

Auswertung von AMT - Registrierungen

Oliver Ritter *

Verschiedene Methoden wurden zur Bestimmung der magnetotellurischen Impedanztensor - Elemente angewendet. Da die meisten AMT - Apparaturen Zeitfenster konstanter Länge registrieren, besteht die Möglichkeit, die Tensorelemente zu stapeln ¹.

1 Bestimmung des Impedanztensors

In der (Audio-)Magnetotellurik werden normalerweise Fourierkoeffizienten mehrerer Frequenzen zusammengezogen, um daraus ein Impedanztensorelement an einer mittleren Frequenz zu bestimmen. Die Anzahl der zu mittelnden Koeffizienten wird so gewählt, daß eine logarithmisch unterteilte scheinbare Widerstandskurve entsteht.

$$E_x = Z_{xx} \cdot B_x + Z_{xy} \cdot B_y + \delta E_x \quad (1)$$

$$E_y = Z_{yx} \cdot B_x + Z_{yy} \cdot B_y + \delta E_y \quad (2)$$

E_x, E_y, B_x, B_y sind die Fourierkoeffizienten der erdelektrischen und magnetischen Felder. $Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy}$ sind die Elemente des Impedanztensors, δE_x und δE_y sind Noise-Komponenten. In Matrixschreibweise lautet das Gleichungssystem (1) für N Fourierkoeffizienten:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{z} \quad (3)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} e_{x1} \\ e_{x2} \\ \vdots \\ e_{xN} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} \\ b_{x2} & b_{y2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{xN} & b_{yN} \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \end{pmatrix}$$

*Institut für Geophysikalische Wissenschaften, Hochschulgelände Lankwitz, Malteserstr. 74-100, 1000 Berlin 46

¹Die Arbeit fand im Rahmen eines EG-Projektes (EN3G-00-D(B)) auf der Insel Milos (Griechenland) statt.

1.1 Methode der kleinsten Quadrate

Normalerweise löst man dieses Gleichungssystem (3) nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\vec{z} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \vec{y} \quad (4)$$

Im Folgenden soll untersucht werden, inwieweit sich durch den Einsatz anderer Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (3) Verbesserungen bei unsicheren oder stark verrauschten Daten erzielen lassen. Martínez hat diese Methoden bereits auf die nicht lineare Inversion angewandt (siehe den Beitrag in diesem Band), so daß ich sie nach einigen Änderungen auch für die lineare Inversion benutzen konnte.

1.2 Methode nach Marquardt (Ridge Regression)

Die Matrixinversion in Gleichung (4) kann man folgendermaßen durchführen:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{ad} \quad (5)$$

Wenn die Determinante sehr klein wird, könnte eine Abhängigkeit zwischen einzelnen Fourierkoeffizienten von B_x und B_y bestehen. In diesem Fall ist die Matrix nicht mehr invertierbar.

Löst man das Gleichungssystem (3) nach der Marquardt-Methode, so folgt für Gleichung (4):

$$\vec{z} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \vec{y} \quad (6)$$

λ ist ein Faktor zur Stabilisierung der Matrixinversion und \mathbf{I} ist die Identitätsmatrix: Die Invertierbarkeit der Matrix $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1}$ wird durch den Marquardtfaktor λ (Marquardt 1963, 1970) erzwungen. λ wird iterativ durch folgende Bedingung bestimmt:

$$\sum_{i=1}^n |E_{xi} - (Z_{xx} \cdot B_{xi} + Z_{xy} \cdot B_{yi})|^2 = MIN \quad (7)$$

d.h. es soll die Differenz der gemessenen und der aus den Tensorelementen und den B-Feldern berechneten Werte minimiert werden. Der Faktor λ wird dabei schrittweise erhöht. Einen größeren Effekt kann man mit dem Verfahren allerdings nur erzielen, wenn die Voraussetzung für das Marquardtverfahren, eine nicht invertierbare Matrix, gegeben ist.

Für kleine Werte von λ erhält man unmittelbar die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate (4), (6).

Bei der Anwendung der Methode auf AMT-Daten einer Meßkampagne auf der Insel Milos (Griechenland) zeigte sich kein feststellbarer Unterschied zu den kleinsten Quadraten.

1.3 M-Fitting (Most Frequent Value Fitting)

Beim M-Fitting Verfahren wird das Gleichungssystem (4) mit Hilfe von Gewichten bestimmt:

$$\bar{z} = (A^T \cdot \Gamma \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \Gamma \cdot \bar{y} \quad (8)$$

Γ ist eine Diagonal-Matrix, in der die Gewichte gespeichert sind. Die Gewichte werden nach folgender Bedingung so berechnet, daß der Abstand zwischen gemessenen und berechneten Werten minimal wird:

$$\Delta_i = |E_{xi} - (Z_{xx} \cdot B_{xi} + Z_{xy} \cdot B_{yi})| \quad (9)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{\Delta_i^2 + \epsilon^2} \quad (10)$$

Durch diese Bedingung werden Werte mit einem kleinen Abstand Δ zur Lösung durch Gewichtung einen großen Einfluß erhalten (ϵ ist eine Tuningkonstante). Eigentlich wird dabei die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Rauschens modifiziert (siehe Martínez in diesem Band).

Als Startmodell für M-Fitting wird zwar die Lösung nach den kleinsten Quadraten (Gauß-verteilter Noise) benutzt, es wird aber nicht unbedingt ein Mittelwert aus allen Punkten bestimmt, sondern der, der die Mehrheit der Punkte befriedigt (most frequent value).

Um dieses Verfahren zu testen, habe ich eine unterschiedliche Anzahl von Fourierkoeffizienten zu Ausreißern werden lassen. Entscheidend ist hierbei nicht die Annahme von stark monochromatischem Noise, sondern es wird sichergestellt, daß der Noise keiner Normalverteilung mehr entspricht. Das Verfahren würde sich aber auch auf eine beliebige dem Noise zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einstellen (Steiner (1980), Ferenczy (1980)).

Die Abb(3) zeigt, daß das M-Fitting Verfahren im Gegensatz zu den kleinsten Quadraten, auch bei einer großen Anzahl von Ausreißern, das den Daten zugrundeliegende Modell in Abb(1) wiederfindet.

2 Stapelverfahren

Viele AMT-Apparaturen, so auch die uns zur Verfügung stehende, arbeiten in mehreren Frequenzbändern und registrieren Zeitfenster gleicher Länge (Abb(4)). Alle Zeitfenster haben daher den gleichen Frequenzinhalt, und man kann aus jedem Zeitfenster eine ρ_i - Kurve berechnen. Da die Qualität der einzelnen Zeitfenster oft sehr unterschiedlich ist, sollen die am stärksten streuenden Kurven mit Hilfe eines Glätteskriteriums gefunden werden:

$$G = \frac{|\log(\rho_{i+1}) - \log(\rho_i)|}{|\log(T_{i+1}) - \log(T_i)|} \quad (11)$$

Es werden also die Differenzen benachbarter Punkte einer ρ_i - Kurve aufsummiert; ein großes G bedeutet eine stark streuende Kurve, die zu einer weiteren Verarbeitung nicht verwendet werden soll. Die verbleibenden Kurven werden in einem weiteren Schritt frequenzweise nach der vorhergesagten Kohärenz gestapelt²:

$$Cp = \frac{|\sum E_z^B \cdot E_z^{G*}|}{\sqrt{\sum E_z^B E_z^{B*} \cdot E_z^G E_z^{G*}}} \quad (12)$$

E_z^B steht für berechnete E-Felder, E_z^G für gemessene E-Felder. Ein Tensorelement an der Frequenz i ($i = 1, 2, \dots, M$) läßt sich nun aus j ($j = 1, 2, \dots, N$) Zeitfenstern bestimmen:

$$Z_{zy} = \exp \left| \frac{\sum_{j=1}^N Cp_{zyj} \cdot \log(Z_{zyj})}{\sum_{j=1}^N Cp_{zyj}} \right| \quad (13)$$

Aus den M so gewichteten Tensorelementen der drei Frequenzbänder erhält man dann eine gestapelte ρ_i - Kurve.

Abb(1) zeigt ein synthetisch berechnetes eindimensionales Modell. Von diesem Modell wurden zehn komplette Fourierspektren für die drei Frequenzbänder erzeugt, und die E-Feldspektren wurden mit 30 % gleichverteiltem Noise überlagert und gestapelt (Abb(2)). Man erkennt, daß durch eine Erhöhung der an der Stapelung beteiligten Kurven der Anteil von gleichverteiltem Noise herausgefiltert wird.

²Das hier beschriebene Verfahren findet in ähnlicher Form bereits seit längerem Einsatz in der Software der Schnegg-Fischer-AMT- Apparatur. (Pers. Mitteilung, H. Brasse)

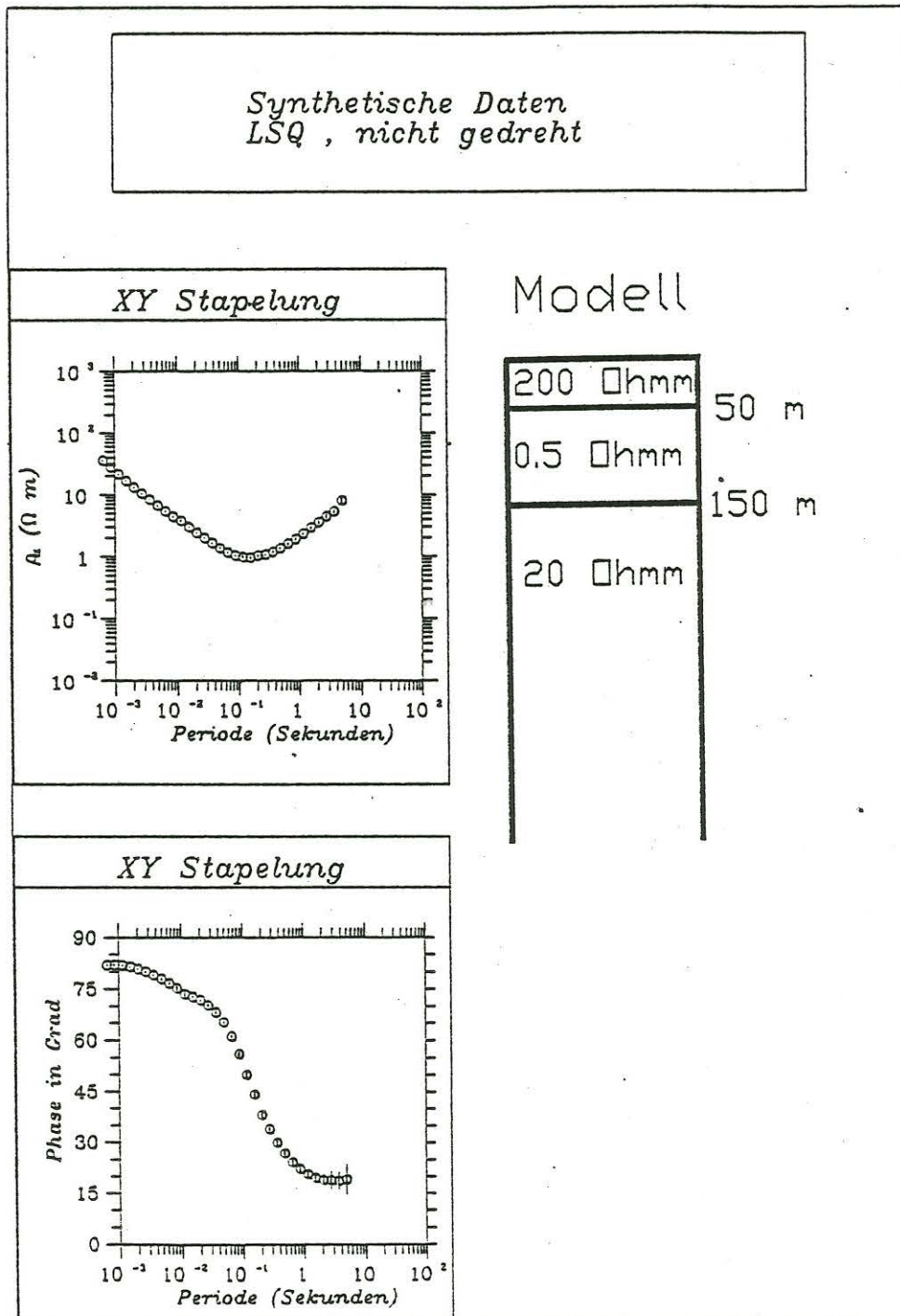


Abbildung 1: Ein eindimensionales Modell im Frequenzbereich der Berliner AMT - Apparatur: Auf diesem Modell basierend wurden für die drei Frequenzbänder je zehn Fourierspektren für E_x, E_y, B_x, B_y erzeugt.

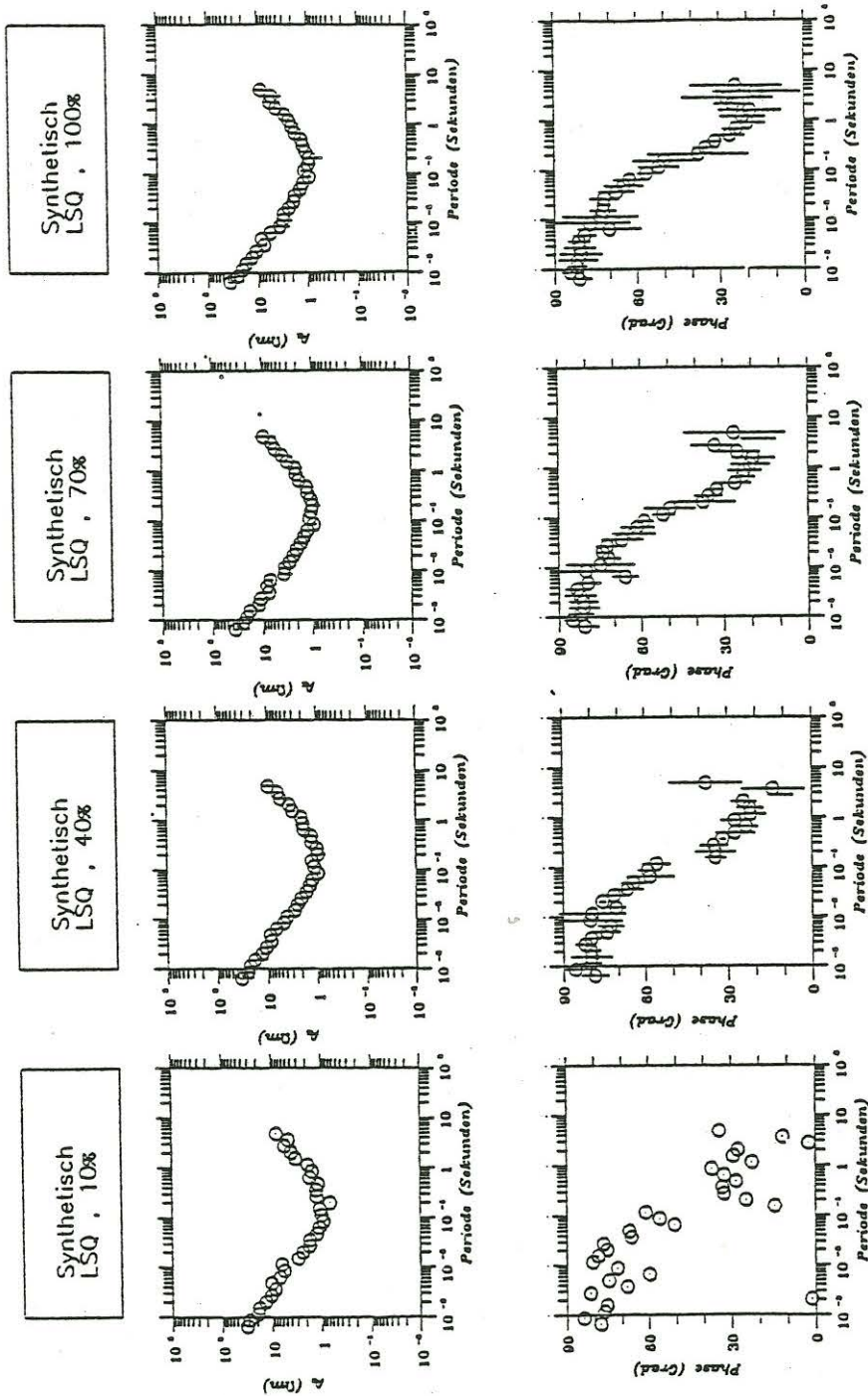


Abbildung 2: Die E-Feldkomponenten des Modells Abb(1) wurden mit 30% gleichverteiltem Noise überlagert. Von links nach rechts nimmt die Anzahl der an der Stapelung beteiligten Kurven (Glättekriterium) zu. Gleichverteilter Noise wird bei vielen Kurven (100%) herausgefiltert.

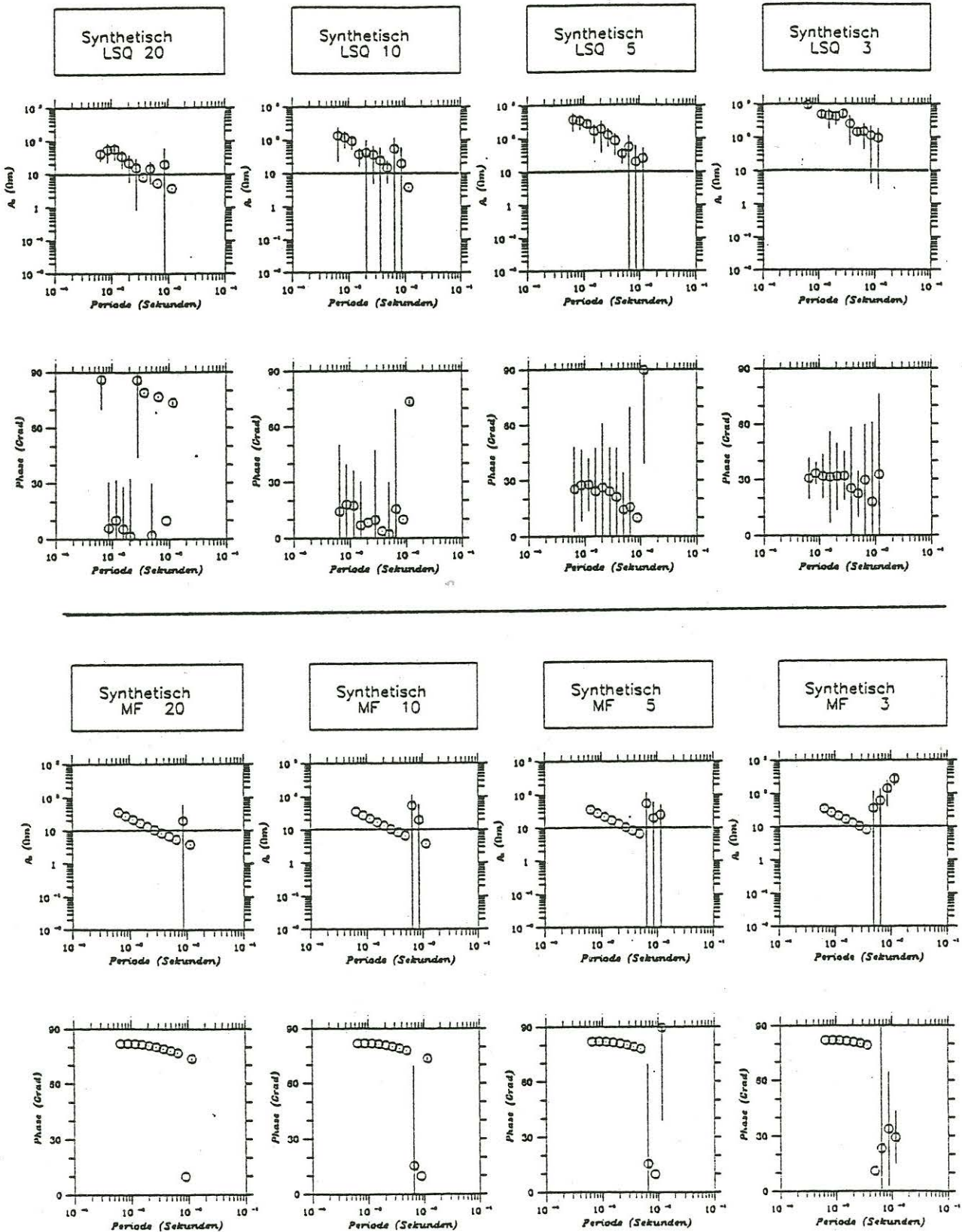


Abbildung 3: In den Spektren des ersten Frequenzbandes wurden eine unterschiedliche Anzahl von Koeffizienten zu Ausreißern gemacht. Von links nach rechts ist jeder 20-te, 10-te, 5-te, 3-te Koeffizient ein Ausreißer. Durch diese Ausreißer unterliegt der Noise keiner Normalverteilung mehr. Im Gegensatz zu den kleinsten Quadraten (oben) findet man durch eine Auswertung nach M-Fitting (unten) das Modell Abb(1) wieder; lediglich die Subbänder mit wenigen Koeffizienten „kippen“.

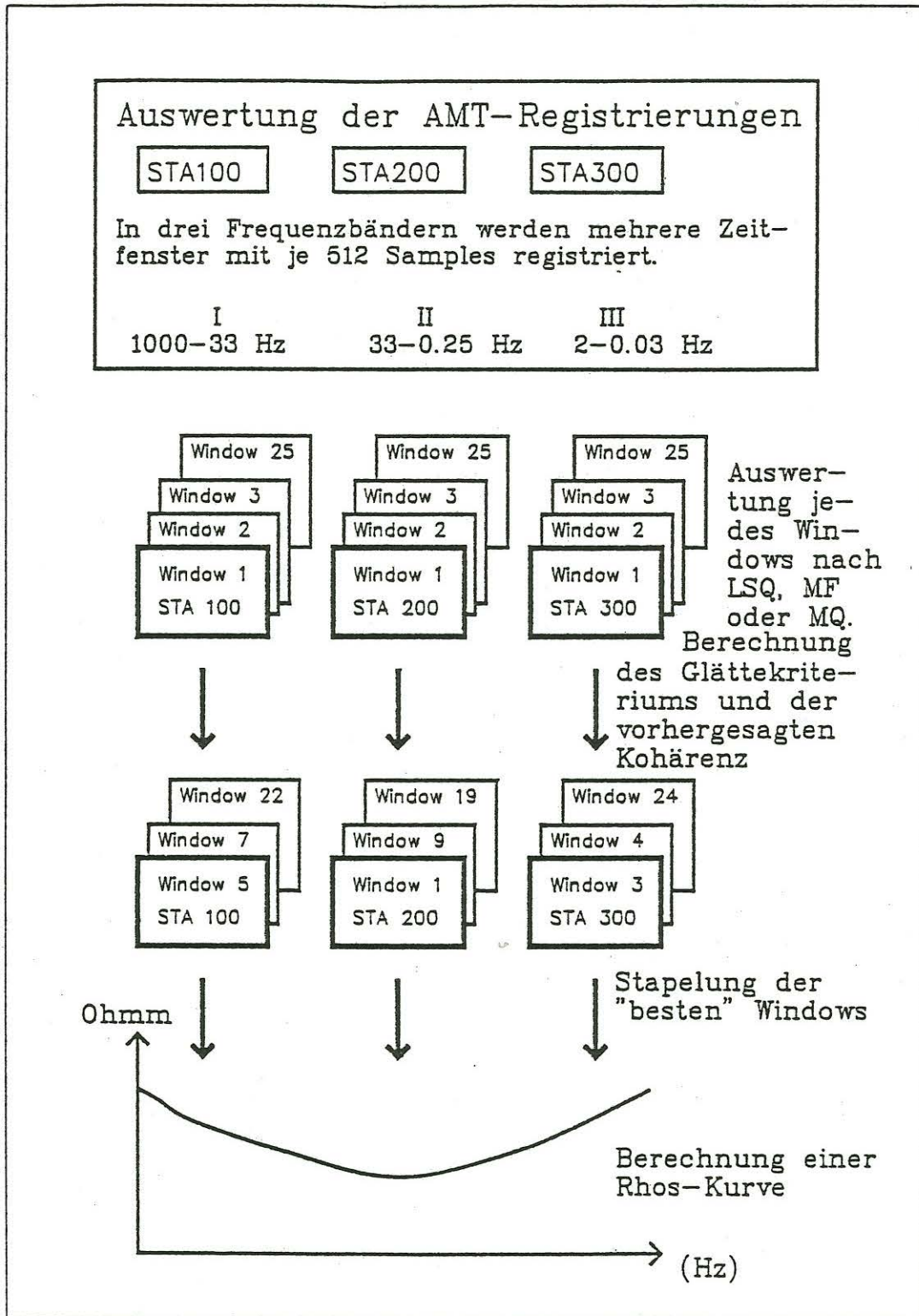


Abbildung 4: Die Datenstruktur der AMT-Apparatur. Es werden in drei Frequenzbändern Datenfiles registriert. Jedes Zeitfenster kann nach verschiedenen Verfahren ausgewertet werden. Stapelt man Tensorelemente aus vielen Zeitfenstern, so erhält man eine resultierende ρ_r -Kurve.

Literatur

- [1] L. Ferenczy: 1980, *M-Fitting in the Processing of magnetotelluric data*. Acta Geodaetica Geophysica et Montanistica, Acad. Sci. Hung.15, pp. 45-58.
- [2] D. W. Marquardt: 1963, *An algorithm for Least Squares Problems Estimation of non linear Parameters*. J. Soc. Ind. Appl. Math., 11 pp 431-441.
- [3] D. W. Marquardt: 1970, *Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation.*, Technometrics, Vol 12 No. 3.
- [4] F. Steiner: 1980, *M-Fitting (Fitting according to the most frequent value) and its comparison with the Method of Least Squares.*, Acta Geodaetica Geophysica et Montanistica Acad. Sci. Hung.15, pp. 37-44.