

P. WEIDELT

Extremalmodelle für die integrierte Leitfähigkeit

Das magnetotellurische Umkehrproblem ist instabil, so daß sich zu einem Datensatz mehrere befriedigende Modelle konstruieren lassen. Dies wird sehr anschaulich an der COPROD-Studie von Jones (1980) illustriert. Zwei Lösungswege bieten sich als Ausweg an: Entweder wird das Problem stabilisiert, indem man bekannte oder vermutete Eigenschaften der Leitfähigkeitsverteilung in Form von Nebenbedingungen berücksichtigt oder man versucht, geophysikalisch interessante Eigenschaften zu isolieren, die allen mit den Daten verträglichen Modellen gemeinsam sind. Die Lösung des zweiten Problems kann man im Prinzip dadurch versuchen, daß man entweder mit der Monte Carlo Methode den Raum der zulässigen Modelle zu erforschen versucht, oder daß man direkt das Modell zu konstruieren versucht, in dem die gesuchte geophysikalisch interessante Eigenschaft ihren Extremwert annimmt. Feste Grundlagen für Die Monte Carlo Methode als Hilfsmittel zur Lösung geophysikalischer Umkehraufgaben wurden von Anderssen und Seneta (1971, 1972) gelegt, während die Methode der Extremalmodelle im wesentlichen von Parker (1972, 1974, 1975) entwickelt wurde. Als erste Anwendung dieser Methode auf das magnetotellurische Umkehrproblem bestimmt Parker (1982) aus einem vorgegebenen Datensatz dasjenige Modell, das einen idealen Leiter in der geringstmöglichen Tiefe aufweist: Das Leitfähigkeitsmodell ist dann oberhalb dieser Tiefe eindeutig, aber unterhalb dieser Tiefe völlig beliebig.

Jeder endliche Satz von Impedanzen erlaubt keine Festlegung von Schranken für die Leitfähigkeit in einer vorgegebenen Tiefe z : In der Tiefe z kannentweder eine dünne isolierende Schicht oder eine dünne Schicht mit unbegrenzter Leitfähigkeit aber endlichem Leitwert liegen. Dagegen werden im allgemeinen räumliche Mittelwerte der Leitfähigkeit durch die Daten beschränkt. Dies wurde in Einzelheiten von Oldenburg (1983) gezeigt. Die Existenz von Schranken für Leitfähigkeitsmittelwerte, oder noch einfacher für die Leitwertfunktion

$$S(z) = \int_0^z \sigma(s) ds$$

ist ein Ausdruck der Tatsache, daß das Umkehrproblem für $S(z)$ korrekt gestellt ("well-posed") ist (V.I. Dmitriev, pers. Mitt.).

Wir befassen uns im folgenden mit der Konstruktion von Schranken für Leitfähigkeitsmittelwerten unter Berücksichtigung von a priori Schranken σ_- und σ_+ für $\sigma(z)$, so daß $\sigma_- \leq \sigma(z) \leq \sigma_+$ in $0 \leq z \leq \infty$. Im Gegensatz zu dem pragmatischen Ansatz von Oldenburg (1983), der seine approximative Methode auf viele Frequenzen anwendet und auch noch Beobachtungsfehler berücksichtigt, beschränken wir uns im folgenden auf die Konstruktion der exakten Extremalmodelle für wenige Frequenzen. Nur im Zusammenhang mit der COPROD-Studie werden kurz approximative Extremalmodelle für eine Vielzahl von Frequenzen betrachtet.

1. Notwendige Bedingungen für Extremalmodelle

Unter der Annahme von SI-Einheiten, dem Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ und Vernachlässigung des Verschiebungsstromes reduzieren sich die Maxwell'schen Gleichungen für eine 1-D Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$ und ein quasihomogenes induzierendes Magnetfeld in y-Richtung auf

$$E_x'(z, \omega) = -i\omega\mu_0 H_y(z, \omega), \quad H_y(z, \omega) = -\sigma(z) E_x(z, \omega) \quad (1.1)$$

oder nach Elimination von H_y

$$f''(z, \omega) = i\omega\mu_0 \sigma(z) f(z, \omega) \quad (1.2)$$

mit $f(z, \omega) = E_x(z, \omega)$. Im folgenden wird die Schmuckersche Übertragungsfunktion c verwendet, deren theoretischer Wert für $\sigma(z)$ und M Frequenzen ω_j , $j = 1, \dots, M$ definiert ist durch

$$c_j[\sigma] = \frac{E_x(a, \omega_j)}{i\omega_j \mu_0 H_x(a, \omega_j)} = - \frac{f(a, \omega_j)}{f'(a, \omega_j)}, \quad (1.3)$$

wobei f eine Lösung von (1.2) mit $f' \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ ist. Den Funktionalen $c_j[\sigma]$ entsprechen die M komplexen Daten c_j , die zunächst als fehlerfrei angenommen seien. Das Interpretationsproblem besteht dann darin, zumindest ein Modell $\sigma(z)$ zu finden, so daß $c_j[\sigma] = c_j$, $j = 1, \dots, M$. Wenn keine Gefahr zur Verwechslung von Funktionalen und Daten besteht, wird $[\sigma]$ fortgelassen.

Innerhalb der Klasse der mit den Daten konsistenten Modelle sind wir an jenen beiden Modellen interessiert, die für einen vorgegebenen Tiefenbereich $z_1 \leq z \leq z_2$ den Leitfähigkeitsmittelwert

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z) dz \quad (1.4)$$

maximieren und minimieren. Wenn zusätzlich der Bereich der erlaubten Leitfähigkeiten noch durch σ_- und σ_+ beschränkt wird, stellt sich das folgende nichtlineare Programmierproblem:

Minimiere

$$Q = \int_0^{\infty} w(z) \sigma(z) dz \quad (1.5)$$

mit

$$w(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < z_1 \\ \frac{1}{z_2 - z_1}, & z_1 < z < z_2, \quad Q = \bar{\sigma}_{\min} \\ \frac{-1}{z_2 - z_1}, & z_1 < z < z_2, \quad Q = -\bar{\sigma}_{\max} \\ 0, & z > z_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

mit den Nebenbedingungen

$$C_j[\sigma] - C_j = 0, \quad j = 1, \dots, M \quad (1.7)$$

und

$$0 \leq \sigma_- \leq \sigma(z) \leq \sigma_+ \leq \infty. \quad (1.8)$$

Die Lagrange-Funktion des Problems ist

$$\begin{aligned} L[\sigma] = & \int_0^{\infty} w(z) \sigma(z) dz + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^M \lambda_j \{ C_j[\sigma] - C_j \} - \\ & - \int_0^{\infty} [\mu_+(z) \{ \sigma_+ - \sigma(z) \} + \mu_-(z) \{ \sigma(z) - \sigma_- \}] dz. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die M komplexen Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j berücksichtigen die Nebenbedingungen in Gleichheitsform, während die beiden nicht-negativen Funktionen $\mu_-(z)$ und $\mu_+(z)$ als verallgemeinerte Lagrangesche Multiplikatoren für die Erfül-

lung der Nebenbedingungen in Ungleichheitsform sorgen und die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \mu_-(z) = 0, \sigma(z) > \sigma_-, & \quad \mu_+(z) = 0, \sigma(z) \leq \sigma_+ \\ \mu_-(z) \geq 0, \sigma(z) = \sigma_-, & \quad \mu_+(z) \geq 0, \sigma(z) = \sigma_+ \end{aligned} \quad (1.10)$$

(z.B. Pearson, 1974, p. 1113). Die nur formal eingeführten Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j beschreiben die Empfindlichkeit des Zielfunktional $Q[\sigma]$ gegenüber Änderungen in den Daten $c_j = g_j - h_j$ (z.B. Pearson, 1974, p.1118)

$$R \lambda_j = - \frac{\partial Q}{\partial g_j}, \quad \lambda_j = - \frac{\partial Q}{\partial h_j} \quad (1.11)$$

Auch $\mu_+(z)$ und $\mu_-(z)$ lassen sich als Maße für die Empfindlichkeit von Q gegenüber Änderungen von σ_+ und σ_- deuten: Ändert man diese Größen zwischen z und $z + \Delta z$ ab zu σ_+^1 und σ_-^1 und ist $\Delta \sigma_+ = (\sigma_+^1 - \sigma_+) \cdot \Delta z$, so ergibt sich im Grenzfall $\Delta z \rightarrow 0$

$$\mu_+(z) = - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_+}, \quad \mu_-(z) = + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_-} \quad (1.12)$$

Dies bedeutet, daß sich Q nicht ändert, wenn diese Nebenbedingungen im Punkt z nicht wirksam sind und daß sich Q nicht vergrößert (verkleinert), wenn σ_+ (σ_-) anwächst. Diese Ergebnisse waren natürlich zu erwarten.

Als notwendige Bedingung für ein Extremum von $Q[\sigma]$ muß die erste Variation von L nach σ verschwinden. Dies ergibt

$$W(z) + R \sum \lambda_j F_j(z) + \mu_+(z) - \mu_-(z) = 0 \quad (1.13)$$

wobei $F_j(z)$ die Fréchet-Ableitung des Funktionals $c_j[\sigma]$ ist und gegeben ist durch

$$\delta c_j[\sigma] = \int_0^{\infty} F_j(z) \delta \sigma(z) dz \quad (1.14)$$

mit

$$F_j(z) = - (W_j \mu_0 f_j^2(z)) \quad (1.15)$$

(z.B. Parker, 1977), wobei $f(z)$ mit $f'(0) = 1$ und $f'(z) \rightarrow 0$

für $z \rightarrow \infty$. Die Funktion F_j erfüllt die Dgl.

$$F_j''' = 4i\omega_j \mu_0 F_j' (F_j F_j)' \quad (1.16)$$

Nimmt man nun an, daß in einem Intervall $a \leq z \leq b$, das entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb $z_1 \leq z \leq z_2$ gelegen sei, $\sigma(z)$ weder sein Minimum σ_- noch sein Maximum σ_+ annimmt, d.h., $\sigma_- \leq \sigma(z) \leq \sigma_+$, so ist nach (1.10) $\mu_-(z) = \mu_+(z) = 0$ und (1.13) lautet

$$w(z) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^M \lambda_j F_j(z) = 0, \quad a \leq z \leq b. \quad (1.17)$$

Diese Gleichung jedoch hat nur die triviale Lösung $\lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, M$ falls $w(z) = 0$, und keine Lösung für $w(z) \neq 0$. Intuitiv ist dies klar, da eine endliche Zahl von "oszillierenden" Funktionen $\operatorname{Re} F_j(z)$ und $\operatorname{Im} F_j(z)$ durch lineare Kombination keine "Konstante" $w(z)$ ergeben können. Der exakte Beweis sei hier unterdrückt. Als wichtige Konsequenz kann $\sigma(z)$ in Extremalmodellen nur die Leitfähigkeitswerte σ_- und σ_+ annehmen. Definiert man eine "Entscheidungsfunktion" $D(z)$ durch

$$D(z) = w(z) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^M \lambda_j F_j(z), \quad (1.18)$$

so bestehen die Extremalmodelle aus einer Folge von Schichten mit den alternierenden Leitfähigkeiten σ_- und σ_+ und es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(z) = \sigma_+ \\ \sigma(z) = \sigma_- \end{array} \right\} \text{ für } D(z) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \\ \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Grenzflächen treten auf, wenn $D(z)$ sein Vorzeichen wechselt. Dies ist ein nichtlineares Problem, da $D(z)$ nichtlinear von der Lage der Schichtgrenzen abhängt. Erschwert wird das Problem auch dadurch, daß keine Aussage über die Anzahl der Schichten gemacht wird.

Im Spezialfall $\sigma_+ = \infty$ schrumpfen die Schichten mit $\sigma(z) = \sigma_+$ zu dünnen Schichten zusammen. $D(z)$ ist dann überall nicht-negativ, kann aber an den Stellen der dünnen Schichten diskontinuierliche Steigungen aufweisen.

2. Ergebnisse

Ohne auf die Rechnungen im einzelnen einzugehen sollen hier nur einige Ergebnisse vorgesteelt werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auch auf Extremalmodelle für die integrierte Leitfähigkeit,

$$S(z_2) = \int_0^{z_2} \sigma(s) ds.$$

a) $\sigma_- = 0, \sigma_+ = \infty$:

In diesem Fall wird keine a priori Information vorausgesetzt. Die Extremalmodelle sind einfach eine Folge dünner Schichten. Fig. 1 zeigt die Struktur der Modelle S_{\max} und S_{\min} für eine Frequenz ω . Die Beobachtungsdaten sind

$$c = g - ih = |c| e^{-i\psi}.$$

Für kleines z_2 besteht das Extremalmodell für S_{\max} aus einer dünnen Schicht im Niveau $z = z_2 - 0$ und aus einem idealen Leiter in größerer Tiefe. Wenn $z_2/|c|$ einen von ψ abhängigen Grenzwert überschreitet (ausgezogene Kurve links unten), tritt noch eine dritte Schicht an der Oberfläche $z = 0$ hinzu. Bei $z_2 = |c| \sec \psi$ wird $S_{\max}(z_2) = \infty$. Die "Schwerpunktstiefe" der induzierten Ströme ist z^* . Wenn die Leitfähigkeitsverteilung nicht nur aus einer dünnen Schicht besteht, müssen Leiter ober- und unterhalb von z^* liegen. $S_{\min}(z_2)$ verschwindet für $z_2 \leq g$, weil dann die Daten durch eine einzige Schicht im Niveau $z = g = z^*$ erklärt werden können. Für $z_2 > g$ tritt noch eine Schicht bei $z = 0$ hinzu. Wenn z_2 einen Grenzwert (obere rechte Kurve) überschreitet, bewegt sich diese Schicht abwärts und erreicht für $z_2 \rightarrow \infty$ das Niveau z^* .

Die zugehörigen Grenzkurven für $S(z_2)$ sind in Fig. 2 wiedergegeben. In den schattierten Bereichen müssen alle Modelle liegen, die mit dem 2-Daten-Problem verträglich sind. S (Abszisse) wurde normiert durch den Leitwert $\sigma_a |c|$. Dabei ist $\sigma_a = 1/\rho_a$ die scheinbare Leitfähigkeit und $\rho_a = \omega \mu_0 |c|^2$. Die zulässigen Bereiche verschmälern sich für $\psi \rightarrow 0$ und $\psi \rightarrow 90^\circ$, weil in diesen Grenzfällen zu den Daten nur ein Modell gehört: Für $\psi = 0$ ein idealer Leiter in der Tiefe $z = |c|$ und für $\psi = 90^\circ$ eine dünne Schicht mit dem Leitwert $1/(\omega \mu_0 |c|)$ an der Erdoberfläche.

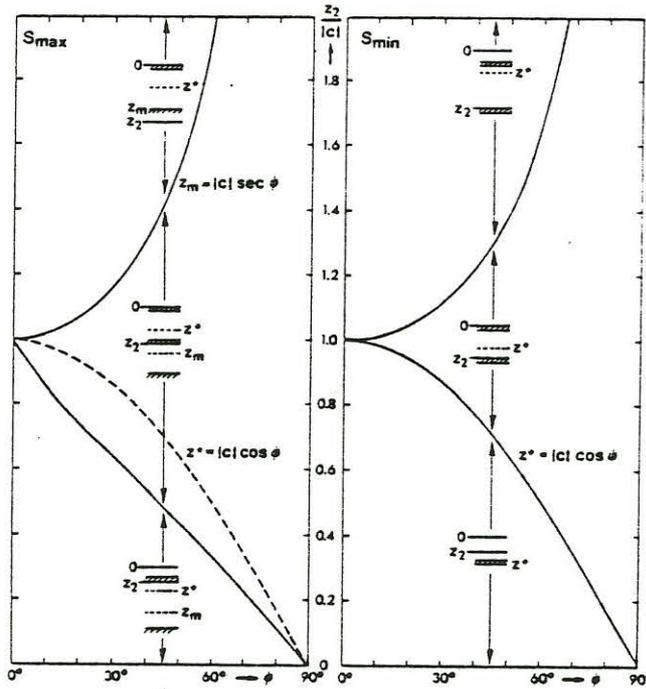


Fig. 1:
Struktur der Ex-
tremalmodelle für
eine Frequenz

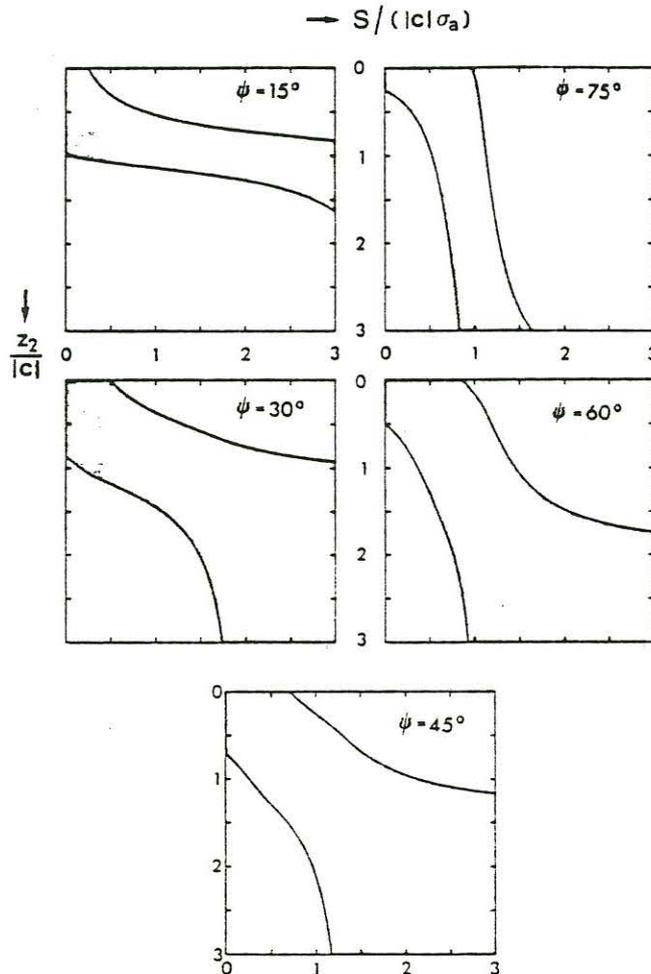


Fig. 2:
Schranken für $S(z_2)$
für eine Frequenz

Im folgenden Beispiel werden Extremalmodelle für reale Daten mit zwei Frequenzen gezeigt. Der Datensatz besteht aus den Übertragungsfunktionen für die erste und vierte Sq-Harmonische mit Zahlenwerten repräsentativ für Europa:

$$1 \text{ cpd: } c_1 = (575 - i260) \text{ km}$$

$$4 \text{ cpd: } c_2 = (290 - i275) \text{ km}$$

Fig. 3 zeigt die Tiefe z der dünnen Schichten (Abszisse) als Funktion von z_2 (Ordinate). Diese Abbildung vermittelt eine Vorstellung von den Nichtlinearitäten des Problems: Auftauchen neuer Schichten bei $z = 0$, das Zusammenwachsen von Schichten mit idealen Leitern (mit zusätzlicher Markierung) sowie das Verschwinden und Wiederkehren von Leitern im Unendlichen.

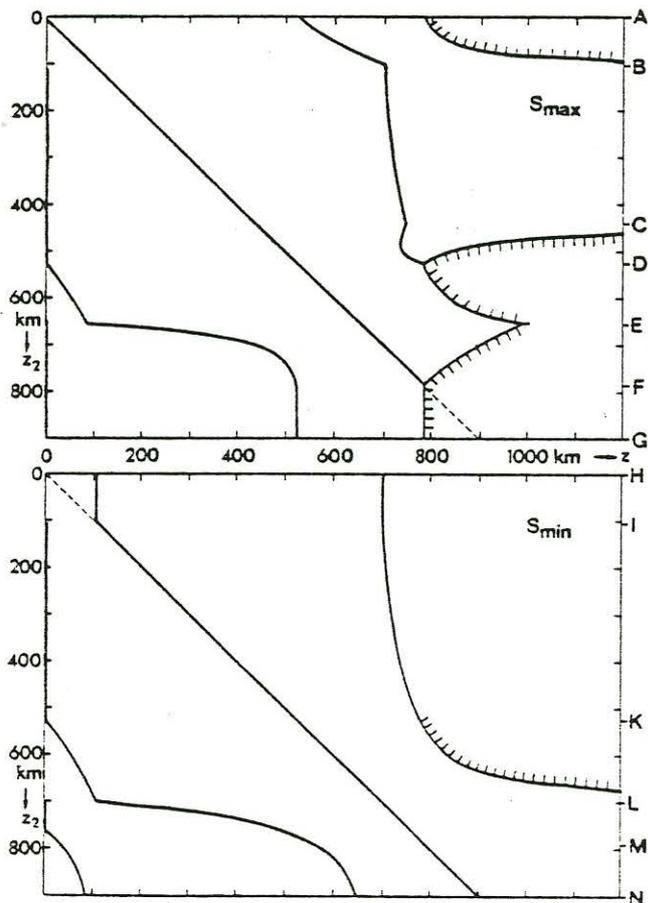


Fig. 3:

Die Lage der leitenden Schichten für die 2-Frequenz-Extremalmodelle

Die resultierenden Grenzkurven für $S(z_2)$ gibt Fig. 4 wieder. Hier sind auch die Grenzkurven für die beiden Frequenzen getrennt dargestellt. Es zeigt sich, daß die gleichzeitige Betrachtung der beiden Frequenzen insbesondere die untere Schranke S_{\min} stark anhebt, während die obere Schranke S_{\max} nur geringfügig abgesenkt wird verglichen mit der Kurve, die jeweils aus dem kleineren Wert für S_{\max} bei Einzelfrequenzauswertung entsteht.

Das nächste Beispiel nimmt Bezug auf die COPROD-Studie von Jones (1980). Gestrichelt dargestellt sind in Fig. 5 die $S(z_2)$ -Funktionen der diversen Interpreten sowie die Grenzkurven, die sich bei Ein-

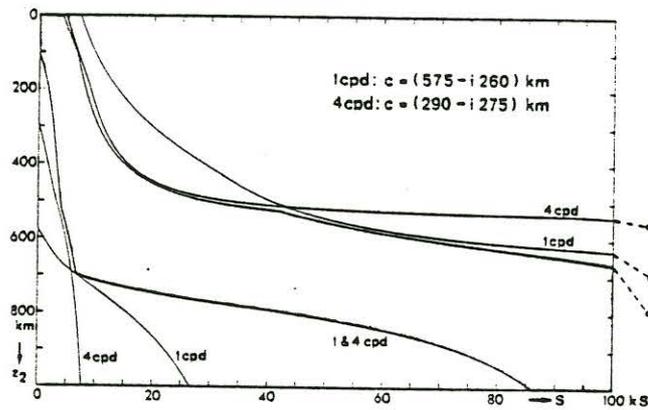


Fig. 4: Schranken für $S(z_2)$ aus zwei S_q -Harmonischen bei Einzelfrequenz- und Zweifrequenzauswertung

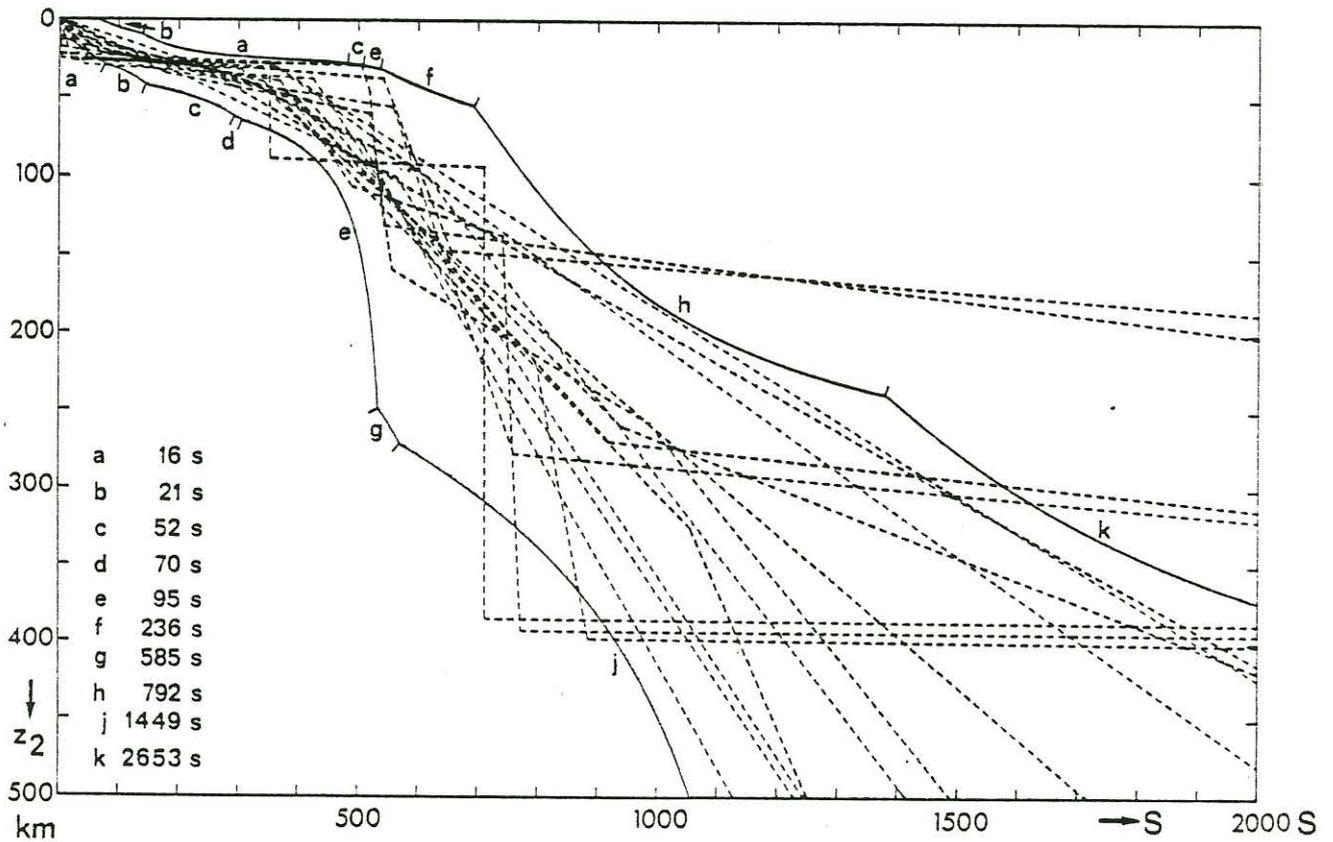


Fig. 5: $S(z_2)$ -Funktionen für verschiedene Interpretationen der COPROD-Daten sowie Schranken aus Einzelfrequenzauswertung

zelfreuzenzauswertung ergeben, wenn für jedes z_2 jeweils der kleinste der resultierenden S_{\max} -Werte und der größte der resultierenden S_{\min} -Werte genommen wird. Im Fall guter Daten ist diese Eingrenzung sehr konservativ. Im vorliegenden Fall eines sehr mittelmäßigen Datensatzes füllen die Modelle den ihnen zur Verfügung gestellten Raum voll aus.

b) $\underline{\sigma_- = 0, \sigma_+ < \infty}$:

Fig. 6 zeigt, wie sich Fig. 2 modifiziert, wenn man $\sigma(z)$ durch σ_+ nach oben begrenzt. σ_+ läßt sich solange verringern, bis man für S_{\min} und S_{\max} dieselben Modelle erhält. Dies sind einfache Zwei- oder Dreischicht Modelle. Diese Fälle sind durch die gestrichelten Linien angedeutet.

Für $\psi = 45^\circ$ ist die Struktur einiger repräsentativer Leitfähigkeitsmodelle in Fig. 7 dargestellt. Links ist für $\sigma_+ = \infty$ nur die Lage der Leiter angegeben. Die Ähnlichkeit der Modelle für $\sigma_+ = \infty$ und $\sigma_+ = 4 \sigma_a$ ist noch leicht zu erkennen. Für $\sigma_+ = \sigma_a$ wäre das Modell für S_{\max} der homogene Halbraum. Deshalb ist eine kleine Abweichung davon gewählt worden. Im Grenzfall $\sigma_+ = 0.84 \sigma_a$ reduzieren sich die Modelle von S_{\min} und S_{\max} auf ein Zweischichtmodell bestehend aus einer Schicht mit der Mächtigkeit $2.21 |c|$ und einem Isolator darunter.

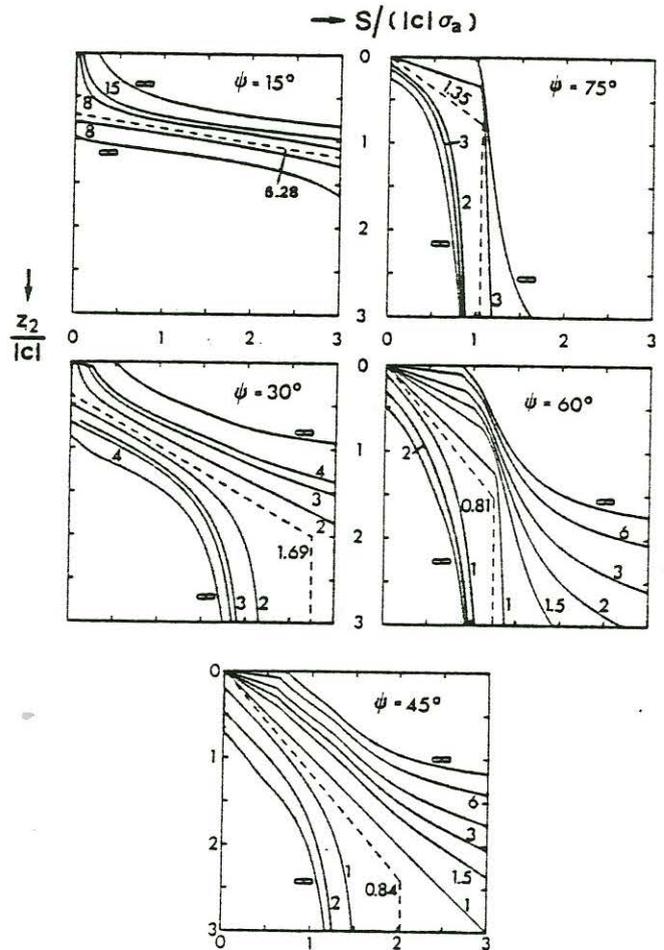


Fig. 6: Schranken für $S(z_2)$ für Begrenzung der Leitfähigkeit nach oben. Die Zahlen an den Kurven geben σ_+ in Einheiten von σ_a an.

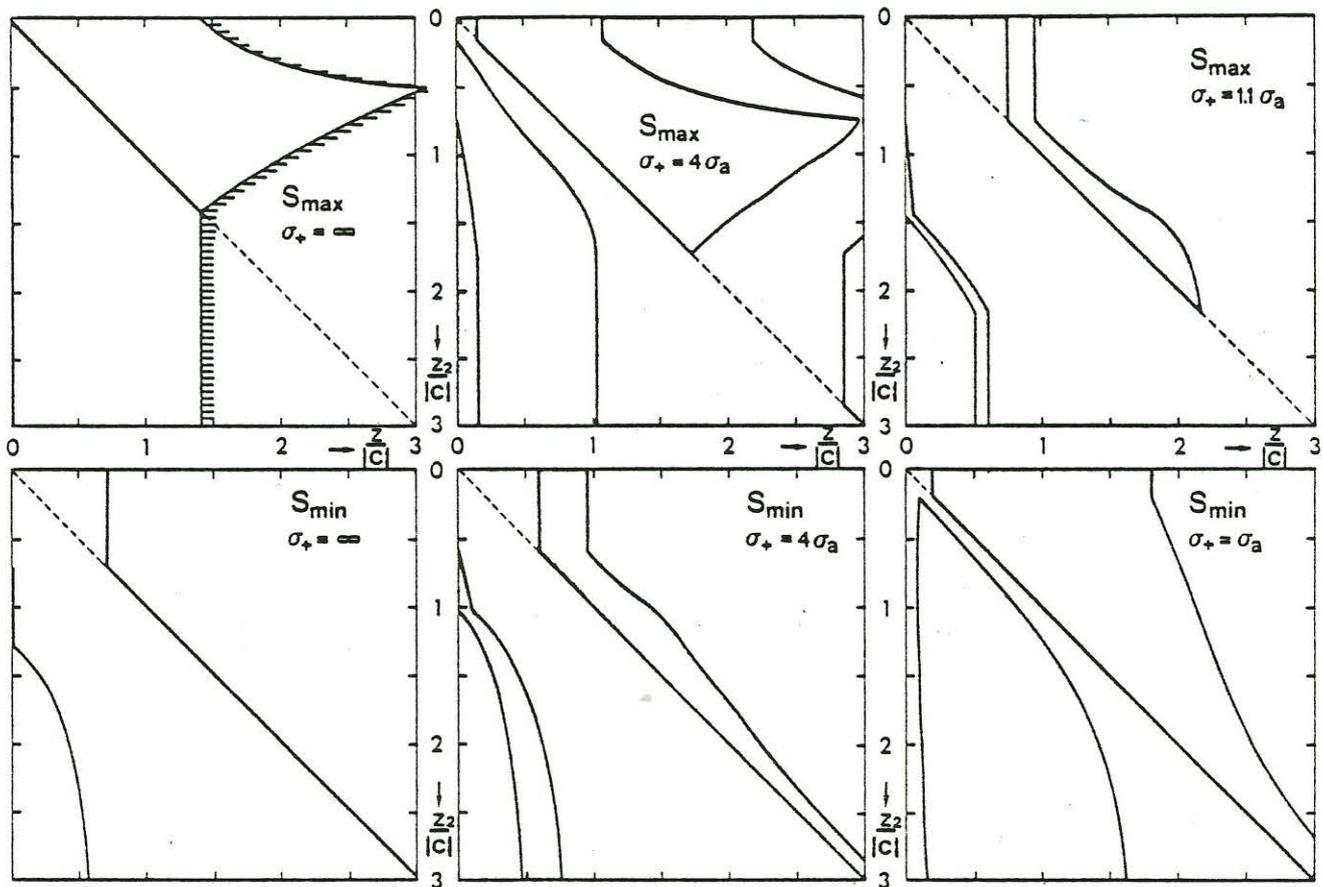


Fig. 7: Struktur der Extremalmodelle für $\psi = 45^\circ$ und verschiedene Werte für σ_+ . Die Gebiete mit $\sigma(z) = \sigma_+$ sind schattiert.

Literatur:

Anderssen, R.S. and Seneta, E.: A simple statistical estimation procedure for Monte Carlo Inversion in geophysics.-Pure Appl. Geophys., 91, 5-13, 1971.

Anderssen, R.S. and Seneta, E.: A simple statistical estimation procedure for Monte Carlo Inversion in geophysics. II: Efficiency and Hempel's paradox.-Pure Appl. Geophys., 96, 5-14, 1972.

Jones, A.G.: Report on the COPROD study. Paper read at the "Fifth Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth and Moon", Istanbul, August 18-23, 1980.

Oldenburg, D.W.: Funnel functions in linear and non-linear appraisal.-J. Geophys. Res., 88, 7387-7398, 1983.

Parker, R.L.: Inverse theory with grossly inadequate data.-Geophys. J. R.Astron. Soc., 29, 123-138, 1972.

Parker, R.L.: Best bounds on density and depth from gravity data.-Geophysics, 39, 644-649, 1974.

Parker, R.L.: The theory of ideal bodies for gravity interpretation.-Geophys. J. R. Astron. Soc., 42, 315-334, 1975.

Parker, R.L.: The existence of a region inaccessible to magnetotelluric sounding.-Geophys. J. R. Astron. Soc., 68, 165-170, 1982.

Pearson, C.E. Ed.: Handbook of Applied Mathematics.-New York: Van Nostrand Reinhold Co. 1974.