

H. RODEMANN

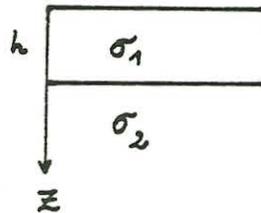
MT-2-Schicht-Umkehrung

Ausgangspunkt der folgenden Rechnung war die Frage, ob die Zweischicht-Formel in der Magnetotellurik in geschlossener Form nach den drei Modellparametern  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $h$  (Leitfähigkeiten und Mächtigkeit der ersten Schicht) aufgelöst werden kann, s. Skizze.

Im folgenden wird gezeigt, daß dies möglich ist, wenn die Impedanzen (oder  $\mathcal{G}_s$  und Phase) für drei verschiedene Frequenzen vorliegen, die nicht voneinander unabhängig sind.

Die Ausgangsgleichung für die Impedanz  $Z_{xy}(\omega) = Z(\omega)$  lautet:

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}} \cdot \frac{1 + R \cdot F(\omega)}{1 - R \cdot F(\omega)} \quad (1)$$



mit

$$R = \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} ; F(\omega) = e^{-2\sqrt{i\omega\sigma_1\mu} \cdot h}$$

Für die 3 Frequenzen  $\omega_j = 2\pi f_j ; j=1..3$  wird zur Abkürzung gesetzt:

$$Z_j = Z(\omega_j) ; q_j = \sqrt{\omega_j} ; W_j = Z_j / q_j ; F_j = F(\omega_j)$$

Aus (1) werden die Größen  $\sqrt{\sigma_1}$  und  $R$  eliminiert, so daß  $\sqrt{\sigma_1} \cdot h$  bestimmt werden kann.

Durch Kombination je zweier Frequenzen folgt:

$$(W_2 - W_1) F_1 F_2 R^2 + (W_2 + W_1) (F_2 - F_1) R - (W_2 - W_1) = 0 \quad (2)$$

und

$$(W_3 - W_1) F_1 F_3 R^2 + (W_3 + W_1) (F_3 - F_1) R - (W_3 - W_1) = 0 \quad (3)$$

Die Kombination von (2) und (3) ergibt für  $R$  den Ausdruck

$$R = \frac{(F_3 - F_2) \Delta_{31} \Delta_{21}}{F_3 (F_2 - F_1) \Delta_{31} - F_2 (F_3 - F_1) \Delta_{21}} \quad (4)$$

mit

$$\Delta_{21} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} ; \Delta_{31} = \frac{W_3 - W_1}{W_3 + W_1}$$

Einsetzen in (2) ergibt eine Gleichung, die nur noch die Unbekannte  $\sqrt{\sigma_1} \cdot h$  in Form von Produkten

$$F_1^{n_1} F_2^{n_2} F_3^{-n_3} = \left( e^{-2\sqrt{i\omega} \cdot \frac{h}{q_1}} \right)^{n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3} ; n_1 + n_2 + n_3 = 3$$

enthält:

$$A (F_1^2 F_2 + F_2 F_3^2) + B (F_1 F_2^2 + F_1 F_3^2) + \\ + C (F_1^2 F_3 + F_2^2 F_3) - 2 (A+B+C) F_1 F_2 F_3 = 0 \quad (5)$$

mit  $A = T_3 - T_4$ ;  $B = T_1 - T_3$ ;  $C = T_3 - T_2$ ;  
 $T_1 = \Delta_{21}^2 \Delta_{31}^2$ ;  $T_2 = \Delta_{31}^2$ ;  $T_3 = \Delta_{21} \Delta_{31}$ ;  $T_4 = \Delta_{21}^2$ .

Mit  $q_2 = q_1 (1+f)$ ;  $q_3 = q_1 (1+Qf)$  (5a)

gilt  $F_1^{m_1} F_2^{m_2} F_3^{m_3} = F_1^{3+f(m_2+Qm_3)}$

Sei  $G = F_1^f$ , so folgt aus (5) (5b)

$$A (G^{2Q} + 1) + B (G^{2Q-1} + G) + C (G^{Q+1} + G^{Q-1}) - 2 (A+B+C) G^Q = 0$$

Dies ist ein symmetrisches Polynom  $2Q$ -ten Grades in  $G$ , sofern  $Q$  ganzzahlig ist. Es ist geschlossen lösbar f.  $Q = 2, 3, 4$  u.  $-1, -2, -3$ .

Die Werte  $Q = -1, -2$  und  $-3$  führen bis auf eine Vertauschung der Frequenzen auf die gleichen Ergebnisse wie  $Q = 2, 3$  und  $4$ . Dies gilt auch für negative  $f$ -Werte, so daß die Bedingungen  $f > 0$ ,  $Q > 0$  die Allgemeinheit nicht einschränken ( $Q = 0$  und  $Q = 1$  bewirken, daß je zwei Frequenzen zusammenfallen).

Division von (6) durch  $G^Q$  ergibt die Form

$$A (G^Q + G^{-Q}) + B (G^{Q-1} + G^{-(Q-1)}) + C (G + G^{-1}) - 2 (A+B+C) = 0 \quad (6a)$$

(6a) wird nicht verändert, wenn  $G$  durch  $G' = \frac{1}{G}$  ersetzt wird. Also ist mit  $G$  auch  $G'$  eine Lösung von (6a).

Die  $2Q$  Lösungen zerfallen also in  $Q$  Paare  $G_{2i-1}$  und  $G_{2i} = \frac{1}{G_{2i-1}}$  mit  $i = 1 \dots Q$ , so daß entsprechend dem Vieta-Satz (6) darstellbar ist durch

$$\prod_{i=1}^Q (G^2 - S_i G + 1) = 0 \quad (7)$$

mit

$$S_i = G_{2i-1} + G_{2i} = G_{2i-1} + \frac{1}{G_{2i-1}} \quad (8)$$

Bei gegebenem  $S_i$  ergeben sich die  $G$  aus

$$G_{2i-1}^2 - S_i G_{2i-1} + 1 = 0 \text{ zu } G_{2i-1}, G_{2i} = \frac{1}{2} (S_i \pm \sqrt{S_i^2 - 4}) \quad (9)$$

Die Darstellung (7) läßt sich verwenden, um durch Koeffizientenvergleich (6) zu lösen. Dies gilt besonders für  $Q = 4$ , während bei Falle  $Q = 2$  und  $3$  einfacher lösbar sind. Ausmultiplizieren von (7) und setzen von  $S_4 = 2$  wegen der verschwindenden Koeffizientensumme, die auf  $G_7 = G_8 = 1$  als triviale Lösungen schließen läßt, führt auf

$$(G^8+1) - (2+S_1+S_2+S_3) \cdot (G^7+G) + (4+S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3+2(S_1+S_2+S_3))(G^6+G^2) - (6+3(S_1+S_2+S_3)+2(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)+S_1S_2S_3) \cdot (G^5+G^3) + (6+4(S_1+S_2+S_3)+2(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)+2S_1S_2S_3) \cdot G^4 = 0 \quad (10)$$

Vergleich mit (6) führt auf das Gleichungssystem

$$2 + S_1 + S_2 + S_3 = -\frac{B}{A} \quad (11a)$$

$$4 + 2(S_1 + S_2 + S_3) + S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3 = 0 \quad (11b)$$

$$6 + 3(S_1 + S_2 + S_3) + 2(S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3) + S_1S_2S_3 = -\frac{C}{A} \quad (11c)$$

für die drei Unbekannten  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$ , aus denen die  $G$ 's mit (9) berechenbar sind.

Nach Eliminierung von

$$S_3 = -\frac{1}{S_1S_2} \left( \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \quad (12)$$

und Substitution

$$P = S_1S_2; T = S_1 + S_2 \quad \text{mit} \quad S_{1,2} = \frac{1}{2} \left( T \pm \sqrt{T^2 - 4P} \right) \quad (13)$$

ergibt sich

$$P^3 - 2\frac{B}{A} \cdot P^2 + (2 + \frac{B}{A}) \left( \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \cdot P - \left( \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right)^2 = 0 \quad (14a)$$

und

$$T = -\left(2 + \frac{B}{A}\right) + \frac{1}{P} \left( \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \quad (14b)$$

Die kubische Gleichung in  $P$  (14a) ist analytisch lösbar (s. Bronstein & Semendjajew, 1975).

Die Werte für die  $G$ 's ergeben sich über (14b) und die beiden Wurzelausdrücke (13) und (9).

Der Fall  $Q = 2$  läßt sich analog behandeln, Division von (6) durch den Faktor  $G^2 - 2G + 1$  führt ebenso schnell zum Ziel: Aus

$$A(G^4+1) + (B+C)(G^3+G) - 2(A+B+C)G^2 = 0$$

folgt durch Division:

$$AG^2 + (2A+B+C)G + A = 0 \quad (15)$$

Ein Vergleich mit (9) führt auf

$$S_1 = -\left(2 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A}\right) \quad \text{und}$$

$$G_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\left(2 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A}\right) \pm \sqrt{\left(2 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A}\right)^2 - 4} \right)$$

Im Falle  $Q = 3$  mit (6):

$$A(G^6+1) + B(G^5+G) + C(G^4+G^2) - 2(A+B+C)G^2 = 0$$

führt die Division durch  $G^2 - 2G + 1$  auf

$$\tilde{A}(G^4+1) + \tilde{B}(G^3+G) + \tilde{C}G^2 = 0 \quad (16)$$

mit

$$\tilde{A} = A; \tilde{B} = B + 2A; \tilde{C} = 3A + 2B + C$$

(16) ist lösbar mit

$$S_{1,2} = \frac{1}{2\tilde{A}} \left( -\tilde{B} \pm \sqrt{\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C} + 8\tilde{A}^2} \right) \quad \text{und (9),} \quad (17a)$$

vgl. (Bronstein & Semendjajew, 1975, p. 119).

Das gleiche Ergebnis erhält man analog zu (10). Hierbei ergibt sich für  $S_1$  und  $S_2$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + S_1 + S_2 &= 2 + T = -B/A \\ 3 + 2(S_1 + S_2) + S_1 S_2 &= 3 + 2T + P = C/A \end{aligned}$$

vgl. (13), mit

$$\begin{aligned} T &= -(2 + B/A), \quad P = 1 + B/A + C/A \quad \text{und} \\ S_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( -(2 + B/A) \pm \sqrt{(2 + B/A)^2 - 4(1 + B/A + C/A)} \right) \end{aligned} \quad (17b)$$

Diese Lösung ist mit (17a) identisch.

In allen drei Fällen,  $Q = 2, 3$  und  $4$  ergeben sich Werte für den gesuchten Ausdruck  $\sqrt{\sigma_1} \cdot h$ , (vgl. (1) und (5b)), aus

$$V = \sqrt{\sigma_1} \cdot h = -\frac{\log G}{\sqrt{2}(1+i)\sqrt{\mu w_1} \cdot f} \quad (18)$$

Bei idealen Daten muß für  $\sqrt{\sigma_1} \cdot h$  ein positiv-reeller Wert resultieren. Dieses Kriterium kann dazu verwendet werden, aus mehreren  $G$ 's das richtige auszuwählen, bzw. bei realen Daten, z.B. mit der relativen Größe des Imaginärteils, ein Maß für die Abweichung von idealen 2-Schicht-Daten zu definieren. Mit  $G$  bzw.  $V = \sqrt{\sigma_1} \cdot h$  sind auch  $F_1, F_2$  und  $F_3$  bekannt, so daß im zweiten Schritt

$$R = \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \quad \text{aus (4) berechnet werden kann.}$$

Hieraus folgt der Leitfähigkeitsquotient

$$Q_u = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2 \quad (19)$$

und mit (1) die Leitfähigkeit  $\sigma_1$ ;

z.B. mit  $j = 1$ :

$$\sigma_1 = \frac{i\mu}{W_1^2} \cdot \left( \frac{1+RF_1}{1-RF_1} \right)^2$$

über  $Q$  und  $V$  sind damit auch  $\sigma_2$  und  $h$  zu berechnen:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{Q_u} \quad ; \quad h = \frac{V}{\sqrt{\sigma_1}}$$

In der Regel werden für die drei gesuchten Modellparameter  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $h$  komplexe Werte resultieren. Diese sechs reellen Größen entsprechen den sechs Eingabedaten: 3 Real- und 3 Imaginärteile der Impedanzen.

Zusätzlich zur Größe der Imaginärteile lassen sich Kriterien zur Abweichung von idealen 2-Schicht-Daten angeben:  $\sigma_1$  kann nach (20) auch mit  $j = 2$  oder  $3$

berechnet werden, für die Berechnung von R können statt (4) auch andere Gleichungen verwendet werden, die durch andere Kombination der 3 Frequenzen folgen, vgl. (2) und (3).

Hierdurch ergeben sich für  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  "Punktwolken", deren Ausdehnung als Maß für die Unsicherheit der berechneten Werte dienen kann.

Im folgenden werden einige Anwendungsbeispiele gezeigt. Tab. 1 zeigt eine Reihe möglicher Frequenzverhältnisse, in Abhängigkeit von den Parametern Q und f

	f = 1	f = 0.1	f = 5
Q	$f_1 : f_2 : f_3$	$f_1 : f_2 : f_3$	$f_1 : f_2 : f_3$
2	1 : 4 : 9	100 : 121 : 144	1 : 36 : 121
3	1 : 4 : 16	100 : 121 : 169	1 : 36 : 196
4	1 : 4 : 25	100 : 121 : 196	1 : 36 : 441

Tab. 1

Allgemein gilt  $f_1 : f_2 : f_3 = 1 : (1 + f)^2 : (1 + Qf)^2$

Die Beispiele zeigen, daß mit Q und f eine große Anzahl von Frequenzverhältnissen gewählt werden kann.

Die Umkehrung synthetischer 2-Schicht-Daten wird in Tab. 2 gezeigt. Für jedes Frequenztripel ist die Bedingung  $\sqrt{f_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_3})$  entsprechend  $Q = 2$  erfüllt.

**2-SCHICHT-UMKEHRUNG**

SCHICHT 1 WIDERST.(OHM\*M) 1 DICKE(M) 3  
 SCHICHT 2 WIDERST.(OHM\*M) 1000  
 FMIN(HZ) 10000 FMAX(HZ) 1000000 Z. D. SCHRITTE 10

NR.	FREQU	RHOS	FHI	RBO	ZBO	R1	R2	H
1	10000	1.48	15.04	14.31	4.34	0	0	0
2	40000	.76	38.17	.76	1.57	1	1000	0
3	90000	.91	46.27	.55	1.13	1	1000	0
4	160000	1	45.91	.87	.89	1	1000	0
5	250000	1.01	45.09	1.05	.72	1	1000	0
6	360000	1	44.94	1.03	.59	1	999.96	0
7	490000	1	44.98	1	.51	1	1000.1	0
8	640000	1	45	1	.44	1	999.88	0
9	810000	1	45	1	.4	1	1002	0
10	1000000	1	45	1	.36	0	0	0

Tab. 2

Die Tabelle zeigt die synthetischen Werte für  $\rho_s$  und  $\varphi$ ,  $\beta$  und  $Z$  der Bostik-Inversion und die berechneten Modellparameter  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  und  $h$  in SI-Einheiten. Es wurde ein Beispiel mit dem hohen Leitfähigkeitskontrast 1 : 1000, am hochfrequenten Ende der  $\rho_s$ -Kurve gewählt, um die Genauigkeit der Umkehrung zu zeigen.

Tab. 3 zeigt den Effekt einer statistischen Verfälschung der synthetischen Daten (Realteil und Imaginärteil der Impedanzen getrennt) um maximal 1%.

2-SCHICHT-UMKEHRUNG

SCHICHT 1 WIDERST.(OHM\*MM) 100 DICKE(M) 3000  
 SCHICHT 2 WIDERST.(OHM\*MM) 5  
 FMIN(HZ) 1E-03 FMAX(HZ) 100 Z. D. SCHRITTE 10  
 MAX. VERFAELSCHUNG D. IMPEDANZEN 1 %

NR.	FR/HZ	RS/OHM*MM	PHI/GRAD	RB/OHM*MM	ZB/M	R1/OHM*MM	R2/OHM*MM	H/M
1	0	5.86	49.2	5	27254	0	0	0
2	1.3	87.43	63.14	28.32	2921	99.71	5.12	2990.51
3	5.05	116.88	47.23	144.07	1712	99.66	4.82	2996.44
4	11.25	103.09	43.99	134.24	1077	100.05	6.93	2851.84
5	19.91	99.29	44.71	100.95	795	103.81	135.75	1676.29
6	31.02	99.69	45.03	96.9	638	100.71	103.95	745.03
7	44.59	100.01	45.03	99.38	533	99.05	219.66	3110.91
8	60.6	100.02	45	100.21	457	100.17	91.82	367.88
9	79.07	100	45	100.09	400	100.32	54.41	2461.25
10	100	100	45	99.99	356	0	0	0

Tab. 3

Für Frequenzen kleiner als 20 Hz wirkt sich die Verfälschung relativ wenig auf die Ergebnisse der Umkehrung aus, danach ergeben sich erhebliche Fehler für  $\rho_2$  und  $h$ . Dies liegt daran, daß sich bei höheren Frequenzen  $\rho_s$  und  $\varphi$  nur noch wenig ändern, so daß die in die Rechnung eingehenden Differenzen von  $\frac{Z}{\omega}$  durch die Verfälschung der Impedanzen stark beeinflußt werden. Die relativ hohe Fehlerabhängigkeit hat damit zu tun, daß mit wenigen Daten versucht wird, eine genaue Aussage über die Lage einer Diskontinuität zu machen. Wenn die benutzten Frequenzen jedoch im mittleren Bereich der  $\rho_s$ -Kurve und nicht zu dicht nebeneinander liegen, und die Daten eventuell zuvor geglättet werden, dann lassen sich auch bei wesentlich höheren Impedanz-Verfälschungen brauchbare Ergebnisse erzielen.

Eine Umkehrung unverfälschter synthetischer 3-Schicht-Daten zeigen die Tab. 4 und 5.

2-SCHICHT-UMKEHRUNG

SCHICHT 1 WIDERST.(OHM\*M) 100 DICKE(M) 100  
 SCHICHT 2 WIDERST.(OHM\*M) 1000 DICKE(M) 300  
 SCHICHT 3 WIDERST.(OHM\*M) 100  
 FMIN(HZ) 100 FMAX(HZ) 12100 Z. D. SCHRITTE 11

NR.	FR/HZ	RS/OHM*M	PHI/GRAD	RB/OHM*M	ZB/M	R1/OHM*M	R2/OHM*M	H/M
1	100	210.48	47.84	156.68	516	0	0	0
2	400	198.5	35.66	363.2	251	132.06	483.18	204.85
3	900	140.91	31.13	432.3	141	137.27	1030.69	146.54
4	1600	106.19	32.87	270.37	92	125.42	1536.4	127.85
5	2500	91.18	36.92	145.48	68	114.95	1950.37	118.98
6	3600	87.08	40.82	91.7	55	107.38	2180.46	113.19
7	4900	83.27	43.56	71.81	48	102.76	2167.29	109.1
8	6400	91.44	45.09	67.42	43	100.52	1955.57	106.18
9	8100	94.76	45.73	70.76	38	99.78	1664.12	104.03
10	10000	97.4	45.85	77.71	35	99.73	1396.14	102.41
11	12100	99.14	45.72	85.57	32	0	0	0

Tab. 4

FMIN(HZ) 1 FMAX(HZ) 121 Z. D. SCHRITTE 11

NR.	FR/HZ	RS/OHM*M	PHI/GRAD	RB/OHM*M	ZB/M	R1/OHM*M	R2/OHM*M	H/M
1	1	111.25	47.65	100.11	3754	0	0	0
2	4	123.35	49.52	100.79	1976	209.44	99.86	523.39
3	9	135.97	50.74	102.4	1383	207.73	99.37	535.81
4	16	148.77	51.39	105.16	1085	207.31	98.36	547.01
5	25	161.4	51.56	109.3	904	208.11	96.71	555.43
6	36	173.51	51.35	115	781	210.07	94.33	559.42
7	49	184.75	50.8	122.46	691	213.11	91.23	557.42
8	64	194.82	50	131.83	621	217.06	87.46	548.44
9	81	203.46	48.99	143.22	564	221.67	83.17	532.36
10	100	210.48	47.84	156.68	516	226.61	78.51	510.08
11	121	215.77	46.58	172.2	475	0	0	0

Tab. 5

Tab. 4 zeigt den hochfrequenten Teil der  $\varrho_3$ -Kurve. Die Umkehrung ergibt mit guter Näherung (bei hoher Frequenz) die beiden Modellparameter  $\varrho_1$  und  $h$ .  $\varrho_2$  besitzt eine geringere Genauigkeit, die sich durch Erhöhung der Maximal-Frequenz verbessern läßt. Der niederfrequente Kurven-Teil ist in Tab. 5 wiedergegeben. Mit fallender Frequenz wird der Modellparameter  $\varrho_3 = 100 \Omega m$  durch den 2-Schicht-Parameter  $\varrho_2$  zunehmend genau angenähert. Der Parameter  $h$  gibt nur relativ ungenau die Summe der beiden Deckschichtmächtigkeiten  $h_1 + h_2 = 400 m$  wieder. Der 2-Schicht-Parameter  $\varrho_1$  stellt ein Mittel zwischen den beiden Deckschichtwiderständen dar.

Das Beispiel zeigt, daß eine Auswertung von Dreischichtdaten mit der 2-Schicht-Umkehrung die Modellparameter mit recht guter Genauigkeit wiedergibt, die Dicke der zweiten Schicht nur ungenau.

Die Auswertung von 3- und z.T. von Mehrschicht-Daten ist also möglich, aber, besonders bei verfälschten Daten, problematisch.

Die dargestellten Ergebnisse wurden auf den Commodore-Rechnern CBM 3032 und C-64 berechnet.

Der Rechenaufwand ist klein: Für  $Q = 2$  sind ca. 35 Fortran-Zeilen erforderlich, die CDC-Cyber 172 benötigt für eine Umkehrung ca. 2 msec. CPU, der C-64 ca. 1 sec.

Im Programm wurde abweichend vom dargestellten Rechengang für die Größen  $V$ ,  $R$  und  $\sigma$  direkt nach Berechnung der Absolutbetrag verwendet. Der Unterschied ist gering.

#### Literatur

I.N. BRONSTEIN & K.A. SEMENDJAJEW, Taschenbuch der Mathematik, 15. Aufl.,  
Zürich, 1975