

P. WEIDELT

Impedanzungleichungen für diskrete Frequenzen

Für eine eindimensionale Leitfähigkeitsverteilung läßt sich die Frequenzabhängigkeit der Schmuckerschen Übertragungsfunktion $c(\omega)$ darstellen durch

$$c(\omega) = a_0 + \int_0^{\infty} \frac{a(\lambda) d\lambda}{\lambda + i\omega}, \quad a_0 \geq 0, \quad a(\lambda) \geq 0 \quad (1)$$

(Weidelt 1972, Parker 1980). Dies führt dazu, daß reale Daten bezüglich ihrer Frequenzabhängigkeit Konsistenzrelationen erfüllen müssen, um durch (1) darstellbar zu sein. Einige dieser Konsistenzbeziehungen wurden von Weidelt (1972) angegeben. Es sei $c = g - i h$ und $c'(\omega) = dc/d\omega$. Dann lassen sich die dortigen Ungleichungen (2.33a,b) und (2.34a,b) auch schreiben

$$|c'| \leq h/\omega, \quad |(\omega c)'| \leq g, \quad (2a,b)$$

$$|c' + \omega c''| \leq h/\omega, \quad |(\omega c)' + \omega(\omega c)''| \leq g. \quad (3a,b)$$

Diese Ungleichungen verlangen Ableitungen nach der Frequenz, die an verrauschten Meßdaten meist nur unsicher durchführbar ist. Es zeigt sich jedoch, daß für die obigen Ungleichungen Versionen existieren, die nur diskrete Frequenzen benutzen.

α) Es seien ω_1 und ω_2 zwei verschiedene Frequenzen. Dann lauten die Analoga von (2a,b) für diskrete Frequenzen

$$\left| \frac{c_2 - c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right| \leq \left(\frac{h_1 h_2}{\omega_1 \omega_2} \right)^{1/2}, \quad \left| \frac{\omega_2 c_2 - \omega_1 c_1}{\omega_2 - \omega_1} \right| \leq (g_1 g_2)^{1/2}. \quad (4a,b)$$

β) Es seien ω_1, ω_2 und ω_3 drei äquidistante Frequenzen mit $\omega_1 = \omega_2 - \Delta, \omega_3 = \omega_2 + \Delta$ (z.B. drei aufeinanderfolgende Harmonische). Dann lauten die diskreten Versionen von (3a,b)

$$\left| \frac{c_3 - c_1}{2\Delta} + \omega_2 \frac{c_3 - 2c_2 + c_1}{\Delta^2} \right| \leq \left(\frac{h_1 h_3}{\omega_1 \omega_3} \right)^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\left| \frac{\omega_3 c_3 - \omega_1 c_1}{2\Delta} + \omega_2 \frac{\omega_3 c_3 - 2\omega_2 c_2 + \omega_1 c_1}{\Delta^2} \right| \leq (g_1 g_3)^{1/2}. \quad (5b)$$

Benutzt wurden die Abkürzungen $c_m = c(\omega_m)$, etc. Die Beweise ergeben sich einfach durch Einsetzen von (1). So erhält man

z.B. für die komplizierteste Ungleichung (5b)

$$A := \frac{\omega_2 c_3 - \omega_1 c_1}{2\Delta} + \omega_2 \frac{\omega_3 c_3 - 2\omega_2 c_2 + \omega_1 c_1}{\Delta^2} = Q_0 + \int_0^\infty \frac{\lambda(2-i\omega_1) a(\lambda) d\lambda}{(\lambda+i\omega_1)(\lambda+i\omega_2)(\lambda+i\omega_3)}$$

$$|A| \leq Q_0 + \int_0^\infty \frac{\lambda a(\lambda) d\lambda}{|(\lambda+i\omega_1)(\lambda+i\omega_3)|} = Q_0 + \int_0^\infty \frac{\lambda a(\lambda) d\lambda}{(\lambda^2+\omega_1^2)^{1/2} (\lambda^2+\omega_3^2)^{1/2}}$$

Mit der Schwarzischen Ungleichung für das Funktionspaar

$$\left(\frac{\lambda a}{\lambda^2+\omega_1^2}\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\lambda a}{\lambda^2+\omega_3^2}\right)^{1/2}$$

und der Ungleichung für das geometrische und arithmetische Mittel folgt daraus

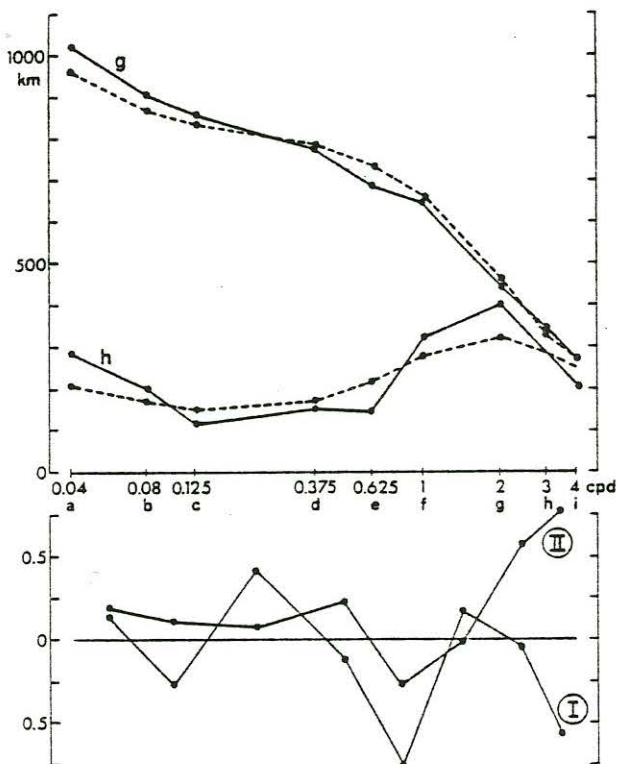
$$|A|^2 \leq \left[Q_0 + \int_0^\infty \frac{\lambda a(\lambda) d\lambda}{\lambda^2+\omega_1^2} \right] \cdot \left[Q_0 + \int_0^\infty \frac{\lambda a(\lambda) d\lambda}{\lambda^2+\omega_3^2} \right] = g_1 g_3.$$

Wenn $a_0 = 0$ ist, gilt in (4a,b) und (5a,b) das Gleichheitszeichen, wenn $a(\lambda)$ nur aus einer δ -Funktion besteht. Wenn jedoch $a_0 > 0$ ist, gilt in (4b) und (5b) das Gleichheitszeichen nur für $c(\omega) = a_0$.

Im Fall $\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega$ lautet (4b) : $|c(\omega)|^2 \leq g(\omega)g(0)$.

Das nebenstehende Beispiel

zeigt eine Anwendung von (4a,b) auf langperiodische Daten von Schmucker, die sich durch diesen Test als leicht inkonsistent erweisen. Getestet wurden jeweils aufeinanderfolgende Frequenzen. Am Fuß der Abbildung ist das Testergebnis wiedergegeben, wenn mit (4a,b) jede Frequenz gegen jede andere getestet wird. Die Schärfe des Tests scheint mit dem Frequenzabstand abzunehmen.- Gestrichelt eingetragen ist die nach Parker (1980) gewonnene bestmögliche Anpassung durch ein 1D-Modell.



$$\textcircled{I} = 1 - \left| \frac{c_2 - c_1}{w_2 - w_1} \right| \left/ \left(\frac{h_1 h_2}{w_1 w_2} \right)^{1/2} \right. \quad \textcircled{II} = 1 - \left| \frac{w_2 c_2 - w_1 c_1}{w_2 - w_1} \right| \left/ (g_1 g_2)^{1/2} \right.$$

	a	b	c	d	e	f	g	h
b	+							
c	-	-						
d	+	+	+					
e	+	+	+	+				
f	+	+	+	+	+			
g	+	+	+	+	+	+		
h	+	+	+	+	+	+	+	
i	+	+	+	+	+	+	+	+

	a	b	c	d	e	f	g	h
b	+							
c	+	+						
d	+	+	+					
e	+	+	+	+				
f	+	+	+	+	+			
g	+	+	+	+	+	+		
h	+	+	+	+	+	+	+	
i	+	+	+	+	+	+	+	+

Literatur:

Parker, R.L.: The inverse problem of electromagnetic induction: Existence and construction of solutions based on incomplete data.- J. Geophys. Res., 85, 4421-4428, 1980.

Weidelt, P.: The inverse problem of geomagnetic induction.- Z.f. Geophys., 38, 257-289, 1972.