

P. Hauck

Entzerrung des magnetotellurischen Impedanztensors. Anwendung auf Daten aus dem EG-Projekt 'Milos'

Die Interpretation magnetotellurischer Verfahren zur Erforschung von Tiefenstrukturen wird durch die Verzerrung des elektrischen Feldes aufgrund lateral variierender Leitfähigkeitsverteilungen erschwert. Obwohl diese Problematik seit langem bekannt ist, wurden erst in den letzten Jahren geeignete Methoden zur Entzerrung des Impedanztensors entwickelt. Diese Ideen wurden jedoch bislang relativ selten auf Meßdaten angewandt. Hier soll eine Methode vorgestellt werden, die bei Larsen (1977), speziell bei Cox et al. (1980) beschrieben wird.

Auf der griechischen Insel Milos/Ägäis wurden an 12 Punkten passive magnetotellurische Messungen im langperiodischen Bereich (ca. 80s - 10000s) durchgeführt. Die Verteilung der Meßpunkte zeigt Abb.1. Beim Vergleich der Resultate aller Stationen fiel auf, daß die scheinbaren Widerstandskurven keinen einheitlichen Verlauf im Bereich der längsten Perioden nahmen (Abb.2). Da die Stationen jedoch auf relativ engem Raum mit höchstens 5 Km Distanz zwischen den Meßpunkten standen, ist es fraglich, ob die Leitfähigkeitsverteilung im zugehörigen Tiefenbereich (oberer Mantel) tatsächlich solch engräumigen Variationen aufweist. Darüberhinaus zeigten fast alle Impedanztensoren dreidimensionales Verhalten nach Swift, d.h. für den Skew wurden Werte größer als 0.2 berechnet (Abb.3). Oft konnte auch bei der Drehung der Tensoren kein Winkel der regionalen Streichrichtung ermittelt werden, da sich die Hauptdiagonalen nicht minimieren, bzw. die Nebendiagonalelemente nicht maximieren ließen (Abb.4). Die jeweils zugehörigen scheinbaren Widerstands- und Phasenkurven für die Beziehungen E_x/B_y und E_y/B_x verlaufen jedoch meist parallel, oft ist der Abstand zwischen beiden Komponenten sogar so gering, daß man von einfacheren Leitfähigkeitsverteilungen des Untergrunds ausgehen kann.

Die beschriebenen '3-D Phänomene' werden durch Überlagerung des regionalen elektrischen Feldes mit elektrostatischen Feldern von Oberflächenladungen hervorgerufen, die sich an vertikalen Schichtgrenzen im Bereich der Elektroden aufbauen (Jones (1983)). Das Magnetfeld wird dabei nicht beinflusst, da sich die Induktionsvorgänge in größeren Tiefen ('skin-Tiefe') abspielen. Ziel der Entzerrungsmethode ist es also, eine 'Verzerrungsmatrix' vom Impedanztensor abzuspalten, die reele, frequenzunabhängige Elemente enthält (vgl. Haak (1978), Bahr (1988), Cox et al. (1980)).

Folgendes Modell soll als Grundlage der weiteren Betrachtungen über die Verzerrung des elektrischen Feldes dienen: Eine eindimensionale, nur mit der Tiefe variierende, Leitfähigkeitsverteilung soll von einer lateral inhomogenen Schicht bedeckt sein. Die Mächtigkeit dieser Deckschicht wird weit geringer als der interessierende Induktionsraum angenommen (nach Haak (1978)). Die Übertragungsfunktion des rein eindimensionalen Untergrundes ist:

$$E_r = Z_r \cdot B_r$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}_r \quad (1)$$

Hierbei steht 'r' für die regionalen Größen im Gegensatz zu lokalen. Wird das regionale elektrische Feld nun durch lokale Störungen verzerrt, erhält man aus einer Messung nicht E_r , sondern

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_r \quad (2)$$

Der aus den gemessenen Feldern berechnete Impedanztensor Z läßt sich dann als eine Kombination des regionalen Tensors mit der Verzerrungsmatrix darstellen:

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Der Vorteil der Methode nach Cox et al. ist, daß sich die Elemente $V_1 \dots V_4$ recht einfach aus dem gemessenen Impedanztensor bestimmen lassen. Der Definition der Verzerrungsparameter liegt die Annahme zugrunde, daß die elektrischen und magnetischen Felder nicht immer ein rechtwinkliges Koordinatensystem bilden müssen. Dies kann durch Einmessungsfehler beim Aufbau der Meßstation verursacht werden. Denkbar ist aber auch eine Verdrehung der Achsen durch laterale Inhomogenitäten des Untergrundes in der engeren Umgebung des Meßpunktes. Dies wird auch bei der Methode der minimalen/maximalen Kohärenzen (Haak (1978), Kiessling (1970)) beschrieben. Das Verdrehen der Achsen gegeneinander bedeutet eine Drehung der Felder um zwei Winkel: e für das elektrische und b für das magnetische Feld. Geht man nun davon aus, daß der gemessene Impedanztensor sowohl verzerrt als auch verdreht ist, so muß man ihn zunächst also zurückdrehen:

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \cos e & \sin e \\ -\sin e & \cos e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} \quad (4)$$

Diese Gleichung liefert nach sinnvoller Zusammenfassung bestimmter Terme und nach Erweiterung mit dem Quotienten (d'/d') folgende Beziehungen für die zurückgedrehten Tensorelemente:

$$\begin{aligned} Z'_{xx} &= (d'/d') \cdot [a \cdot \cos(e-b) - d \cdot \sin(e-b) + b \cdot \cos(e+b) + c \cdot \sin(e+b)] \\ &= d' \cdot [\quad \quad \quad A \quad \quad \quad + \quad \quad \quad C \quad \quad \quad] \\ Z'_{xy} &= (d'/d') \cdot [a \cdot \sin(e-b) + d \cdot \cos(e-b) - b \cdot \sin(e+b) + c \cdot \cos(e+b)] \\ &= d' \cdot [\quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad B \quad \quad \quad] \\ Z'_{yx} &= (d'/d') \cdot [-a \cdot \sin(e-b) - d \cdot \cos(e-b) - b \cdot \sin(e+b) + c \cdot \cos(e+b)] \\ &= d' \cdot [\quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad B \quad \quad \quad] \\ Z'_{yy} &= (d'/d') \cdot [a \cdot \cos(e-b) - d \cdot \sin(e-b) - b \cdot \cos(e+b) - c \cdot \sin(e+b)] \\ &= d' \cdot [\quad \quad \quad A \quad \quad \quad - \quad \quad \quad C \quad \quad \quad] \end{aligned} \quad (5)$$

Die Abkürzungen bedeuten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (Z_{xx} + Z_{yy}) & c &= \frac{1}{2} (Z_{xy} + Z_{yx}) \\ b &= \frac{1}{2} (Z_{xx} - Z_{yy}) & d &= \frac{1}{2} (Z_{xy} - Z_{yx}) \end{aligned} \quad (6)$$

Durch diese Zerlegung wurde eine Matrix mit reellen Elementen abgepalten:

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}' = d' \begin{bmatrix} A + C & B + 1 \\ B - 1 & A - C \end{bmatrix} = d' \cdot V \quad (7)$$

Die Parameter A, B, C sind leicht aus den zurückgedrehten Tensorelementen zu berechnen:

$$\begin{aligned} A &= d'^{-1} \cdot [a \cdot \cos(e-b) - d \cdot \sin(e-b)] = \frac{Z'_{xx} + Z'_{yy}}{Z'_{xy} - Z'_{yx}} \quad \text{Skew} \\ B &= d'^{-1} \cdot [-b \cdot \sin(e+b) + c \cdot \cos(e+b)] = \frac{Z'_{xy} + Z'_{yx}}{Z'_{xy} - Z'_{yx}} \\ C &= d'^{-1} \cdot [b \cdot \cos(e+b) + c \cdot \sin(e+b)] = \frac{Z'_{xx} - Z'_{yy}}{Z'_{xy} - Z'_{yx}} \\ d' &= a \cdot \sin(e-b) + d \cdot \cos(e-b) = \frac{1}{2} (Z'_{xy} - Z'_{yx}) = z^- \\ &= \frac{d}{\cos(e-b) - A \cdot \sin(e-b)} \end{aligned} \quad (8)$$

Bei näherer Betrachtung sind die Ähnlichkeiten der so definierten Verzerrungsparameter mit den Parametern anderer Methoden auffallend:

1.) A entspricht Swift's Skew. Er ist jedoch bei dieser Art von Drehung um 2 Winkel nicht invariant, sondern man kann ihn minimieren. Durch die Drehung soll ja der Einfluß der Anisotropie eliminiert werden (engl. *to deskew*).

2.) Bildet man den Quotienten C/B, so erhält man Swift's Formel zur Bestimmung die Streichrichtung. Er wird bei dieser Methode benutzt, um die Summe der Winkel (e+b) zu berechnen (s.weiter unten). Nach der Drehung sollte C jedoch, genauso wie A, eliminiert sein. Auch der Parameter B wird klein, denn im 1-D-Fall sollte $Z'_{xy} = -Z'_{yx}$ erfüllt sein.

3.) d' wird im Prinzip nach der gleichen Formel wie die Berdichevsky-Invariante bestimmt, ist in diesem Zusammenhang jedoch, wie der Skew A, nicht drehinvariant. Nach Gleichung (7) $Z' = d' \cdot V$ enthält d' die gesuchte eindimensionale Impedanz, verbunden mit dem 'tellurischen Faktor' D:

$$d' = z^- = z \cdot D \quad (9)$$

Mittelung:

Die nach obigen Gleichungen berechneten Parameter sollten im Idealfall keinen Imaginärteil haben und, wenn man sie für alle Perioden in der komplexen Ebene aufträgt, in jeweils einem Punkt auf der reellen Achse zusammenfallen. Aus realen Daten ergibt sich jedoch häufig eine leichte Frequenzabhängigkeit und Abweichung von der reellen Achse. Man muß dann die Parameter über den Periodenbereich (N Perioden) mitteln.

z.B. für den Parameter A: $\underline{A} = N^{-1} \cdot \sum A_i$ mit $i = 1, \dots, N$.

Da man einen Mittelwert aus einer Menge von Punkten in der komplexen Ebene bestimmen will, kann man zur Mittelung das Verfahren der optimalen Standortbestimmung benutzen. Mit dieser Methode wird die Summe der Abstände (S^k) zum gemittelten Punkt (\underline{A}^k) in der Ebene minimiert:

$$S^k = \sum |A_i - \underline{A}^k| \quad \begin{array}{l} k: \text{Iterations-Nr.} \\ i: 1, 2, \dots, N \end{array}$$

$$\underline{A}^k = \frac{\sum (G_i^{k-1} \cdot A_i)}{\sum G_i^{k-1}} \quad (10)$$

$$G_i^{k-1} = |A_i - \underline{A}^{k-1}|^{-1}$$

Für den Startwert \underline{A}^1 setzt man die Gewichte auf $G_i^0 = 1$ und erhält so als erste Näherung das arithmetische Mittel.

Verzerrungsparameter vor der Drehung:

Die Verzerrungsparameter sind zwar durch die zweifache Drehung definiert worden, sie lassen sich aber auch ohne Rotation berechnen. Hierzu nimmt man einfach den Spezialfall an: $e=b=0$: Die Parametergleichungen reduzieren sich dann zu einfacheren Formen, natürlich ohne Winkelbeziehungen. Die Summen und Differenzen werden aus den vier ungedrehten Tensorgrößen bestimmt:

$$\begin{aligned} A_0 &= a/d = \frac{Z_{xx} + Z_{yy}}{Z_{xy} - Z_{yx}} \quad \text{Skew!} & B_0 &= c/d = \frac{Z_{xy} + Z_{yx}}{Z_{xy} - Z_{yx}} \\ C_0 &= b/d = \frac{Z_{xx} - Z_{yy}}{Z_{xy} - Z_{yx}} & d' &= d = \frac{1}{2} (Z_{xy} - Z_{yx}) \\ & & &= z^- \end{aligned} \tag{11}$$

Abb.5 zeigt die Größen A,B,C einer Station vor und nach der Drehung. Die Punkte streuen um die reele Achse, nach der Mittelung sind jedoch die Imaginärteile weitgehend verschwunden. Nach der Drehung streuen die Werte von A und C wie erwartet um den Ursprung, während sich die Realteile von B nur leicht verändert haben.

Impedanz nach der Drehung:

Das Ziel der Drehung ist es, die Hauptdiagonalelemente des Impedanztensors zu eliminieren. Das erreicht man, indem man $A=0$ und $C=0$ setzt. Dann kann man die Winkel, um die der Tensor gedreht werden soll, bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{A = 0:} \quad d'^{-1} \cdot [a \cdot \cos(e-b) - d \cdot \sin(e-b)] &= 0 \\ \tan(e-b) &= a/d = A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{C = 0:} \quad d'^{-1} \cdot [b \cdot \cos(e+b) + c \cdot \sin(e+b)] &= 0 \\ \tan(e+b) &= -b/c = -C_0/B_0 \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man: (12)

$$\begin{aligned} e-b &= \tan^{-1}(A_0) & e &= \frac{1}{2} \cdot [\tan^{-1}(A_0) - \tan^{-1}(C_0/B_0)] \\ e+b &= -\tan^{-1}(C_0/B_0) & b &= \frac{1}{2} \cdot [\tan^{-1}(A_0) + \tan^{-1}(C_0/B_0)] \end{aligned}$$

Man kann die beiden Winkel also aus den Verzerrungsparametern, die man vor der Drehung berechnet hat, bestimmen und ist dann in der Lage, einen zweidimensionalen Verzerrungstensor abzuspalten:

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}' = d' \begin{bmatrix} 0 & B+1 \\ B-1 & 0 \end{bmatrix} = d' \cdot v \tag{13}$$

Daraus lassen sich zwei Gleichungen zur Bestimmung von z^- gewinnen:

$$z^- = \frac{Z'_{xy}}{B + 1} \qquad z^- = \frac{Z'_{yx}}{B - 1} \tag{13}$$

Diese beiden Werte werden gemittelt, und man erhält so die entzerrte eindimensionale Impedanz, welche jedoch noch den Faktor D enthält. Diesen sog. 'static shift' kann man unter bestimmten Voraussetzungen aus sehr langperiodischen Daten (Sq-Variationen) nach Schmucker bestimmen. Das war mit den Daten aus Milos mangels solch langer Perioden leider nicht möglich.

Die nach der beschriebenen Methode entzerrten Kurven, dargestellt an einem Beispiel in Abb.6, sollten bei der weiteren 1-D-Verarbeitung benutzt werden. Bei Inversionsrechnungen sind realistischere Ergebnisse als etwa mit der Berdichevsky-Invarianten zu erwarten. Betrachtet man die berechneten Winkel für alle 12 Meßpunkte (Abb.1), so erkennt man, daß keines der Koordinatensysteme tatsächlich rechtwinklig ist, die meisten lagen bei etwa 110°. Es empfiehlt sich also, die Rotation grundsätzlich an jeder Station vorzunehmen. Die gezeigten Datenbeispiele wurden im Herbst 1986 im Rahmen des EG-Projekts EN3G-00-D (B) registriert.

Literatur

- Bahr, K.: Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: regional induction and local telluric distortion. *Journal of Geophysics* 62, 119-127, 1988
- Cox, C.S., Filloux, J.H., Gough, D.I., Larsen, J.C., Poehls, K.A., von Herzen, R.P. and Winter, R.: Atlantic lithosphere sounding. *J. Geomag. geoelect.* 32, 13-32, 1980
- Haak, V.: Interpretations-Verfahren für die Magnetotellurik unter besonderer Berücksichtigung lateral variierender elektrischer Leitfähigkeit im Erdinnern und eines räumlich inhomogenen induzierenden Magnetfelds. *Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss.Kl., Neue Folge* 158, München, 1978
- Jones, A.G.: The problem of current channelling: A critical review. *Geophys. Surveys* 6, 79-122, 1983
- Larsen, J.C. Removal of local surface conductivity effects from low frequency mantle response curves. *Acta Geodaet. Geophys. Mont.* 12, 183-186, 1977

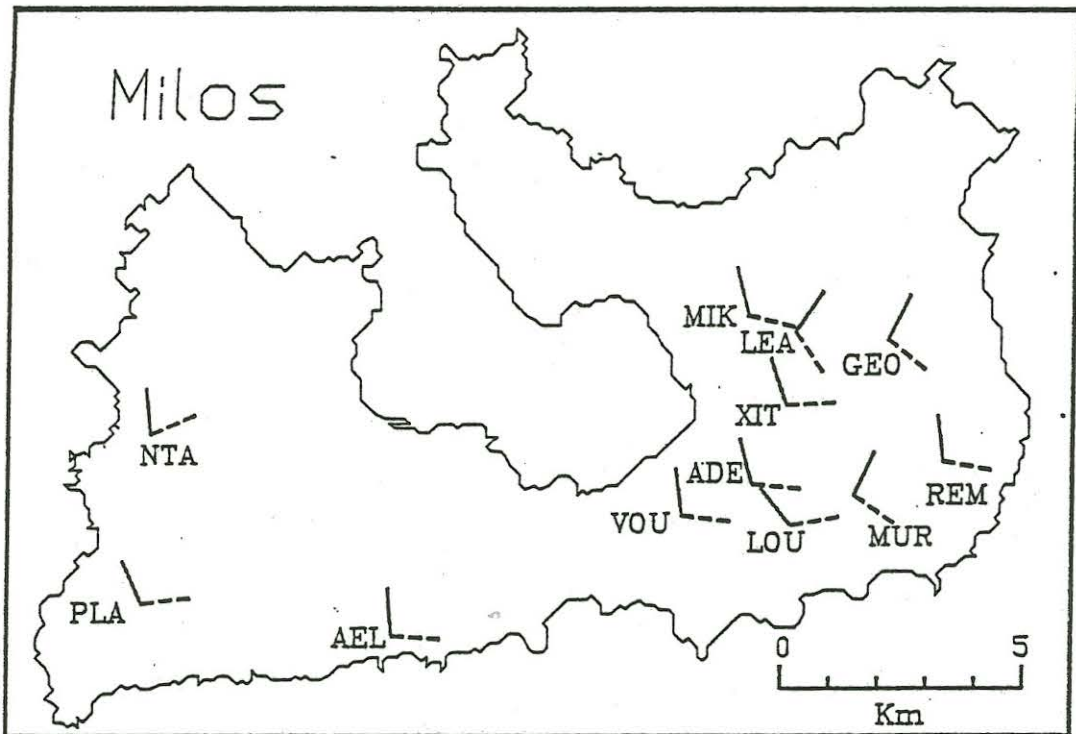


Abb.1: Verteilung der Mt-Stationen auf der Insel Milos/Agäis und ermittelte Koordinatensysteme: ausgezogene Linien für die Winkel e und gestrichelte Linien für die Winkel b ($+90^\circ$).

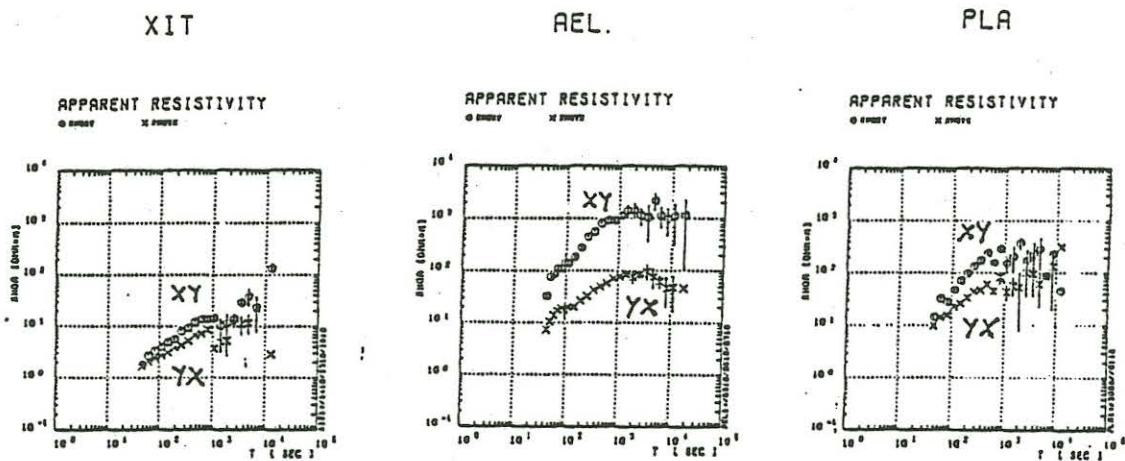
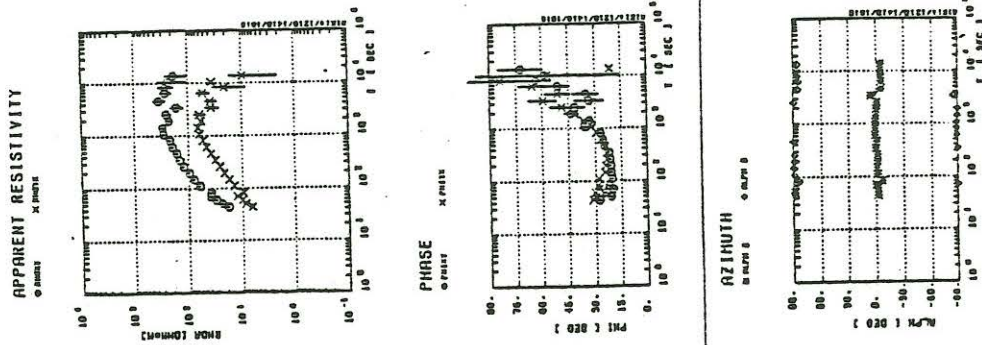


Abb.2: Vergleich der ρ_a -Kurven von drei Stationen (XIT, AEL und PLA): Im Bereich der längsten Perioden ist das Widerstands-Niveau sehr unterschiedlich.

MIK - SWIFT



MIK

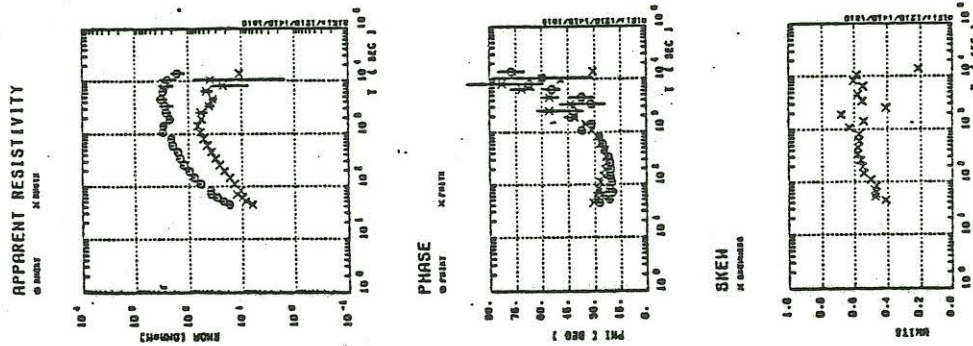
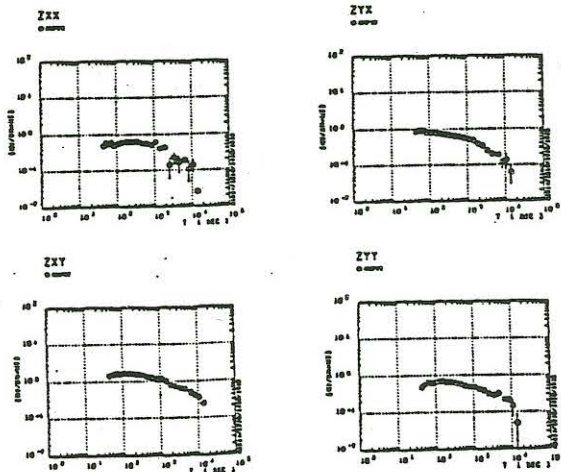


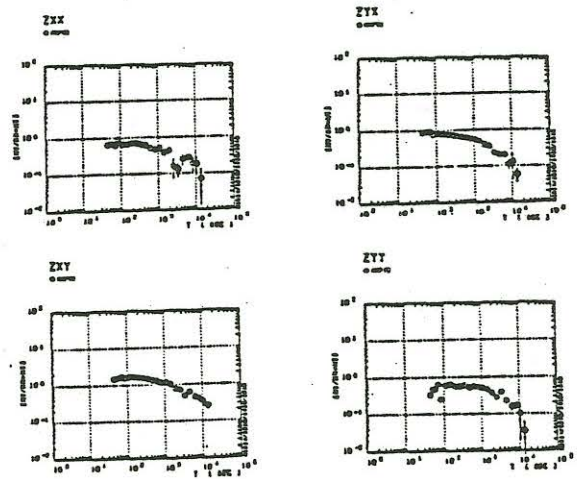
Abb.3: Station MIK zeigt trotz weitgehend parallelen Verlaufs der xy- und yx-Komponenten einen relativ hohen Skew (ca. 0.6). Außerdem streuen die Drehwinkel (Azimuth) nach Swift um 0° (iterativ), d.h. es konnte keine Streichrichtung gefunden werden.

Abb.4: Die Beträge der Tensorelemente der Station MIK: links vor der Drehung, rechts nach der Drehung nach Swift (iterativ). Die Elemente sind nach der Drehung kaum verändert. offensichtlich konnte kein Minimum bzw. Maximum gefunden werden.

MIK



MIK - SWIFT



MIK
A B C

MIK
A, B, C *
 $e = -16^\circ$
 $b = 15^\circ$

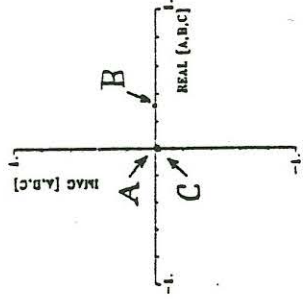
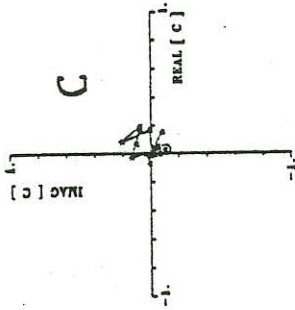
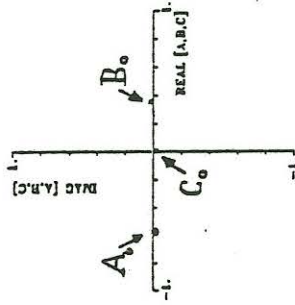
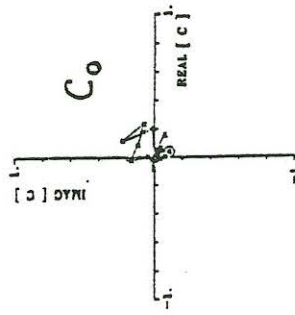
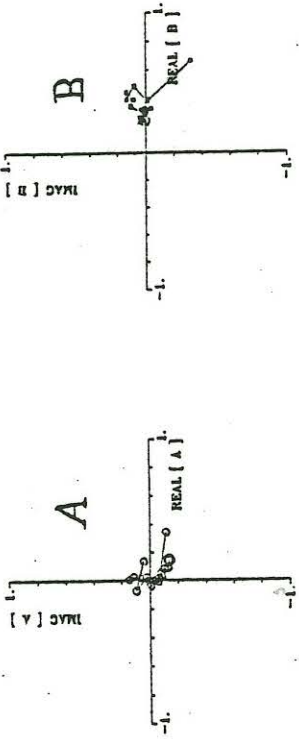
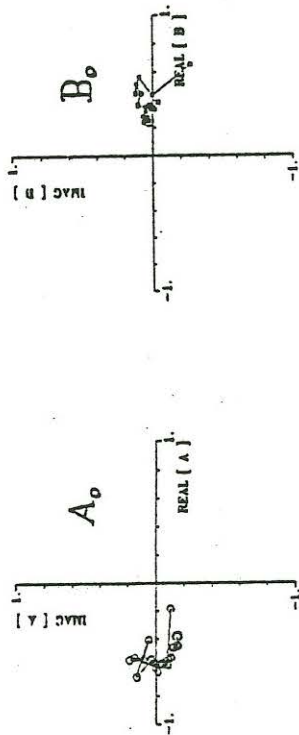


Abb.5: Verzerrungsparameter A,B,C der Station MIK für alle Perioden (mit Verbindungs-
linien, kleinste Periode durch Kreis gekennzeichnet) und die jeweiligen Mittelwerte, darge-
stellt in der komplexen Ebene: Links vor der Drehung, rechts nach der Drehung um $e=-16^\circ$
und $b=15^\circ$. Nach der Rotation streuen A und C wie erwartet um den Koordinatenursprung.

MIK RHOS, PHASE *

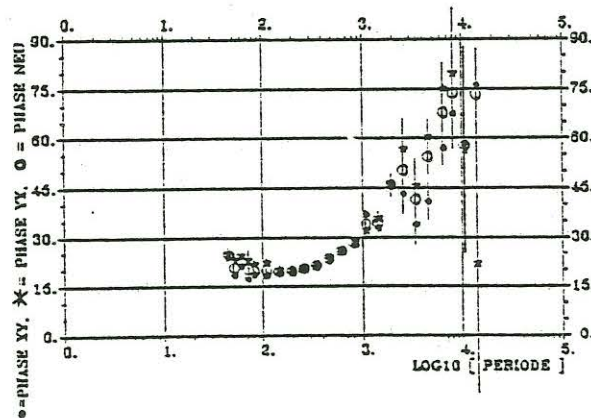
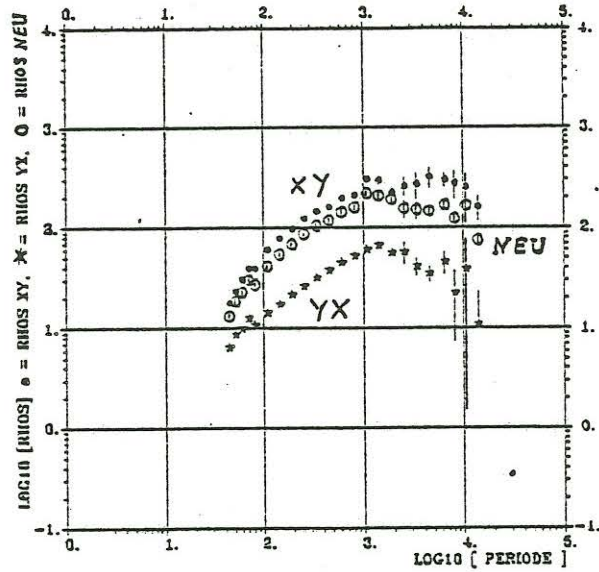


Abb.6: Die entzerzte, um die Winkel $a=-16^\circ$ und $b=15^\circ$ gedrehte Rho- und Phasenkurve liegt zwischen den ursprünglichen xy- und yx-Kurven, jedoch nicht in der Mitte (wie etwa die Berdichevsky-Invariante), sondern zur xy-Kurve hin verschoben.