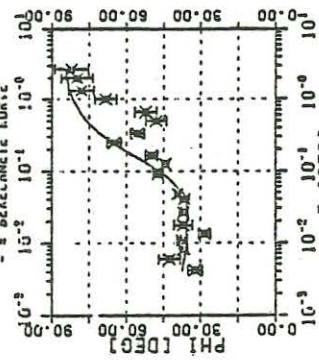


Abbildung 8: Links: Interpretation einer ρ , Kurve (KTB 1986) nach der gezielten Zufallsuche mit 50 Suchpunkten und a priori Information (guter Leiter in etwa 10 km Tiefe); rechts: Interpretation nach M-Fitting; Startmodell aus der gezielten Zufallsuche.

Literatur

- [1] W. L. Price: 1977 *A controlled random search procedure for global optimization*. The Computer Journal 20 pp. 367-370.
- [2] F. Steiner: 1980 *M-Fitting (Fitting according to the most frequent value) and its comparison with the method of Least Squares*, Acta Geodaetica Geophysica et Montanistica Acad. Sci. Hung. Tomus 15 (1) pp. 37-44.