

P. Weidelt

Charakterisierung von MT-Impedanzen für eindimensionale Leiter

Wir betrachten die folgende Frage:

Gegeben sind für M paarweise verschiedene Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$ die scheinbaren Widerstände ρ_{aj} und die Phasen φ_j , $j = 1, \dots, M$, oder auch

$$c_j := \sqrt{\frac{\rho_{aj}}{\omega_j \mu_0}} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_j \right) \right] = : g_j - i h_j, \quad j = 1, \dots, M. \quad (1)$$

Welche Bedingungen zwischen den Daten sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines eindimensionalen Leitfähigkeitsmodells?

Für einen vorgegebenen Datensatz (ω_j, c_j) , $j = 1, \dots, M$, sind notwendige Bedingungen (z.B. $0 \leq \varphi_j \leq \pi/2$) diagnostisch, wenn mindestens eine Bedingung verletzt ist, da dann mit Sicherheit kein 1D-Modell existiert. Umgekehrt sichert die Erfüllung aller notwendigen Bedingungen noch nicht die Existenz eines 1D-Modells. Hinreichende Bedingungen sind diagnostisch, wenn sie alle erfüllt sind; denn dann existiert mit Sicherheit ein 1D-Modell. Umgekehrt kann aus der Verletzung einer nur hinreichenden Bedingung noch nicht auf die eindimensionale Inkonsistenz des Datensatzes geschlossen werden. Das wäre nur dann zulässig, wenn die hinreichenden Bedingungen auch notwendig sind. In diesem Fall geben sie eine Charakterisierung der für 1D-Modelle zugelassenen Datensätze. - Auf die obige Frage sind bisher drei Antworten gegeben worden, die im folgenden ohne Beweis wiedergegeben werden sollen.

Antwort I (Parker 1980):

Notwendig und hinreichend für die Existenz eines 1D-Modells ist, daß sich c_j darstellen läßt durch

$$c_j = a_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n + i\omega_j}, \quad j = 1, \dots, M \quad (2)$$

mit $a_0 \geq 0, a_n > 0, b_n \geq 0, N \geq 0$.

Anmerkung: Praktisch wird der Konsistenztest dadurch ausgeführt, daß man eine (große) Zahl $N' \gg M$ und eine Folge $0 \leq b'_1 < b'_2 < \dots < b'_{N'}$, vorgibt und mit Hilfe quadratischer Programmierung [z.B. mit dem Programm NNLS von Lawson & Hanson (1974)] die nicht-negativen Zahlen a_0 und $a'_k, k=1, \dots, N'$ so bestimmt, daß die Summe der mit den inversen Varianzen $1/s_j^2$ bewichteten Residuenquadrate

$$Q := \sum_{j=1}^M \frac{1}{s_j^2} \left| c_j - a_0 - \sum_{k=1}^{N'} \frac{a'_k}{b'_k + i\omega_j} \right|^2 \quad (3)$$

möglichst klein wird. Höchstens $2M$ der Zahlen a'_k sind positiv. Es sei Q_{\min} der Minimalwert von Q . Wenn $Q_{\min} = 0$, führt (3) unter Beibehaltung der N' positiven a'_k auf (2). Wenn diese Darstellung $2M$ oder mehr positive Konstanten enthält, ist sie nicht eindeutig und kann insbesondere auf zwei verschiedene kanonische Darstellungen mit genau $2M$ Koeffizienten komprimiert werden (Weidelt 1985). Partialbruchdarstellungen vom Typ (2) lassen sich physikalisch als eine Folge dünner Schichten interpretieren (Parker 1980, Parker & Whaler 1981). - Die eigentliche Bedeutung der Minimierung von (3) liegt jedoch nicht im Konsistenztest sondern in der Konstruktion eines bestpassenden 1D-Modells.

Zur Vereinfachung soll für das Folgende nur der reguläre Fall angenommen werden, in dem für den Datensatz (ω_j, c_j) eine Darstellung vom Typ (2) mit mindestens $2M$ positiven Konstanten existiert. Im entarteten Fall enthält (2) weniger als $2M$ positive Konstanten. Es existiert dann nur ein einziges mit den Daten verträgliches 1D-Modell.

Antwort II (Weidelt 1986):

Definiert man mit g_j und h_j aus (1)

$$\alpha_{kj} := (-\omega_j^2)^k / \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^M (\omega_\ell^2 - \omega_j^2), \quad (4)$$

$$\beta_{2k} := \sum_{j=1}^M \alpha_{kj} h_j / \omega_j \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^M} \right\} \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (5a)$$

$$\beta_{2k+1} := \sum_{j=1}^M \alpha_{kj} g_j \quad (5b)$$

und bildet damit die symmetrischen Determinanten der Ordnung k ,

$$\Delta_k^{(i)} := \begin{vmatrix} \beta_i & \beta_{i+1} & \dots & \beta_{i+k-1} \\ \beta_{i+1} & \beta_{i+2} & \dots & \beta_{i+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i+k-1} & \beta_{i+k} & \dots & \beta_{i+2k-2} \end{vmatrix} = \det(\beta_{i+m+n-2}),$$

$m, n = 1, \dots, k$, so gilt:

Notwendig und hinreichend für die Existenz eines regulären eindimensionalen Leitfähigkeitmodells sind die $2M$ Vorzeichenbedingungen

$$\Delta_k^{(i)} > 0, \quad i = 0, 1 \text{ und } k = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Anmerkung: Die Bedingungen (6) lauten explizit

a) für $M = 1$:

$$h_1 / \omega_1 > 0, \quad g_1 > 0; \quad (7a,b)$$

b) für $M = 2$:

$$k = 1: \quad \frac{h_2 / \omega_2 - h_1 / \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} < 0, \quad \frac{g_2 - g_1}{\omega_2 - \omega_1} < 0, \quad (8a,b)$$

$$k = 2 : \left| \frac{c_2 - c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 < \frac{h_1 h_2}{\omega_1 \omega_2}, \quad \left| \frac{\omega_2 c_2 - \omega_1 c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 < g_1 g_2. \quad (9a,b)$$

Antwort III (Yee & Paulson 1986) :

Sind D_k und \bar{D}_k die k -dimensionalen hermiteschen Determinanten (* = komplex - konjugiert)

$$D_k := \det \left\{ \frac{i(c_m - c_n^*)}{\omega_m + \omega_n} \right\}, \quad \bar{D}_k := \det \left\{ \frac{\omega_m c_m + \omega_n c_n^*}{\omega_m + \omega_n} \right\}, \quad (10a,b)$$

$m, n = 1, \dots, k$, so gilt:

Notwendig und hinreichend für die Existenz eines regulären eindimensionalen Leitfähigkeitsmodells sind die $2M$ Vorzeichenbedingungen

$$D_k > 0, \quad \bar{D}_k > 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Anmerkung: Die Bedingungen (11) lauten explizit

a) für $M = 1$:

$$h_1/\omega_1 > 0, \quad g_1 > 0; \quad (12a,b)$$

b) für $M = 2$:

$$k = 1 : h_1/\omega_1 > 0, \quad g_1 > 0 \quad (13a,b)$$

$$k = 2 : \left| \frac{c_2 - c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 < \frac{h_1 h_2}{\omega_1 \omega_2}, \quad \left| \frac{\omega_2 c_2 - \omega_1 c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right|^2 < g_1 g_2. \quad (14a,b)$$

Antwort III ist einfacher als Antwort II. Denn die Determinanten $\Delta_k(i)$ in (6) erfordern zu ihrer Konstruktion die Kenntnis aller Daten (ω_j, c_j) , $j = 1, \dots, M$ während für D_k und \bar{D}_k in (11) nur (ω_j, c_j) , $j = 1, \dots, k$ benötigt wird. Dies bedeutet,

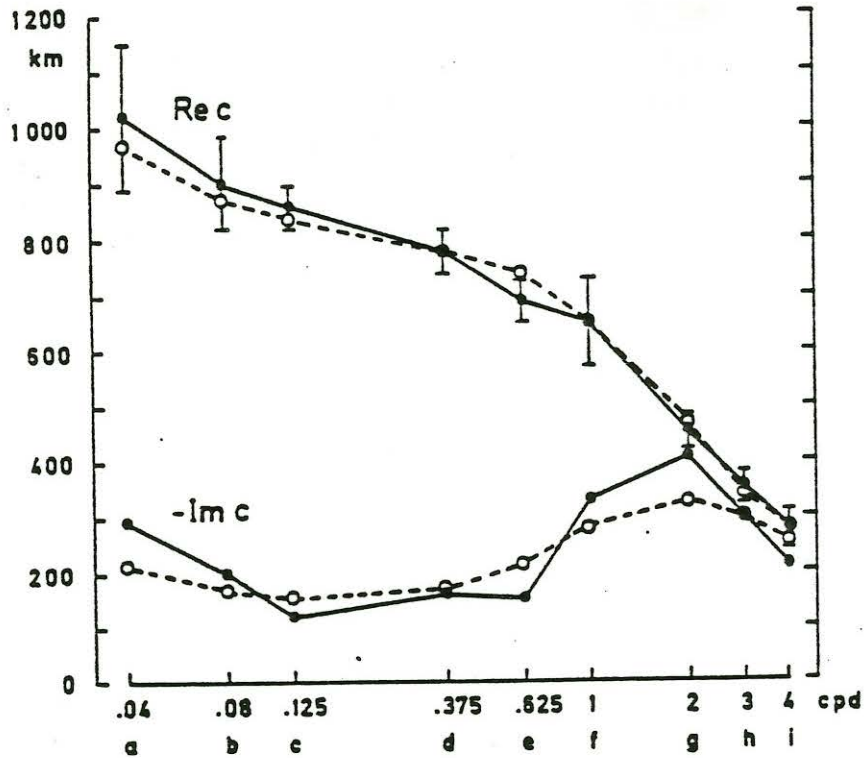
daß man bei Erweiterung des Datensatzes um eine Frequenz (ω_{M+1}, c_{M+1}) in Antwort III zu den bestehenden $2M$ Vorzeichenbedingungen nur noch zwei weitere hinzuzufügen hat, die die Konsistenz zwischen den neuen Daten und der Gesamtheit der alten Daten (M Frequenzen) prüfen. - Im obigen Beispiel wird beim Übergang von $M = 1$ auf $M = 2$ der Satz (12a,b) lediglich um (14a,b) erweitert.

Die symmetrischen Bedingungen (8a,b) lassen sich also durch die einfacheren unsymmetrischen Bedingungen (13a,b) ersetzen. Diese Möglichkeit erkennt man auch sofort, wenn für $M = 2$ aus (5a) h_1/ω_1 und aus (5b) g_1 ermittelt wird:

$$h_1/\omega_1 = \omega_2^2 \beta_0 + \beta_2, \quad g_1 = \omega_2^2 \beta_1 + \beta_3.$$

Aus (6) folgt $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > \beta_1^2/\beta_0 > 0$, $\beta_3 = \beta_2^2/\beta_1 > 0$, so daß h_1/ω_1 und g_1 positiv sind.

Abb. 1 zeigt die Anwendung der Gleichungen (8a - 9b) oder (13a - 14b) auf reale Daten. Es handelt sich um die Dst/Sq-Übertragungsfunktion für europäische Observatorien von U. Schmucker. Die Meßdaten (schwarze Punkte) sind in guter Näherung mit einem eindimensionalen Modell verträglich, wie der Vergleich mit dem bestpassenden 1D-Modell (offene Kreise) zeigt. Die Residuen liegen meist innerhalb der Fehlergrenzen. Die Tafel am Fuß der Abbildung zeigt das Ergebnis des Konsistenztests für Frequenzpaare. Trotz der guten Datenqualität sind benachbarte Frequenzen im allgemeinen inkonsistent (Diagonale!). Für größere Frequenzabstände (linke untere Ecke) treten keine Konsistenzprobleme auf.



	a	b	c	d	e	f	g	h
b	+							
c	-	-						
d	+	+	+					
e	+	+	+	-				
f	+	+	+	-	-			
g	+	+	+	-	-	-		
h	+	+	+	+	-	+	-	
i	+	+	+	+	-	+	-	-

Abb. 1

Die abschließende Abb.2 soll an einem Beispiel den Inhalt der Ungleichungen (9a,b) oder (14a,b) veranschaulichen. Es sei für eine Frequenz ω_1 die Impedanz c_1 gegeben. Wir fügen eine weitere Frequenz ω_2 hinzu und fragen, in welchem Gebiet der komplexen Impedanzebene c_2 liegen muß, um mit c_1 ein konsistentes Paar zu ergeben. Aus (9a,b) oder (14a,b) folgt durch einfache Rechnung, daß c_2 in dem Gebiet liegen muß, daß durch die beiden Kreise

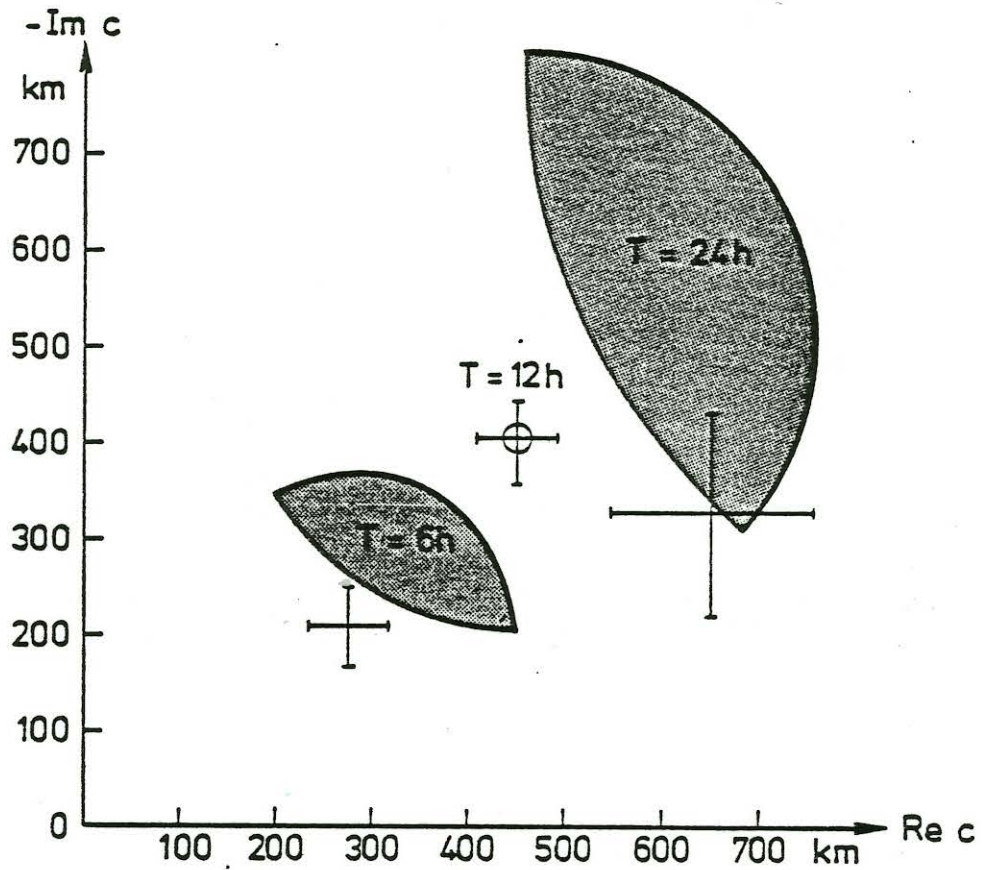


Abb. 2

- 1) mit dem Radius $R = \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{2\omega_1\omega_2} h_1$ um $c = (g_1, -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} h_1)$
- 2) mit dem Radius $R = \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{2\omega_2^2} g_1$ um $c = (\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_2^2} g_1, -\frac{\omega_1}{\omega_2} h_1)$

begrenzt wird.

Abb.2 zeigt für $\omega_1 = 2\pi/12h$ und $c_1 = (450, -405)km$ die erlaubten Lagen von c_2 für $\omega_2 = 2\pi/6h$ und $\omega_2 = 2\pi/24h$. Durch Kreuze eingezeichnet sind jeweils die tatsächlichen Schätzwerte mit

Fehlerbalken. Wenn man den Schätzwert für $T = 12h$ als exakt annimmt, existiert im Rahmen der Fehlergrenzen für $T = 6h$ kein 1D-Modell. (Tatsächlich ist aber der Fehler von c_1 zu berücksichtigen.)

Literatur

- Lawson, C.L. & Hanson, R.J. : Solving least squares problems, Englewood-Cliffs: Prentice Hall 1974
- Parker, R.L.: The inverse problem of electromagnetic induction: existence and construction of solutions based on incomplete data. J. Geophys. Res., 85, 4421-4428, 1980
- Parker, R.L. & Whaler, K.A.: Numerical methods for establishing solution to the inverse problem of electromagnetic induction. J. Geophys. Res., 86, 9574-9584, 1981
- Weidelt, P.: Construction of conductance bounds from magnetotelluric impedances. J. Geophys., 57, 191-206, 1985
- Weidelt, P.: Discrete frequency inequalities for magnetotelluric impedances of one-dimensional conductors. J. Geophys., 59, 171-176, 1986
- Yee, E. & Paulson, K.V.: Necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the one-dimensional magnetotelluric inverse problem. Submitted to: Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 1986