U. SCHMUCKER

Dr. LARSENs Interpretation des "Remote Reference" Verfahrens

In diesem von GAMBLE et al. (1979) vorgeschlagenen Verfahren geht es im wesentlichen darum, von systematischen Fehlern befreite Absolutwerte der Impedanzen Z_{ij} zu gewinnen. Die Bestimmungsgleichungen dürfen also keine power Spektren enthalten – da diese bezüglich ihrer Erwartungswerte stets überschätzt werden - sondern ausschließlich Kreuzspektren ohne systematischen Fehler. Es ist dann aber nicht mehr unmittelbar einsichtig, auf welches Ausgleichsproblem sich die resultierenden Schätzwerte beziehen, falls sie dies überhaupt tun. Hier sei eine von LARSEN gefundene Deutung mitgeteilt. Sie wird vereinfachend am univariaten Problem erläutert. Eine Erweiterung auf den bivariaten Fall bereitet keine Schwierigkeit.

Es seien E_1, B_1 und E_2, B_2 die aus Registrierungen an zwei getrennten Stationen abgeleiteten komplexen FOURIER Amplituden des tellurischen und dazu orthogonalen magnetischen Feldes für eine feste Frequenz. Eine Ausgleichsrechnung bezüglich der univariaten Ansätze

$$E_1 = Z_1 B_1 + \delta E_1 , \quad E_2 = Z_2 B_2 + \delta E_2$$

$$B_1 = A \; B_2 + \delta B_1 ,$$

welche die power Spektren $<|\delta E_1|^2>$ etc. der Residuen minimiert, ergibt als Schätzwerte

$$Z_1 = <E_1 B_1^*>/N_1 , \quad Z_2 = <E_2 B_2^*>/N_2$$

$$A = <B_1 B_2^*>/N_2$$

mit $N_i = <|B_i|^2>$, $i = 1, 2$; <> bedeutet Mittelwert, z.B. über viele Registrierungen.

Bezieht man in entsprechender Weise das tellurische Feld der einen Stationen auf das Magnetfeld der anderen, setzt man also etwa

$$E_1 = Z_{12} B_2 + \delta E_{12} ,$$

so erhält man für die gemischte Impedanz den Schätzwert

$$Z_{12} = <E_1 B_2^*>/N_2 .$$

Aus der Identität $Z_1\, A = Z_{12}$ folgt der nur aus Kreuzspektren abgeleitete Schätzwert

$$Z_1' = Z_{12}\, A^{-1} = \langle E_1\, B_2^*\rangle / \langle B_1\, B_2^*\rangle$$

des remote reference Verfahrens. Sein systematischer Fehler sollte Null sein, während sich sein zufallsbedingter Fehler additiv aus den Fehlern von Z_{12} und A zusammensetzen sollte.

In diesem Sinne wäre Z_1' (und entsprechend Z_2') ein Schätzwert, der sowohl $\langle|\delta E_{12}|^2\rangle$ als auch $\langle|\delta B_1|^2$ minimiert. Es gibt aber noch eine andere, direktere Deutung: Man bilde die Kovarianz der Residuen δE_1 und δE_2,

$$\mathrm{cov}\{\delta E_1, \delta E_2\} = \langle \delta E_1\, \delta E_2^*\rangle = \langle (E_1 - Z_1\, B_1)(E_2 - Z_2\, B_2)^* \rangle$$

und sorge dafür, daß ihr Realteil (oder ihr Imaginärteil)

$$\langle \mathrm{Re}\{\delta E_1\}\, \mathrm{Re}\,\{\delta E_2\} + \mathrm{Im}\,\{\delta E_1\}\, \mathrm{Im}\,\{\delta E_2\} \rangle$$

durch die richtige Wahl von Z_1 und Z_2 minimiert wird. Aus den Normalgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial Z_1}\{\langle \cdots\cdot \rangle\} = \mathrm{Re}\,\{-\langle B_1\, E_2^*\rangle + \langle B_1\, B_2^*\rangle\, Z_2^*\} = \mathrm{Im}\,\{\cdots\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_2}\{\langle \cdots\cdot \rangle\} = \mathrm{Re}\,\{-\langle E_1\, B_2^*\rangle + Z_1\, \langle B_1\, B_2^*\rangle\} = \mathrm{Im}\,\{\cdots\} = 0$$

folgen Bestimmungsgleichungen, die mit denjenigen für das remote reference Verfahren identisch sind.

Die Schätzwerte Z_1' und Z_2' sind also so bestimmt, daß die nicht mit dem örtlichen Magnetfeld korrelierten tellurischen Feldanteile auch möglichst wenig untereinander korreliert sind. Die Residuen werden so gewissermaßen in einen räumlich kohärenten und einen räumlich nicht-kohärenten Anteil aufgespaltet, wobei der erstgenannte Anteil so klein wie möglich gehalten wird. Aus der Bedingung, daß die Kohärenz dieser Residuen höchstens gleich Eins ist, folgt ferner die Ungleichung

$$\langle|\delta E_1|^2\rangle \cdot \langle|\delta E_2|^2\rangle \geq |\langle\delta E_1\, \delta E_2^*\rangle|^2 \quad .$$

Das Produkt der bei einer einfachen Ausgleichsrechnung minimierten power Spektren der Residuen ist also mindestens so groß wie der quadrierte Absolutwert der Kovarianz beider Residuen.

Literatur

Gamble, T.D., W.M. Goubau, J. Clarke: Magnetotellurics with a remote magnetic reference. Geophysics 44 (1979), 53.

Larsen, J.: Smooth robust one dimensional EM response functions. Vortrag Neuchâtel workshop 1986 (4-1) .