

B. FLUCHE

2D-Modell-Vergleich: Integral- und FD-Methode

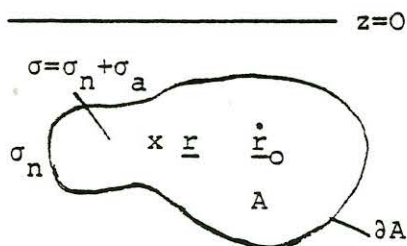
Parallel zu den beschriebenen Verbesserungen in den FD-Programmen wurden Modellprogramme für 2D-Leitfähigkeitsstrukturen entwickelt, die auf der Integralgleichungsmethode aufbauen (Weidelt, 1975; Berdichevskij & Dmitriev, 1976). Gemäß ihrem Namen werden dabei die die E- und B-Pol. beschreibenden MAXWELLSchen Gleichungen in Integralgleichungen für $E(\underline{r}_0)$ bzw. $B(\underline{r}_0)$ umgeformt:

Mit
$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_x; - \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega B_y; \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \quad \text{folgt}$$

$$E(\underline{r}_0) = E_n(\underline{r}_0) - i\omega\mu_0 \iint_A \sigma_a(\underline{r}) E(\underline{r}) G_n^E(\underline{r}|\underline{r}_0) d^2\underline{r}$$

Dabei bezeichnen:

$E_n(\underline{r}_0)$ das als bekannt vorausgesetzte Normalfeld für die normale (d.h. 1-D) Struktur im Punkt \underline{r}_0 .



$G_n^E(\underline{r}|\underline{r}_0)$ die zu der normalen Struktur gehörende GREENSche Funktion (z.B. das von einem Linienstrom in \underline{r}_0 induzierte elektr. Feld in \underline{r}).

Mathematisch ist dies eine FREDHOLMsche Igl. 2. Art mit einem schwach singulären Kern, denn $G_n^E(\underline{r}|\underline{r}_0)$ hat für $\underline{r} \rightarrow \underline{r}_0$ eine logarithmische Singularität.

Völlig analog läßt sich die Igl. für die B-Pol. aufstellen. Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, daß die Leitfähigkeit der Anomalie $\sigma = \sigma_n + \sigma_a = \text{const.}$. Mit den für den Fall der B-Pol. gültigen MAXWELL-Gln.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega B_x; \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_y; - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \sigma E_z$$

erhält man dann:

$$B(\underline{r}_0) = \frac{\sigma}{\sigma_n} B_n(\underline{r}_0) + \frac{\sigma_a}{\sigma_n} \left\{ \oint_{\partial A} B(\underline{r}) \frac{\partial G_n^B(\underline{r}|\underline{r}_0)}{\partial n} - i\omega\mu_0 \iint_A B(\underline{r}) G_n^B(\underline{r}|\underline{r}_0) dA \right\} \quad \text{für } \underline{r}_0 \in A$$

bzw.

$$B(\underline{r}_0) = B_n(\underline{r}_0) + \frac{\sigma}{\sigma_n} \left\{ \oint_{\partial A} B(r) \frac{\partial G_n^B(r|\underline{r}_0)}{\partial n} ds - i\omega\mu_0 \iint_A B(r) G_n^B(r|\underline{r}_0) dA \right\}$$

für $\underline{r}_0 \notin A$

Es tritt also hier ein zusätzlicher Term auf, der auch die Kenntnis der Normalableitungen von $G_n^B(r|\underline{r}_0)$ an ∂A erfordert. Dabei ist $B_n(\underline{r}_0)$ das magnetische Normalfeld in \underline{r}_0 und $G_n^B(\underline{r}|\underline{r}_0)$ die GREENSche Funktion für die B-Pol. G_n^E und G_n^B sind nur für den (physikalisch belanglosen) homogenen Vollraum identisch, nämlich $\frac{1}{2\pi} K_0 (\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_n} |\underline{r}-\underline{r}_0|)$.

Identisch sind aber in jedem Fall die Lösungswege für beide Integralgleichungen. Man geht so vor, daß man das betreffende Gebiet A in hinreichend viele Zellen unterteilt, innerhalb derer das Feld $E(\underline{r})$ bzw. $B(\underline{r})$ als konstant angenommen wird. Somit erhält man ein lineares Gleichungssystem für das Feld innerhalb der Anomalie, dessen Koeffizientenmatrix aus den über die jeweiligen Teilzellen integrierten GREENSchen Funktionen (bzw. deren Ableitungen) besteht. Das Gleichungssystem wird in diesem Falle durch die (rechenzeitaufwendige!) direkte Inversion der Koeff.-matrix gelöst. Eine CPU-Zeit sparende Alternative besteht z.B. durch Anwendung iterativer Methoden.

Hat man auf diese Weise das Feld innerhalb der Anomalie bestimmt, so besteht der zweite Schritt darin, die gesuchten Oberflächenfelder auszurechnen. Für die E-Pol. sind dies E_x , B_{ay} und B_{az} ; für die B-Pol. existiert wegen $B_{ax}(0) = 0$ und $E_z(0) = 0$ nur $E_y(0)$ bzw. $j_y(0)$. Durch erneute Anwendung der MAXWELLSchen Gln. erhält man für die E-Pol.:

$$B_{ay}(0) = - \iint_A \sigma_a(\underline{r}) E(\underline{r}_0) \frac{\partial}{\partial z_0} G_n^E(r|\underline{r}_0) \Big|_{z_0=0} dA$$

und

$$B_{az}(0) = \iint_A \sigma_a(\underline{r}) E(\underline{r}_0) \frac{\partial}{\partial y_0} G_n^E(r|\underline{r}_0) \Big|_z dA$$

und für die Stromdichte j_{ay} im Falle der B-Polarisation:

$$j_{ay}(0) = \frac{\sigma}{\sigma_n} \left\{ \oint_B(\underline{r}) \frac{\partial}{\partial z_0} \bigg|_{z_0=0} \frac{\partial G_n^B(\underline{r}|\underline{r}_0)}{\partial n} dA - i\omega\mu_0 \oint_A f_B(\underline{r}) \frac{\partial}{\partial z_0} \bigg|_{z_0=0} G_n^B(\underline{r}|\underline{r}_0) dA \right\}$$

Hier ist es also nötig, die GREENSchen Funktionen bzw. deren Ableitungen zwischen den Zellenmitten und dem Oberflächenaufpunkt $\underline{r}_0 = (y_0, 0)$ zu berechnen.

Es erweist sich als zweckmäßig, die GREENSche Funktion $G_n(\underline{r}|\underline{r}_0)$ darzustellen durch:

$$G_n(\underline{r}|\underline{r}_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{G}(k, z|z_0) \cdot \cos k(y-y_0) dk$$

Bei der E-Pol. ist

$$\hat{G}(k, z|z_0) = \frac{1}{f'_a/f_a - f'_b/f_b} \cdot \begin{cases} f_a(z)/f_a(z_0) & \text{für } z < z_0 \\ f_b(z)/f_b(z_0) & \text{für } z > z_0 \end{cases}$$

wobei $f_{a,b}(z)$ die Dgl.

$$f''_{a,b}(z) - \alpha^2 f_{a,b} = \delta(z-z_0) \quad \text{löst.}$$

Interpretiert man f'_a/f_a und $-f'_b/f_b$ als die Kehrwerte der Eindringtiefen der vom Punkt z_0 aus nach oben bzw. unten laufenden Wellen und $f_{a,b}(z)/f_{a,b}(z_0)$ als das Abklingverhältnis $e^{-\alpha|z-z_0|}$, so ist (innerhalb einer Schicht)

$$\hat{G}_n^E(k, z|z_0) = \frac{1}{1/C_- + 1/C_+} \cdot e^{-\alpha_j|z-z_0|}$$

$\alpha_j = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_j + k^2}$ in der j-ten Schicht. Bei mehreren Schichten muß man C_+ und C_- gemäß dem WAITschen Algorithmus bestimmen. Die B-Pol. hat bei hom. Halbraum die GREENSche Funktion

$$G(k, z|z_0) = \frac{\sigma_n}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha|z-z_0|} - e^{-\alpha(z+z_0)}) \cos k(y-y_0) dk$$

mit $\alpha = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_n + k^2}$.

In der Praxis geht man so vor, daß man für jede Teilzelle die GREENSchen Funktionen w.o. ausdrückt und vor der Integra-

tion über die Wellenzahl k zuerst die Integration über die Querschnittsfläche A_1 der einzelnen Teilzellen ausführt. Diese kann analytisch durchgeführt werden; außerdem umgeht man damit auch die logarithmische Singularität bei $r=r_0$. Die Rücktransformation in den Ortsbereich, d.h. die k -Integration, erfolgt mit Hilfe der schnellen Hankeltransformation.

Bei der B-Pol. gibt es eine zusätzliche Komplikation: Zum einen werden die Felder innerhalb jeder Teilzelle als konstant vorausgesetzt; zum anderen ist an der Oberfläche $z=0$ $B_x/B_{nx} = 1$. Reicht die Anomalie bis zur Oberfläche, so wäre in den oberflächennahen Zellen in der Mitte wegen der Konstanz von $B(z)$ überall $B_x(z)/B_{nx}(0) = 1$, was natürlich nicht stimmen kann. Das Resultat ist, daß das innere Feld gegenüber dem wahren Verlauf um eine halbe Zellentiefe parallelverschoben ist. Das Problem läßt sich derart lösen, daß man über (und unter) den anomalen Bereich eine sehr dünne Schicht mit der anomalen Leitfähigkeit legt und somit den Oberflächenwert des inneren Feldes "abkoppelt". - Interessanterweise ist diese Methode bei der E-Pol. gerade nicht anwendbar, d.h. die Werte für das innere Feld würden eben dann diese Parallelverschiebung aufweisen.

Die folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis von Modellrechnungen für ein einfaches Modell bei E- und B-Polarisation. Sie sollen die Tabellen des vorangegangenen Beitrags ergänzen und vervollständigen. Die nach den beiden Methoden gewonnenen Feldwerte sind ineinandergreifend aufgetragen, wobei sich diejenigen nach der FD-Methode auf Gitterpunkte und diejenigen nach der Igl.-Methode auf die jeweilige Zellenmitte beziehen. Die Übereinstimmung ist sowohl bei den inneren Feldern als auch bei den Oberflächenfeldern nahezu lückenlos, von einem kleinen Versatz bei den j_y -Werten für B-Polarisation abgesehen. Für die Igl.-Rechnung ist der anomale Bereich von $20 \times 20 \text{ km}^2$ in $8 \times 8 = 64$ quadratische Zellen mit einer Kantenlänge von 2.5 km unterteilt. Ganz entsprechend ist bei der FD-Methode dieser Bereich von einem Gitternetz mit 9×9 Gitterpunkten im Abstand von 2.5 km überdeckt.

Werden Feldwerte für die Modellmitte angegeben, so beziehen sie sich bei der FD-Methode auf die vertikale Gitterlinie bei

$y = -10$ km, bei der Igl.-Methode auf die Zellen zwischen -12.5 (-7.5) km und -10 km. Feldwerte für den rechten Rand beziehen sich auf die Zellen zwischen -2.5 und 0 km, bzw. auf den Mittelwert der Gitterlinien bei $y = -2.5$ und 0 km. Die Symbole haben folgende Bedeutung:

- | | | |
|---|--------------|--------------|
| ■ | Realteil | FD-Methode |
| □ | Realteil | Igl.-Methode |
| ● | Imaginärteil | FD-Methode |
| ○ | Imaginärteil | Igl.-Methode |

Literatur:

M.N. Berdichevskij u. V.I. Dmitriev: Distortion of magnetic and electric fields by near-surface lateral inhomogeneities. Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung. 12, pp. 241-245, 1977

P. Weidelt: Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in E-Polarisation. Hab. Math.-Nat. Fak. Univ. Göttingen, 1978

P. Weidelt: Modellrechnungen für die erdmagnetische Tiefenson-dierung. Skriptum zur Vorlesung, gehalten an der Univ. Göttingen, WS 1983/84

