

Fred Fieberg

# Elektromagnetische Induktion im horizontal geschichteten Raum mit 2 eingelagerten Halbplatten bei horizontaler Dipolanregung

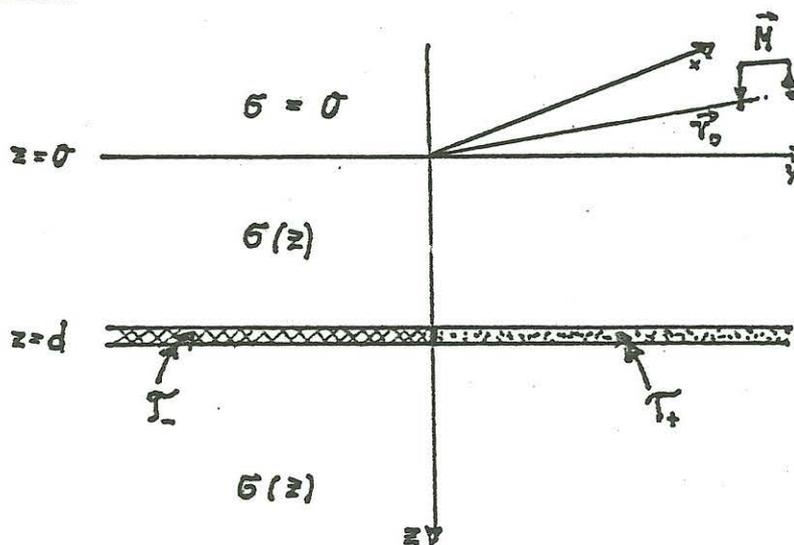
## 1 Einleitung

In diesem Artikel sollen die Grundzüge einer Modellrechnung skizziert werden, mit der ich mich im Rahmen meiner Diplomarbeit beschäftige. Es handelt sich dabei um eine einfache 2-dimensionale Leitfähigkeitsstruktur ( nämlich einen 1-D geschichteten Halbraum in den 2 dünne Halbplatten eingelagert sind) bei einer 3-D Dipolanregung, wie sie etwa in der aktiven Audiomagnetotellurik oder bei Transientenverfahren verwandt wird. Das Ziel dabei ist, mit analytischen Methoden möglichst weit zu kommen und den numerischen Aufwand so in Grenzen zu halten. Eine mögliche Anwendung dieses Modells wäre die Untersuchung, in welcher Weise sich die (verschiedenen!) Untergründe unter Sender und Empfänger bei den aktiven Methoden auf die Messungen auswirken.

## 2 Das Modell

Im Folgenden soll ein horizontal geschichteter Halbraum betrachtet werden, in dem in der Tiefe  $z=d$  als Anomalie 2 dünne, ebenfalls horizontale Halbplatten mit unterschiedlichen integrierten Leitfähigkeiten  $\tau_-$  bzw.  $\tau_+$  liegen. Die Anregung erfolgt durch einen horizontalen Stromdipol der Stärke  $\vec{M} = I_0 e^{i\omega t} \vec{l}$  am Ort  $\vec{r}_0$ . Eine Erweiterung auf andere anregende Dipole ist leicht möglich.

Bild 1: Das Modell



Ausgangspunkt sind die Maxwell'schen Gleichungen (mit den üblichen Vernachlässigungen  $\vec{D} \approx 0$ ,  $\mu \approx \mu_0, \dots$ ) und das Ohmsche Gesetz :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}^s \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

wobei die Quellströme gegeben sind durch:

$$\vec{j}^s = I_0 e^{i\omega t} \vec{l} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) =: \vec{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Daraus erhält man in gewohnter Weise zur Lösung des Problems:

- dort wo die Leitfähigkeitsverteilung  $\sigma(z)$  stetig ist <sup>1</sup> die Induktionsgleichung:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu_0 (\sigma \vec{E} + \vec{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) \quad (4)$$

- dort wo die Leitfähigkeitsverteilung unstetig ist die bekannten Sprungbedingungen für die elektromagnetischen Felder:

1. Die Tangentialkomponenten des E-Feldes sind stetig <sup>2</sup>

$$[\vec{E}_{\text{tang}}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (5)$$

2. Die Tangentialkomponenten des H-Feldes <sup>3</sup> springen wie die Flächenströme:

$$[\vec{n} \times \vec{H}]_{\pm}^{\pm} = \vec{J}_{\text{fläche}} \quad (6)$$

Bemerkung: Flächenströme treten wegen der "Dünne-Schichten" -Näherung auf, hier also an den eingelagerten Platten (Index "s" für "Schicht"):

$$\vec{J}_s = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ 0 \end{pmatrix} := \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \sigma \vec{E}_s dz \approx \vec{E}_s \int_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \sigma dz = \tau(x, y) \vec{E}_s$$

mit  $E_s = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$

<sup>1</sup> allgemeiner: dort, wo die Felder hinreichend stetig und differenzierbar sind

<sup>2</sup> Def.:  $[f(z)]_{\pm}^{\pm} := f(z+0) - f(z-0)$

<sup>3</sup> Ein Vektor mit "Dach" bezeichnet im Folgenden immer einen Einheitsvektor,  $\vec{n}$  also einen Normaleneinheitsvektor



Dieses aufgespaltene  $\vec{E}$  eingesetzt in die Induktionsgleichung (4) und die Sprungbedingungen (5) / (6) liefert die entsprechenden Gleichungen für das normale bzw. anomale Problem:

in  $z \neq d$ :

$$\nabla \times \nabla \times (\vec{E}_n + \vec{E}_a) = -i\omega\mu_0(\sigma(\vec{E}_n + \vec{E}_a) + \vec{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) \quad (8)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_n = -i\omega\mu_0(\sigma\vec{E}_n + \vec{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) \quad (9)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_a = -i\omega\mu_0\sigma\vec{E}_a \quad (10)$$

in  $z=d$ :

$$[\vec{E}_{s,n} + \vec{E}_{s,a}]^{\pm} = 0 \quad (11)$$

$$[\vec{E}_{s,n}]^{\pm} = 0 \quad (12)$$

$$[\vec{E}_{s,a}]^{\pm} = 0 \quad (13)$$

$$[\vec{z} \times (\vec{H}_n + \vec{H}_a)]^{\pm} = \begin{cases} \tau_+ \vec{E}_{s,n} + \tau_+ \vec{E}_{s,a} & y > 0 \\ \tau_- \vec{E}_{s,n} + \tau_- \vec{E}_{s,a} & y < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$[\vec{z} \times \vec{H}_n]^{\pm} = \tau_+ \vec{E}_{s,n} \quad \text{für } y > 0 \text{ und } y < 0 \quad (15)$$

$$[\vec{z} \times \vec{H}_a]^{\pm} = \begin{cases} \tau_+ \vec{E}_{s,a} & y > 0 \\ -(\tau_+ - \tau_-) \vec{E}_{s,n} + \tau_- \vec{E}_{s,a} & y < 0 \end{cases} \quad (16)$$

#### 4 Das Normalproblem

Wie aus Bild 2 (links) zu ersehen ist, ist dies der Fall des rein horizontal geschichteten Halbraumes. Zur Lösung des Problems sind die bekannten Standardmethoden der Zerlegung in TE- und TM- Mode anzuwenden, welche unabhängig voneinander die Gleichungen (9),(12),(15) erfüllen. Der Ansatz hierfür lautet:

$$\vec{E}_n = \frac{1}{\sigma(z)} (\nabla \times (\vec{z}\sigma(z)T_n(\vec{r})) + \nabla \times \nabla \times (\vec{z}\sigma(z)P_n(\vec{r})) - \vec{M}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) \quad (17)$$

Es ergeben sich 2 getrennte Systeme von DGL'n und Randbedingungen für  $T_n$  und  $P_n$ , zu deren Lösung üblicherweise Partialwellenansätze gemacht werden:

$$T_n(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{T}_n(s, u, z) e^{i(sx+uy)} ds du \quad (18)$$

$$P_n(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{P}_n(s, u, z) e^{i(sx+uy)} ds du \quad (19)$$

Bemerkung: Auf Grund der fehlenden Symmetrie beim anomalen Problem bleiben wir auch hier bei den kartesischen Koordinaten, bei rein horizontaler Schichtung kann man diesen Ansatz unter Ausnutzung der Zylindersymmetrie noch vereinfachen und kommt dann auf Einfachintegrale, in denen Besselfunktionen auftreten siehe z.B. [4]. Der Lösungsweg des Normalproblems soll hier nicht weiter verfolgt werden, dies würde den Rahmen dieser kurzen Ausarbeitung sprengen. Es sei auf entsprechende Lehrbücher verwiesen.

Am Ende sind alle Partialwellenamplituden  $\hat{T}_n(s, u, z)$ ,  $\hat{P}_n(s, u, z)$  für alle  $z \in \mathfrak{R}$  bekannt, so das die Fouriertransformationen (18), (19) ausgeführt werden können. Damit sind dann alle Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder  $\vec{E}_n$  und  $\vec{H}_n$  im Prinzip berechnet, das Normalproblem also gelöst.

## 5 Das anomale Problem

Während der Normalteil alle Flächenströme in  $z=d$  berücksichtigt, die dort wegen der dünnen Platte mit der integrierten Leitfähigkeit  $\tau_+$  fließen, fasst der anomale Teil alle Wirkungen der in  $z=d, y < 0$  hierzu zusätzlich fließenden Flächenströme zusammen. Diese treten auf, da ja in  $z=d, y < 0$  eine Platte nicht mit  $\tau_+$ , sondern mit  $\tau_-$  liegt, die Abweichungen vom Normalfall sind dort also:  $\vec{J}_s = (\tau_- - \tau_+) \vec{E}_s$ .

Die zusätzlichen Ströme erzeugen im ganzen Raum ein zusätzliches  $\vec{E}$ -Feld, das Feld  $\vec{E}_a$ . Zu seiner Bestimmung sind die noch nicht verwendeten Teile der Induktionsgleichung in  $z \neq d$  und der Randbedingungen in  $z=d$  zu verwenden, also die Gleichungen (10), (13), (16), die hier ihrer Bedeutung wegen nochmals ausgeschrieben werden:

in  $z \neq d$ :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_a + i\omega \mu_0 \sigma \vec{E}_a = 0 \quad (10')$$

in  $z=d$ :

$$[\vec{E}_{s,a}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (13')$$

und

$$[\vec{z} \times \nabla \times \vec{E}_a]_{\pm}^{\pm} + i\omega \mu_0 \begin{cases} \tau_+ & y > 0 \\ \tau_- & y < 0 \end{cases} \vec{E}_{s,a} = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ i\omega \mu_0 (\tau_+ - \tau_-) \vec{E}_{s,n} & y < 0 \end{cases} \quad (16')$$

Dabei sind diese Gleichungen so umgeformt worden, daß auf der rechten Seite nur noch bekannte Grössen auftreten, nämlich die Lösungen des Normalproblems.

Zur Lösung dieses Problems wird wieder (rein formal) eine Aufspaltung in TE- und TM- Mode angesetzt, wobei aber bereits klar ist, daß diese beiden Moden keine unabhängigen Lösungen sein werden (s.u.).

$$\vec{E}_a = \frac{1}{\sigma(z)} (\nabla \times (\vec{z} \sigma(z) T_a(\vec{r})) + \nabla \times \nabla \times (\vec{z} \sigma(z) P_a(\vec{r})) - \vec{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) \quad (20)$$

Es ergeben sich 2 in  $z=d$  gekoppelte Systeme von DGL'n und Randbedingungen für  $T_a$  und  $P_a$ .

Da in  $z \neq d$  auch weiterhin nur rein horizontale Schichtungen vorliegen, können dort die DGL-Systeme entkoppelt und wie gewohnt behandelt werden: Zur Lösung dieser Probleme werden die bereits bekannten Partialwellenansätze gemacht, nun aber für den anomalen Teil:

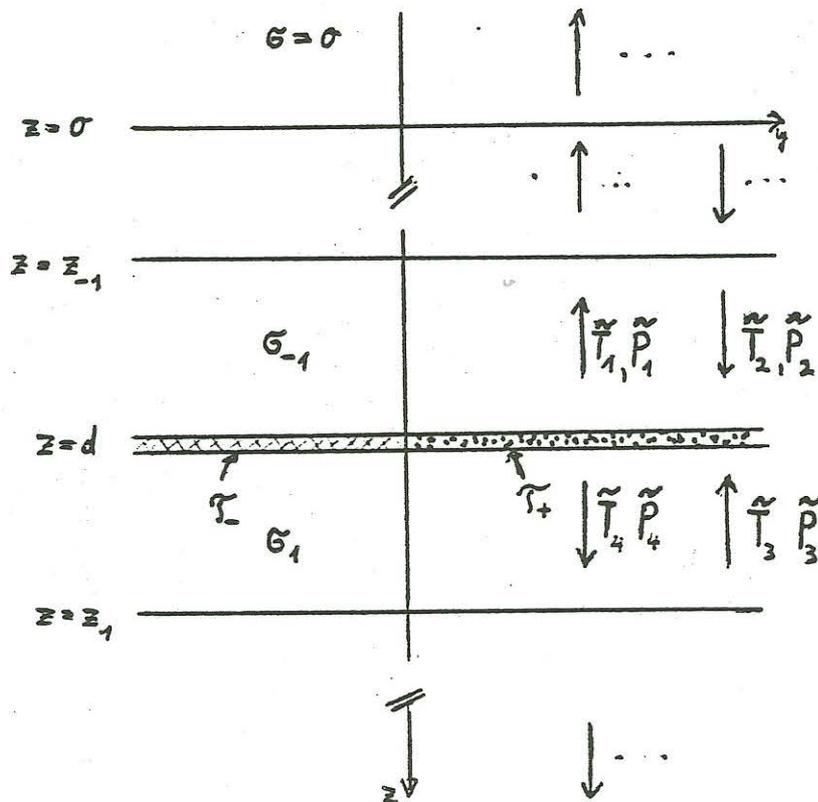
$$T_a(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}_a(s, u, z) e^{i(sx+uy)} ds du \quad (21)$$

$$P_a(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}_a(s, u, z) e^{i(sx+uy)} ds du \quad (22)$$

Die Induktionsgleichung (10) wird so in ein System algebraischer Gleichungen für die  $\hat{T}_a(s, u, z)$  und  $\hat{P}_a(s, u, z)$  verwandelt, wodurch alle auftretenden Partialwellen auf die direkt oberhalb und unterhalb von  $z=d$  vorhandenen Anteile zurückgeführt werden.

Dies soll für den Fall *homogener* Schichten in  $z \neq d$  im folgenden Bild skizziert werden.

Bild 3: Das Reflektions/Transmissions-Problem



Direkt oberhalb der Platte sind  $\hat{T}_a$  und  $\hat{P}_a$  dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}\hat{T}_a(s, u, z) &= \bar{T}_1 e^{+\alpha(z-d)} + \bar{T}_2 e^{-\alpha(z-d)} \\ \hat{P}_a(s, u, z) &= \bar{P}_1 e^{+\alpha(z-d)} + \bar{P}_2 e^{-\alpha(z-d)}\end{aligned}$$

direkt unterhalb der Platte :

(23)

$$\begin{aligned}\hat{T}_a(s, u, z) &= \bar{T}_3 e^{+\alpha(z-d)} + \bar{T}_4 e^{-\alpha(z-d)} \\ \hat{P}_a(s, u, z) &= \bar{P}_3 e^{+\alpha(z-d)} + \bar{P}_4 e^{-\alpha(z-d)}\end{aligned}$$

mit

$$\alpha : = \sqrt{s^2 + u^2 + i\omega\mu_0\sigma(z)} \quad (24)$$

$$\kappa : = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma(z)} \quad (25)$$

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i(s, u) \quad (26)$$

$$\bar{P}_i = \bar{P}_i(s, u) \quad (27)$$

Aus dem (bekannten) Verhalten der Partialwellen in  $z < d$  und  $z > d$  (Lösungen der Induktionsgleichungen dort!) lassen sich sofort die zur Platte zurücklaufenden Wellenanteile, gegeben durch die Amplituden  $\bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  zurückführen auf die von der Platte weglaufenden Anteile  $\bar{T}_1, \bar{T}_4, \bar{P}_1, \bar{P}_4$ .

Zu bestimmen bleiben also die Größe

- der von  $z=d$  nach oben laufenden Anteile der TE und der TM Mode  $\bar{T}_1$  bzw.  $\bar{P}_1$
- der von  $z=d$  nach unten laufenden Anteile der TE und der TM Mode  $\bar{T}_4$  bzw.  $\bar{P}_4$

Mit Hilfe der Randbedingung (13) können 2 dieser 4 Unbekannten auf die verbleibenden 2 zurückgeführt werden, z.B.  $\bar{T}_4 = \bar{T}_4(\bar{T}_1), \bar{P}_4 = \bar{P}_4(\bar{P}_1)$  so das nur noch  $\bar{T}_1$  und  $\bar{P}_1$  zu berechnen bleiben. <sup>4</sup>

Hierzu wird die noch nicht weiterbetrachtete, verbleibende Randbedingung (16) benutzt. Es handelt sich dabei (wie auch bei den bereits ausgenutzten) um ein vektorielle Gleichung, wir verfügen also im Prinzip über 3 Gleichungen (von denen aber nur 2 voneinander unabhängig sind) zur Berechnung von 2 Unbekannten. Wie man sich leicht überzeugt, reicht es aus, die x- und y-Komponenten von (16) zu betrachten, die z-Komponente liefert dann keine weiteren Informationen mehr.

Da diese Rechnungen das Kernstück dieser Modellrechnung sind und (anders als die bis hierher benutzten) nicht auch bei der Berechnung rein horizontaler Schichtungen vorkommen sollen sie etwas ausführlicher betrachtet werden:

<sup>4</sup> Ansatz (20, (21) und (22) eingesetzt in die RB (13) liefert für die  $\hat{T}_a$  und  $\hat{P}_a$  die Stetigkeitsforderungen:

$$[\hat{T}_a]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \left[ \frac{\partial \hat{P}_a}{\partial z} \right]_{\pm}^{\pm} = 0$$

Damit lassen sich 2 der 4 von der Platte ausgehenden Partialwellen "bestimmen"

Mit dem Ansatz (20) schreiben sich die Komponenten von (16) wie folgt:

x-Komp.:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial^2 T_n}{\partial y \partial z} - \kappa^2 \frac{\partial P_n}{\partial x}\right]_+ + i\omega\mu_0 \begin{cases} \tau_+ & (+\frac{\partial T_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial z}) \\ \tau_- & \end{cases} = \\ = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ i\omega\mu_0(\tau_+ - \tau_-)(+\frac{\partial T_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial z}) & y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

y-Komp.:

$$\begin{aligned} \left[+\frac{\partial^2 T_n}{\partial x \partial z} - \kappa^2 \frac{\partial P_n}{\partial y}\right]_+ + i\omega\mu_0 \begin{cases} \tau_+ & (-\frac{\partial T_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y \partial z}) \\ \tau_- & \end{cases} = \\ = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ i\omega\mu_0(\tau_+ - \tau_-)(-\frac{\partial T_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y \partial z}) & y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Die Ansätze (21) und (22) hierauf angewendet liefern 2 gekoppelte duale Integralgleichungssysteme für  $\tilde{T}_a(s, u, z)$  und  $\tilde{P}_a(s, u, z)$ . Setzt man hier nun nach (23) die  $\tilde{T}_{1...4}$  und  $\tilde{P}_{1...4}$  ein, eliminiert nach dem oben beschriebenen Verfahren jeweils 3 der 4 Unbekannten, so erhält man schließlich zur Bestimmung der restlichen 2 Unbekannten  $\tilde{T}_1, \tilde{P}_1$  zwei entsprechende duale, gekoppelte Integralgleichungssysteme, die auf der linken Seite außer den gesuchten Größen nur bekannte, von der Geometrie der Leitfähigkeitsverteilung bestimmte Funktionen  $\psi_{\pm}, \varphi_{\pm}$  enthalten, während die rechte Seite nur Funktionen aufweist, die sich aus der Lösung des Normalproblems ergeben.<sup>5</sup>

x-Komp.:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (iu \begin{Bmatrix} \psi_+(s, u) \\ \psi_-(s, u) \end{Bmatrix} \tilde{T}_1 - is \begin{Bmatrix} \varphi_+(s, u) \\ \varphi_-(s, u) \end{Bmatrix} \tilde{P}_1) \frac{e^{iuy}}{s^2 + u^2} du = \\ = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ RSx_- & y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

y-Komp.:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (-is \begin{Bmatrix} \psi_+(s, u) \\ \psi_-(s, u) \end{Bmatrix} \tilde{T}_1 - iu \begin{Bmatrix} \varphi_+(s, u) \\ \varphi_-(s, u) \end{Bmatrix} \tilde{P}_1) \frac{e^{iuy}}{s^2 + u^2} du = \\ = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ RSy_- & y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Die Integration über "s" brauchen wir in diese Betrachtungen nicht mehr einzubeziehen, da das Modell bezüglich "x" homogen ist, die rechten Seiten müssen dabei allerdings entsprechend mitumgeformt werden.

Diese gekoppelten Systeme können leicht entkoppelt werden, dabei geht aber (s.u. durch Ableiten!) Information verloren, so daß auch nachzuprüfen bleibt, ob die Lösungen der nun weiterbetrachteten *entkoppelten* Systeme auch die ursprünglichen, *gekoppelten* lösen.

<sup>5</sup>Die rechte Seite ist hier im Prinzip immer noch die gleiche wie in (??) und nur von den Lösungen des Normalproblems  $T_n, P_n$  abhängig, also hier bereits bestimmt.

Aus:  $is(30) + \frac{\partial}{\partial y}(31)$  ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \psi_+(s, u) \\ \psi_-(s, u) \end{Bmatrix} \bar{T}_1 e^{iuy} du = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} F_+(s, u) \\ F_-(s, u) \end{Bmatrix} e^{iuy} du \begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Aus:  $-is(31) + \frac{\partial}{\partial y}(30)$  ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \varphi_+(s, u) \\ \varphi_-(s, u) \end{Bmatrix} \bar{P}_1 e^{iuy} du = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} G_+(s, u) \\ G_-(s, u) \end{Bmatrix} e^{iuy} du \begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (33)$$

Die rechten Seiten sind dabei durch die Lösungen des Normalproblems bestimmt:

$$\begin{aligned} F_+(s, u) &= 0 && \text{für } y > 0 \\ F_-(s, u) &= i\omega\mu_0(\tau_+ - \tau_-)(s^2 + u^2)\hat{T}_n(s, u, z = d) && \text{für } y < 0 \\ G_+(s, u) &= 0 && \text{für } y > 0 \\ G_-(s, u) &= i\omega\mu_0(\tau_+ - \tau_-)(s^2 + u^2)\frac{\partial}{\partial z}\hat{P}_n(s, u, z = d) && \text{für } y < 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Um eine Vorstellung von den "bekannteren" Funktionen  $\psi_{\pm}$  und  $\varphi_{\pm}$  zu bekommen will ich sie hier für den einfachsten Fall der 2 Halbplatten im homogenen Halbraum ( $\sigma_0$ ) einmal angeben:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(s, u) &= (2\alpha e^{2\alpha d} + i\omega\mu_0\tau_{\pm}(\alpha + \alpha_0) \cdot \\ &\quad \cdot 2(\alpha \cosh(\alpha d) + \alpha_0 \sinh(\alpha d))(s^2 + u^2) \\ \varphi_{\pm}(s, u) &= (2\kappa e^{2\alpha d} + i\omega\tau_{\pm}\alpha 2 \cosh(\alpha d))(s^2 + u^2) \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_0 := \sqrt{s^2 + u^2}$$

Unsere Rechnung führt uns also letztendlich zu der Aufgabe, diese beiden entkoppelten, dualen Integralgleichungssysteme zu lösen. Dies geschieht mit Hilfe der *Wiener-Hopf Methode* [2] Sie liefert für Integralgleichungen der Form (32), (33) die folgenden Lösungen :

1.) Für  $\hat{T}_1$ :

i. Das Integralgleichungssystem (mit den Abkürzungen von oben):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\pm}(s, u)\bar{T}_1(s, u)e^{iuy} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, u)e^{iuy} du \quad \text{für } \begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (35)$$

ii. Die Lösung:

$$\bar{T}_1(s, u) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\mathcal{L}_-(s, u)}{\psi_-(s, u)} (C_E(s)) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_-(s, t)}{\mathcal{L}_-(s, t)} \cdot \frac{dt}{t - u - i\epsilon} \quad (36)$$

da ja  $F_+ = 0$

Dabei berechnet sich die neu eingeführte Funktion  $\mathcal{L}_-$  aus:

$$\ln(\mathcal{L}_\pm(s, u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\psi_+(s, t)}{\psi_-(s, t)}\right) \cdot \frac{dt}{t - u \mp i\epsilon} \quad (37)$$

2.) Für  $\hat{P}_1$  entsprechend:

i. Das Integralgleichungssystem (mit den Abkürzungen von oben):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\pm(s, u) \bar{P}_1(s, u) e^{iuy} du = \int_{-\infty}^{\infty} G_\pm(s, u) e^{iuy} du \quad \text{für } \begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (38)$$

ii. Die Lösung:

$$\bar{P}_1(s, u) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\mathcal{K}_-(s, u)}{\varphi_-(s, u)} (C_M(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(s, t)}{\mathcal{K}_-(s, t)} \cdot \frac{dt}{t - u - i\epsilon}) \quad (39)$$

da ja auch  $G_+ = 0$

Dabei berechnet sich die neu eingeführte Funktion  $\mathcal{K}_-$  ganz entsprechend aus

$$\ln(\mathcal{K}_\pm(s, u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\varphi_+(s, t)}{\varphi_-(s, t)}\right) \cdot \frac{dt}{t - u \mp i\epsilon} \quad (40)$$

Ich möchte die Struktur dieser Lösungen noch ein wenig erläutern am Fall (32) (aber keine strengen Beweise führen). Die Funktionen  $\mathcal{K}_-, \mathcal{L}_-$  sind so konstruiert, daß beide für komplexe Argumente  $u$  in der unteren  $u$ -Halbebene holomorph sind (also dort keine Pole haben), entsprechend sind die  $\mathcal{L}_+, \mathcal{K}_+$  in der oberen Halbebene holomorph. Auf der reellen  $u$ -Achse erfüllen sie die Bedingungen:

$$\frac{\mathcal{L}_+(s, u)}{\mathcal{L}_-(s, u)} = \frac{\psi_+(s, u)}{\psi_-(s, u)} \quad (41)$$

$$\frac{\mathcal{K}_+(s, u)}{\mathcal{K}_-(s, u)} = \frac{\varphi_+(s, u)}{\varphi_-(s, u)} \quad (42)$$

Setzt man die Lösung (36) in das IGL-System (32) ein, so kann man sich leicht überzeugen, daß das angegebene  $\bar{T}_1$  wirklich ein Lösung ist. Dazu vertauscht man die Integrationsreihenfolge und schließt die  $u$ -Integration durch einen grossen Kreisbogen in der unteren (für  $y < 0$ ) Halbebene, dessen Beitrag zum Integral wegen  $e^{iuy}$  verschwindet (entsprechend anders geht man für  $y > 0$  vor). Der Anteil in (36) der mit  $C_E$  geht liefert keine Beiträge, da ja  $\mathcal{L}_-$  im umschlossenen Gebiet holomorph ist. Der Anteil dagegen, der mit dem Integral in (36) geht liefert gerade wegen des Pols bei  $u = t - i\epsilon$  die rechte Seite von (32). Soviel zur Erläuterung der Wiener-Hopf-Methode in dieser Rechnung.

Bis auf die Größen  $C_E, C_M$  treten in diesen Gleichungen (36), (39) nur bereits berechnete Größen  $\psi_\pm, \varphi_\pm, F_\pm, G_\pm$  auf, die Lösungen sind also bis auf die "Integrationskonstanten" (nicht von  $u$  abhängig)  $C_E, C_M$  bestimmt. Wie gerade angedeutet beschreiben diese  $C_E, C_M$  die Lösungen des homogenen IGL-Systems (32) (also dieser IGL, bei der die rechten Seiten 0 sind). Um die Lösungen eindeutig zu bestimmen, müssen die  $C_E, C_M$  bestimmt werden.

Tatsächlich sind die entkoppelten IGL'n (32) nicht eindeutig zu lösen. Die Forderung, die wir an unsere Lösungen stellen gehen aber noch über (32) hinaus, wir suchen ja eigentlich Lösungen für die *gekoppelten* Systeme (30) (31). Daher setzen wir die Lösungen (36) (39) in die gekoppelten IGL'n (30) (31) ein und erhalten so Forderungen für die  $C_E, C_M$ , wodurch diese eindeutig bestimmt werden.

Aus Platzgründen verzichte ich darauf, die  $C_E, C_M$  hier explizit aufzuführen, ich möchte aber darauf hinweisen, das in beiden Grössen Anteile aus der TE- und auch der TM-Mode des Normalteiles, repräsentiert durch die oben definierten Funktionen  $F_-(s, u)$  für die TE-Mode und  $G_-(s, u)$  für die TM-Mode, auftreten. Da z.B.  $C_E$  in den anomalen TE-Anteil eingeht wird dieser also von beiden normalen Modes, TE und TM, beeinflusst, man kann die einzelnen Modes nicht mehr streng voneinander trennen, sie *mischen* sich (wie oben erwähnt) an der Kante bei  $z = d, y = 0$ .

## 6 Schlußbemerkungen

Im vorliegenden Artikel wurde ein Lösungsweg für ein einfaches 2-D Leitfähigkeitsmodell bei Dipolanregung skizziert. Das Induktionsproblem wurde in ein "normales" und ein "anomalies" Problem aufgespalten. Der "Normalfall" ist dabei ein rein horizontal geschichteter Fall und kann mit den üblichen Methoden behandelt werden. Das anomale Problem wurde auf ein gekoppeltes, duales Integralgleichungssystem zurückgeführt, welches leicht entkoppelt werden kann und dessen Lösungen mit der Wiener-Hopf-Methode formuliert werden können. Eine weitere analytische Betrachtung des Problem es ist im allgemeinen nicht möglich. Im Fall des homogenen *Vollraumes* können die "Spaltfunktionen"  $\mathcal{L}_\pm(s, u), \mathcal{K}_\pm(s, u)$  noch etwas weiter verfolgt werden und führen dann auf sehr schnell konvergierende Integrale [1]. Im allgemeineren Fall verbleiben die angegebenen Integrale numerisch zu lösen was im Prinzip auf eine 3-fach Integration hinausläuft. Um hier in einem annehmbaren Rahmen zu bleiben sind spezielle konvergenzerzeugende Verfahren notwendig (siehe z.B. [1]). Es sei nochmals bemerkt, daß die eingeführten TE- und TM Modes nicht (wie bei rein horizontaler Schichtung üblich) voneinander unabhängig sind.

## References

- [1] Weidelt P. *The harmonic and transient electromagnetic response of a thin dipping dike* Geophysics. Vol 48, No. 7
- [2] Noble B. *Methods based on the Wiener-Hopf techniques for the solution of partial differential equations* Intern. Ser. Monograph. Pure and applied Math. Vol. 7
- [3] Titchmarsh E.C. *Introduction to the Theory of Fourier integrals* Oxford University Press
- [4] Weidelt P. *Vorlesungsskript WS 87/88*
- [5] Schmucker U., Weidelt P. *Electromagnetic Induction in Earth* Lectures Notes Aarhus 1975