

U. SCHMUCKER

Lokale Sq Analysen mit einem verbesserten Z/H Verfahren

1. Einleitung

Bekanntlich läßt sich - in der Abwesenheit von Leitfähigkeitsanomalien - aus der vertikalen Z-Komponente erdmagnetischer Variationen etwas über die Eindringtiefen C des Feldes in die leitfähige Erde aussagen. Dazu sind die Z-Variationen in Beziehung zu setzen zu den Variationen der horizontalen H-Komponenten. Soll die Bestimmung von C nach dem Z/H Verfahren mit nur an einem Ort beobachteten Variationen erfolgen, so sind vereinfachende Annahmen über die räumliche Struktur des induzierenden Feldes notwendig. Im Falle langsamer und tief eindringender Variationen wird dieses zweckmäßigerweise nach Kugelfunktionen entwickelt.

In der ursprünglichen Anwendung des Z/H Verfahrens auf Sq-Variationen wurde angenommen, daß sich das induzierende Feld durch jeweils nur eine Kugelfunktion für jede Harmonische genügend genau darstellen läßt. Die in diesem Beitrag vorgeschlagene Verbesserung besteht darin, eine zweite Kugelfunktion hinzuzufügen.

2. Grundlagen

In guter Näherung ist der erdmagnetische Tagesgang für eine feste (geographische) Poldistanz θ eine reine Funktion der Ortszeit T und als solche darstellbar als Summe harmonischer Schwingungen zur Grundperiode eines Sonnentages:

$$S(\theta, T) = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^M S_m(\theta) e^{imT} .$$

Dabei ist S eine der magnetischen Feldkomponenten oder auch die Potentialfunktion U. Die Zeit ist im Winkelmaß gerechnet, so daß Ortszeit-Mitternacht dem Winkel 2π entspricht. Die Längenabhängigkeit (λ) der komplexen FOURIER Amplituden S_m in Weltzeit t ist mit $T=t+\lambda \exp(im \lambda)$, so daß die in der Entwicklung nach Kugelfunktionen auftretenden zugeordneten Kugelfunk-

tionen alle von der gleichen Ordnung m sind. Für die FOURIER Amplitude des Potentials etwa habe diese Entwicklung die Form

$$U_m(r, \theta) = R_E \sum_{n=m}^N a_n^m(r) P_n^m(\cos\theta)$$

mit R_E als Erdradius und $r \geq R_E$ als Abstand vom Erdmittelpunkt. Die Entwicklungskoeffizienten a_n^m sind dabei zu verstehen als Summen von äußeren (E) und inneren (I) Potentialanteilen:

$$a_n^m(r) = E_n^m \left(\frac{r}{R_E}\right)^n + I_n^m \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+1}$$

In der Entwicklung dominieren die Terme mit $n-m$ ungerade. Das aus ihnen gebildete Potential beschreibt das Feld von Stromsystemen, die symmetrisch zum Äquator sind und auf der Nord- und Südhalbkugel in entgegengesetzten Richtungen durchflossen werden, wie dies für den Tagesgang insbesondere während der Zeit der Tagundnachtgleiche zutrifft.

Als Beispiel für eine solche Entwicklung sei diejenige von PARKINSON (1977) für das IGY (1957/58) genannt. Sie basiert auf dem mittleren Tagesgang an 64 weltweit verteilten Observatorien während der Monate März/April und September/Okttober. Tabelliert sind die Koeffizienten $a_n^m(R_E)$ in Einheiten von 0.1 nT:

n/m	1		2		3	
1	-15	-29i				
2	186	-3	20	+25i		
3	1	+2	-92	19	-7	-11i
4	-44	3	2	4	14	-17
5			4	-11	-1	-2
6					0	3

3. Das alte Z/H Verfahren

In diesen bis $N = m+3$ geführten Reihen sind eindeutig die Terme mit $n = m+1$ am größten. Läßt man alle übrigen Terme weg, so erhält man den Potentialansatz für das ursprüngliche Z/H Verfahren,

$$(1) \quad U_m = R_E a_{m+1}^m P_{m+1}^m,$$

aus dem sich die Harmonischen der Feldkomponenten mit $P_{m+1}^m = f_{m+1}^m \sin^m \theta \cos \theta$ wie folgt ableiten ($r=R_E$):

$$B_{\theta,m} = - \frac{1}{R_E} \frac{\partial U_m}{\partial \theta} = - \frac{U_m}{R_E} \cdot \frac{m \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta}$$

$$(2) \quad B_{\lambda,m} = - \frac{1}{R_E \sin \theta} \frac{\partial U_m}{\partial \lambda} = - \frac{U_m}{R_E} \cdot \frac{im}{\sin \theta}$$

$$B_{r,m} = - \frac{\partial U_m}{\partial r} = - \{ (m+1) E_{m+1}^m - (m+2) I_{m+1}^m \} P_{m+1}^m.$$

Bei der Differentiation nach λ ist die $\exp(im \lambda)$ -Abhängigkeit der FOURIER Amplituden berücksichtigt worden. In SCHMIDT'scher Normierung der P_m^n lautet der Normierungsfaktor

$$f_{m+1}^m = \frac{\sqrt{2(2m+1)!}}{2^m m!}$$

Die in den H-Komponenten auftretenden Summen $a_n^m(R_E) = E_n^m + I_n^m$ und die in der Z-Komponente auftretende Differenz dieser Koeffizienten enthält in ihrem Verhältnis zueinander eine Aussage über die Eindringtiefe im Verhältnis zum Erdradius:

$$C_n/R_E : = \frac{1}{n+1} \frac{E_n^m - \frac{n+1}{n} I_n^m}{E_n^m + I_n^m}$$

für alle $m = 0, 1, \dots, n$. Es läßt sich zeigen, daß die so definierte Eindringtiefe C_n für $|C_n| \ll R_E/(n+1)$ asymptotisch gegen einen von n unabhängigen Grenzwert C_0 strebt, zu verstehen als Eindringtiefe eines quasi-homogenen Feldes in einen leitfähigen Halbraum.

Einsetzen von C_n in (2) ergibt

$$B_r = - \frac{U_m}{R_E} \cdot (m+1)(m+2) \cdot C_{m+1}/R_E.$$

Daraus folgen als Bestimmungsgleichungen von C_n aus dem Z/H-Verhältnis

$$(3) \quad C_{m+1}/R_E = \frac{\text{im}}{\sin\theta(m+1)(m+2)} B_{r,m}/B_{\lambda,m}$$

$$C_{m+1}/R_E = \frac{m \cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta \cos\theta(m+1)(m+2)} B_{r,m}/B_{\theta,m}$$

Für eine konsistente Bestimmung muß die Zusatzbedingung

$$(4) \quad B_{\lambda,m}/B_{\theta,m} = \frac{\text{im} \cos\theta}{m \cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

erfüllt sein. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Man kann aber ihre Erfüllung dadurch erreichen, daß man gedrehte "Sq-effektive" Koordinaten mit einer neuen "Sq-effektiven" Breite des Beobachtungsortes einführt. Näheres steht im Protokoll des Grafrath Kolloquiums 1974.

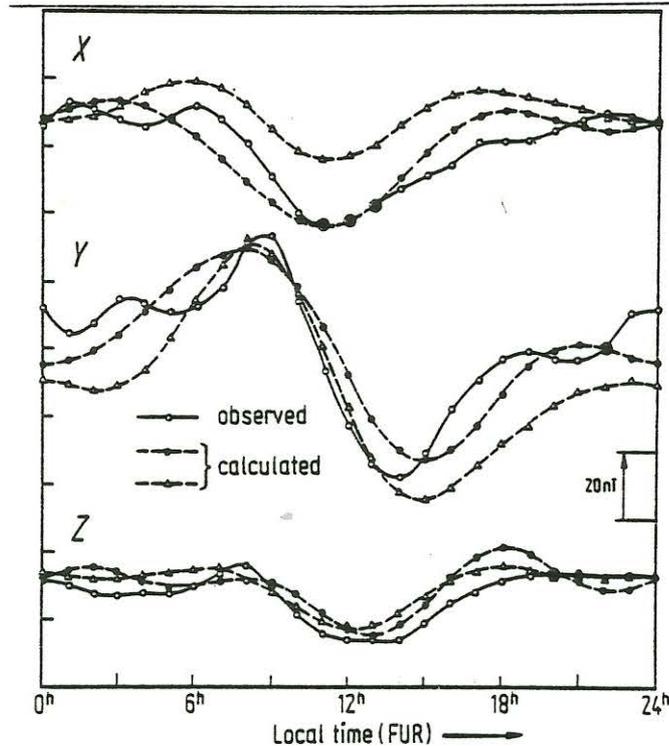
4. Das neue Z/H-Verfahren

In der praktischen Durchführung erwies sich die notwendige Koordinatentransformation oftmals als sehr künstlich. Auch waren insbesondere für $m=1$ und $m=2$ die berechneten Eindringtiefen nicht immer im Einklang mit den Ergebnissen anderer Verfahren. Es soll daher versucht werden, ein der wirklichen Struktur des Sq-Feldes besser angepaßtes Verfahren zu entwickeln. Wie bisher sollen dabei aber nur die Beobachtungen an einem Ort verwandt werden.

Man entnimmt der Koeffiziententabelle unmittelbar, daß die zur Kugelfunktion P_{m+3}^m gehörigen Terme relativ groß sind, insbesondere bei der Grundperiode $m=1$. Dies ist eine allgemeine Erfahrung. Sie wird von WINCH (1981) aus der Struktur der Windsysteme abgeleitet, die nach dem Dynamoprinzip die ionosphärischen Sq-Stromsysteme verursachen.

Die Abbildung soll zeigen, wie unzureichend die P_{m+1}^m -Terme alleine den Sq-Gang in mittleren Breiten wiedergeben. Dargestellt ist mit offenen Kreisen der beobachtete mittlere Tagesgang des Observatoriums Fürstfeldbruck für den Monat März 1958. Er wird verglichen mit dem errechneten Tagesgang, wenn man von den tabellierten a_n^m Koeffizienten entweder nur die-

jenigen mit $n = m+1$ benutzt (Dreiecke) oder alle Koeffizienten bis $n = m+3$.



Es versteht sich, daß der aus einer weltweiten Analyse abgeleitete Tagesgang den beobachteten nicht in allen Einzelheiten wiedergeben kann. Doch die Diskrepanz ist insbesondere für die Nordkomponente X unübersehbar, wenn nur jeweils ein Term für jede Harmonische verwendet wird. Offensichtlich reicht er nicht aus, um den Nulldurchgang dieser Komponente im Zentrum des Sq-Systems genau gering zu erfassen.

Die Übereinstimmung läßt sich verbessern, wenn man die Terme a_{m+3}^m hinzunimmt, für das Potential also den erweiterten Ansatz

$$(5) \quad U_m = R_E \cdot \{a_{m+1}^m P_{m+1}^m + a_{m+3}^m P_{m+3}^m\} = U_m^{(0)} \{1 + \beta_m g_m(\theta)\}$$

wählt. Hierin ist $U_m^{(0)} = R_E a_{m+1}^m P_{m+1}^m$ das Potential von Gl.(1),

$$\beta_m = a_{m+3}^m / a_{m+1}^m$$

das Verhältnis der Entwicklungskoeffizienten und

$$g_m(\theta) = \frac{P_{m+3}^m}{P_{m+1}^m} = \sqrt{\frac{2m+3}{3m+3}} \left(m + \frac{5}{2}\right) \cdot \left\{\cos^2\theta - \frac{3}{2m+5}\right\}$$

das Verhältnis der zugehörigen Kugelfunktionen mit

$$P_{m+3}^m = f_{m+3}^m \sin^m\theta \left\{\cos^3\theta - 3 \cos\theta/(2m+5)\right\} \quad \text{und}$$

$$f_{m+3}^m = \frac{\sqrt{(2m+3)!/3}}{2^m m!} \cdot \frac{2m+5}{2m+2}$$

in SCHMIDTScher Normierung. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} g_m'(\theta) &= \frac{d P_{m+3}^m / d\theta}{d P_{m+1}^m / d\theta} = \\ &= \sqrt{\frac{2m+3}{3m+3}} \left(m + \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{m \cos^2\theta \left(\cos^2\theta - \frac{3}{2m+5}\right) - \sin^2\theta \left(3 \cos^2\theta - \frac{3}{2m+5}\right)}{m^2 \cos^2\theta - \sin^2\theta} \end{aligned}$$

Damit lassen sich die aus dem erweiterten Potentialansatz (4) abgeleiteten Feldkomponenten wie folgt schreiben:

$$B_{\theta,m} = - \frac{U_m^{(o)}}{R_E} \cdot \frac{m \cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta \cos\theta} \{1 + \beta_m g_m'(\theta)\}$$

$$(6) \quad B_{\lambda,m} = - \frac{imU_m^{(o)}}{R_E \sin\theta} \cdot \{1 + \beta_m g_m(\theta)\}$$

$$B_{r,m} = - \frac{U_m^{(o)}}{R_E} \cdot \left\{ (m+1)(m+2) C_{m+1} / R_E + \beta_m g_m(\theta) \cdot (m+3)(m+4) C_{m+3} / R_E \right\}$$

Der entscheidende Schritt des neuen Verfahrens besteht nun darin, die Eindringtiefen C_{m+1} und C_{m+3} gleichzusetzen. Auch wenn die Eindringtiefen des Tagesganges nur wenige 100 km betragen, ist dies keineswegs selbstverständlich, da ja für die 4. Harmonischen Kugelfunktionen bis zum Grad $n=7$ gebraucht werden. Trotzdem läßt sich die Voraussetzung $|C_n| \cdot (n+1) \ll R_E$ für

das asymptotische Verhalten der C_n aus der Erfahrung rechtfer-
tigen.

Indem also C_{m+1} und C_{m+3} durch ihre asymptotischen Werte
 C_0 ersetzt werden, erhält man in

$$(7) \quad C_0/R_E = \frac{\operatorname{im}\{1 + \beta_m g_m(\theta)\}}{\sin\theta\{(m+1)(m+2) + \beta_m g_m(\theta)(m+3)(m+4)\}} \cdot B_{r,m}/B_{\lambda,m}$$

$$C_0/R_E = \frac{(m \cos^2\theta - \sin^2\theta)\{1 + \beta_m g'_m(\theta)\}}{\sin\theta \cos\theta\{\dots\}} \cdot B_{r,m}/B_{\theta,m}$$

neue Bestimmungsgleichungen für die Eindringtiefen. Sie führen
nur dann auf identische Tiefen, wenn das gewählte Verhältnis β_m
der Potentialkoeffizienten die Zusatzbedingung

$$(8) \quad \beta_m = \frac{\operatorname{im} \cos\theta - B_{\lambda,m}/B_{\theta,m} \{m \cos^2\theta - \sin^2\theta\}}{g'_m(\theta) \{m \cos^2\theta - \sin^2\theta\} B_{\lambda,m}/B_{\theta,m} - \operatorname{im} g_m(\theta) \cos\theta}$$

erfüllt. Die Zusatzbedingung (4) des alten Z/H Verfahrens be-
zieht sich jetzt auf den Sonderfall $\beta_m = 0$. Da sie näherungs-
weise stets erfüllt ist, werden sich relativ kleine β_m -Verhält-
nisse ergeben. Trotzdem kann ihr Einfluß auf die neuen Tiefen-
bestimmungen erheblich sein, da sie im Nenner von Gl. (7) mit
dem Faktor $(m+3)(m+4)$ auftreten, für $m=1$ also mit dem Faktor 20.

5. Eine Anwendung des neuen Verfahrens

Es bieten sich zwei Möglichkeiten, die durch den hinzukommen-
den Potentialterm bestimmten Korrekturterme einzufügen. Man kann
aus dem örtlich bestimmten Verhältnis der H-Komponenten zuein-
ander β_m nach Gl. (8) so festlegen, daß sich aus beiden Z/H-Ver-
hältnissen die gleichen Eindringtiefen ergeben. Diese Möglich-
keit ist noch nicht ausprobiert worden. Oder aber man entnimmt
einer Kugelfunktionsentwicklung zu einer nach Sonnenstand und
Sonnenaktivität vergleichbaren Zeit einen global gültigen β_m -
Wert. Hierzu sei vermerkt, daß globale Analysen des Tagesganges
zu durchaus vergleichbaren Ergebnissen führen, wie folgende

Aufstellung von β_m -Verhältnissen zeigt:

m	Malin (57/58)	Winch (64/65)	Parkinson (57/58-E)
1	-0.26 -0.05i	-0.13 -0.03i	-0.24 +0.01i
2	-0.10 +0.04 ¹⁾	-0.06 +0.02	-0.07 0.11
3	-	-	-0.09 0.08

1)
nur aus äußeren Anteilen

Dabei beziehen sich die beiden ersten Analysen auf den mittleren Tagesgang des ganzen Jahres (ohne D-Tage), diejenige von Parkinson auf den der Äquinoktien. Bezüglich der für $m=1$ abweichenden β -Werte bei Winch ist zu bedenken, daß seine Analyse ein Minimum der Sonnenaktivität betrifft, wodurch sich die Amplitude des Tagesganges halbiert und sich möglicherweise auch seine räumliche Struktur gegenüber dem Sonnenfleckennmaximum verändert.

BAHR (1985) hat nach dieser zweiten Methode den Tagesgang der Station "Rabenscheid" = RAB im Westerwald ausgewertet, und zwar nach Beobachtungen an 17 Tagen im Oktober 1982. Wegen dieser geringen Zahl von Tagen sind die Fehler in den Bestimmungen von C relativ groß. Die β_m -Werte hat er der globalen Analyse von Parkinson entnommen, mit geringfügigen Abweichungen gegenüber der obigen Tabelle und einem "extrapolierten" Wert für $m=4$.

Die folgende Tabelle enthält die resultierenden Eindringtiefen C in km, außerdem zum Vergleich diejenigen nach dem alten Z/H Verfahren und europäische Mittelwerte, die nach dem Z/Y Verfahren aus dem Tagesgang an 13 Observatorien während des IGY abgeleitet wurden. Die Zahlen in Klammern sind die Standardfehler der Absolutwerte |C|:

m	RAB (Z/H-alt)	RAB (Z/H-neu)	Europa (Z/Y)
1	455 -120i	775 -110i (180)	750 -155i (35)
2	405 -165	525 -330 (120)	565 -320 (25)
3	190 -235	420 -295 (140)	405 -295 (35)
4	110 - 35	270 -190 (80)	365 -215 (50)

Es ergeben sich aus allen drei Analysen konsistente Schätzwerte von C, soweit es ihre Phase und Frequenzabhängigkeit betrifft. Während sich aber für die Station im Westerwald nach dem alten Z/H Verfahren (nach Transformation auf Sq-effektive Koordinaten) deutlich abweichende Eindringtiefen vom europäischen Mittelwert ergeben, werden diese eine Anomalie des inneren Anteils vortäuschenden Unterschiede durch die Hinzunahme eines zweiten Potentialkoeffizienten praktisch ausgelöscht. Die so erzielbare Übereinstimmung mit einem regional gültigen Mittelwert deutet an, daß im vorliegenden Falle das neue Verfahren zu konsistenten Bestimmungen der Eindringtiefen führt.

Literatur

- K. Bahr: Magnetotellurische Messung des elektrischen Widerstandes der Erdkruste und des oberen Mantels in Gebieten mit lokalen und regionalen Leitfähigkeitsanomalien. Dissertation, Göttingen, 1985 .
- W.D. Parkinson: An analysis of the geomagnetic diurnal variation during the International Geophysical Year. Bureau of Mineral Resources, Geology and Geophysics (Dept. National Resources Canberra/Australien), Bulletin 173, (1977) .
- U. Schmucker: Erdmagnetische Tiefensondierung mit langperiodischen Variationen. Protokoll Kolloquium Erdmagn. Tiefensondierung Grafrath (1974), 313 .
- D.E. Winch: Spherical harmonic analysis of geomagnetic tides, 1964-1965. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 303 (1981), 1 .

Die in den Tabellen des letzten Abschnitts aufgeführten Zahlenwerte entstammen der Tabelle 2 in Sektion 4.1.1 und der Tabelle 7 in Sektion 4.2.2 des Teilbandes 2b (Geophysik), Landolt-Börnstein - Neue Serie, Springer-Verlag (1985).