

W. Janoth

Transformation magnetotellurischer Meßdaten in die Form von Seismogrammen

1 Untersuchung des Vorwärtsproblems

Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bilden die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \sigma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{Wellengleichung} \quad (3-1)$$

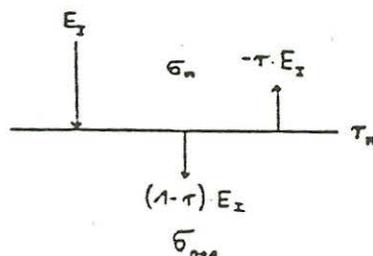
$$E_x = E_0 \cdot e^{i\omega t - \alpha z} \quad \text{Lösungsansatz} \quad (3-2)$$

$$\alpha = \frac{1 + i \sin(\omega)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sigma \mu \cdot |\omega|} \quad \text{Wellenzahl} \quad (3-3)$$

$$\tau_{n-d} = \frac{\sqrt{\sigma_{n-d}} - \sqrt{\sigma_n}}{\sqrt{\sigma_{n-d}} + \sqrt{\sigma_n}} \quad \text{Reflexionskoeffizient} \quad (3-4)$$

Die erste Gleichung beschreibt die Ausbreitung einer ebenen elektromagnetischen Welle in einer eindimensionalen Leitfähigkeitsstruktur, also in einem homogen planparallel geschichteten Medium. Der Lösungsansatz erfüllt mit der Wellenzahl α die Differentialgleichung. Darin enthalten ist die übliche Näherung, daß $|\sigma \mu \omega| \gg |\epsilon \mu \omega^2|$ ist.

Aus der Randbedingung, daß sowohl das elektrische wie auch das magnetische Feld stetig durch eine Grenzfläche hindurchgehen muß, läßt sich für zwei aufeinanderfolgende Schichten unterschiedlicher Leitfähigkeit ein Reflexionskoeffizient definieren.



E_i : einfallende Welle
 $-r_n E_i$: reflektierte Welle
 $t_n E_i = (1-r_n) E_i$: transmittierte Welle

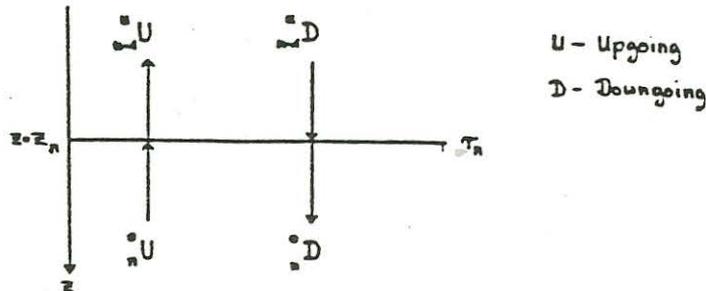
Abb. 3-1: Skizze zur Herleitung des Reflexionskoeffizienten

Unter Berücksichtigung des magnetischen Feldvektors ergibt sich für $\mu = \mu_0$ der Reflexionskoeffizient (Gl. 3-4).

Zur weiteren Behandlung werden die gleichen Abkürzungen eingeführt, wie sie auch zur Berechnung einfacher synthetischer Seismogramme benutzt werden. Um die Gesamtübertragungsfunktion eines Schichtsystems zu bestimmen, müssen zwei Fälle betrachtet werden:

1. Übergang einer Welle von einer Schicht auf die nächste
2. Verhalten einer Welle bei der Propagation durch eine homogene Schicht.

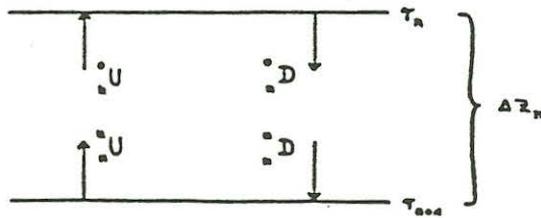
Eine Grenzfläche in der Tiefe z_n werde durch den Reflexionskoeffizienten r_n charakterisiert. Das Wellengeschehen direkt an der Grenzfläche wird dann durch die vier der Skizze zu entnehmenden Anteile bestimmt und durch die darunterstehende Matrixbeziehung vollständig beschrieben.



$$\begin{pmatrix} U_n^u \\ D_n^u \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - r_n} \begin{pmatrix} 1 & -r_n \\ -r_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n^d \\ D_n^d \end{pmatrix}$$

Abb. 3-2: Grenzflächenverhalten der Welle

Durch eine entsprechende Beziehung läßt sich das Verhalten der Welle bei der Propagation durch eine homogene Schicht der Mächtigkeit Δz_n beschreiben, die von zwei Grenzflächen mit den Reflexionskoeffizienten r_n und r_{n+1} gebildet wird.



$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} = e^{\alpha \Delta z_n} \begin{pmatrix} e^{-2\alpha \Delta z_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}$$

Abb. 3-3: Propagation der Welle durch eine homogene Schicht

Der entscheidende Schritt ist nun die Zusammenfassung der schicht-abhängigen Parameter der Exponentialfunktion zu einer Konstanten, die für jede Schicht eines Schichtsystems gelten soll:

$$\sqrt{\epsilon_n \mu_n} \cdot \Delta z_n = k = \text{const.}$$

Damit wird eine komplexe Variable ξ definiert, nach deren Potenzen die Sondierungskurve entwickelt werden soll:

$$\xi = e^{-(1 + i \text{sgn}(\omega)) \sqrt{2 \cdot |\omega|} k}$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe werden dabei ausschließlich aus Produkten und Summen der Reflexionskoeffizienten gebildet und beinhalten somit die gesamte Information über den Untergrund.

Zur Bestimmung der Gesamtübertragungsfunktion wird gemäß untenstehender Skizze ein System von N Schichten aufgebaut. Durch Verschachteln der vorher bestimmten Matrizenbeziehungen erhält man das gesuchte Gleichungssystem mit der gesamten Übertragungsfunktion.

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{\xi^{-\alpha s N}}{\prod_{i=1}^N (1 - \tau_i)} \begin{pmatrix} \xi^M \cdot N_n(\xi^{-1}) & N_n(\xi) \\ -\xi^M \cdot M_n(\xi^{-1}) & M_n(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Die Funktionen N_N und M_N mit dem Argument ξ bzw. ξ^{-1} sind Polynome der oben definierten komplexen Variablen, die sich über Rekursionsgleichungen berechnen lassen und als einzig schichtungsabhängige Parameter die Reflexionskoeffizienten enthalten.

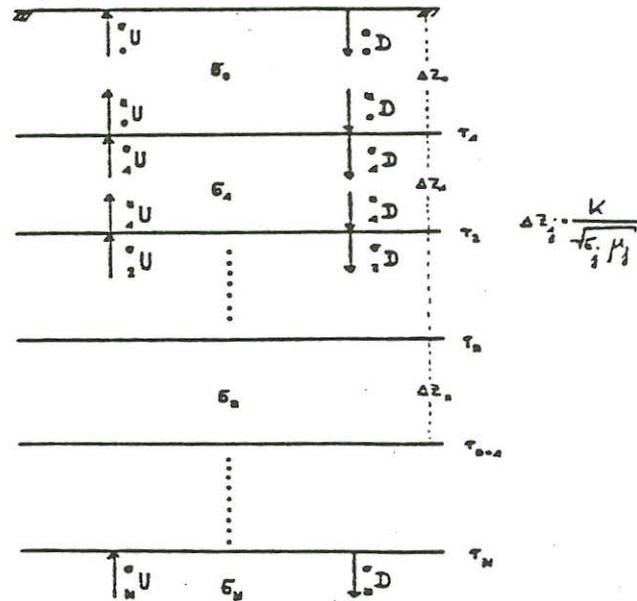


Abb. 3-4: Schichtsystem

Der Grad N korrespondiert mit der Anzahl der Reflexionskoeffizienten, von denen beliebig viele auch 0 sein können.

Rekursionsgleichungen

$$N_{n+1}(\xi^{-1}) = N_n(\xi^{-1}) - \tau_{n+1} \cdot \xi^{-(n+1)} \cdot N_n(\xi)$$

$$N_{n+1}(\xi) = N_n(\xi) - \tau_{n+1} \cdot \xi^{+(n+1)} \cdot N_n(\xi^{-1})$$

$$M_{n+1}(\xi^{-1}) = M_n(\xi^{-1}) + \tau_{n+1} \cdot \xi^{-(n+1)} \cdot M_n(\xi)$$

$$M_{n+1}(\xi) = M_n(\xi) + \tau_{n+1} \cdot \xi^{+(n+1)} \cdot M_n(\xi^{-1})$$

mit $N_0 = M_0 = 1$

(3-6)

Unter Berücksichtigung der physikalischen Gegebenheiten nimmt das etwas unübersichtliche Gleichungssystem eine einfache Gestalt an:

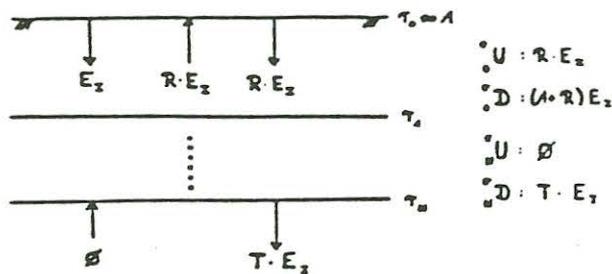


Abb. 3-5: Skizze zur Bestimmung der reflektierten Antwort

⇒ Reflexionsantwort des planparallel geschichteten Mediums

$$\boxed{1 + 2 \cdot R = \frac{N_N(\xi)}{M_N(\xi)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \xi^{\nu}} \quad (3-7)$$

Der gesamt abwärts laufende Anteil ist $(1 + 2R) E_i$, der aufwärtslaufende ist $R E_i$, der transmittierte Teil ist $T \cdot E_i$. $\overset{0}{N}$ ist unter Voraussetzung eines abschließenden homogenen Halbraumes identisch Null.

Der Zusammenhang der Reflexionsantwort $1 + 2R$ mit der Sondierungskurve lautet:

$$S_a = S_0 \cdot \left| \frac{N_N(\xi)}{M_N(\xi)} \right|^2 \quad \Phi = \frac{\pi}{4} + \text{ATAN} \left[\frac{\text{Im} \left(\frac{N_N(\xi)}{M_N(\xi)} \right)}{\text{Re} \left(\frac{N_N(\xi)}{M_N(\xi)} \right)} \right] \quad (3-8)$$

Auf diesen Beziehungen basieren die erstellten Programme zur Berechnung theoretischer Sondierungskurven.

2 Darstellung der Meßkurven als Reihenentwicklung

Werden die Koeffizienten der Reihenentwicklung $(1 + 2R)$ gegen ganzzahlige Vielfache der Schichtkonstanten k aufgetragen, so erhält man die angestrebte Seismogrammmform.

Zur Veranschaulichung sei ein 2-Schichtfall vorgegeben:

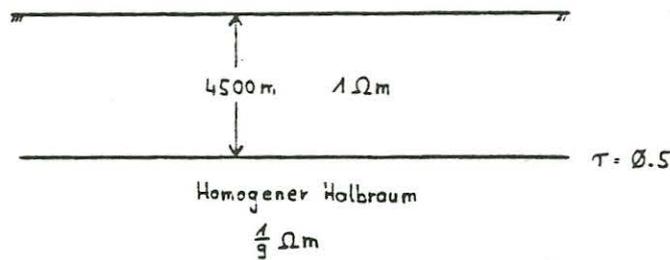


Abb. 3-6

Für eine Schichtkonstante von $k = 1$ ergibt sich ein Δz von 900 m, d.h. die vorgegebene Schichtmächtigkeit von 4500 m wird durch Stapelung von 5 Schichten der Mächtigkeit Δz erhalten: die Reflexionskoeffizienten r_1, \dots, r_4 sind identisch Null. Der erste Reflexionskoeffizient ungleich Null (r_5) liegt somit an der Position $5 \cdot k$, wie auch in untenstehender Abb. 3-7 ersichtlich ist. Das entgegengesetzte Vorzeichen kennzeichnet den Phasensprung um π , der bei Reflexion am leitfähigeren Medium auftritt. An den Stellen $n \cdot 5 \cdot k$ erscheinen jeweils die n -ten Multiplen.

Die zugehörige Kurve des scheinbaren spezifischen Widerstandes ϱ_a berechnet sich aus der Gleichung

$$\varrho_a(\tau) = \varrho_0 \cdot \left| \frac{1 - 0.5 \cdot \xi(\tau)^5}{1 + 0.5 \cdot \xi(\tau)^5} \right|^2 \quad (3-9)$$

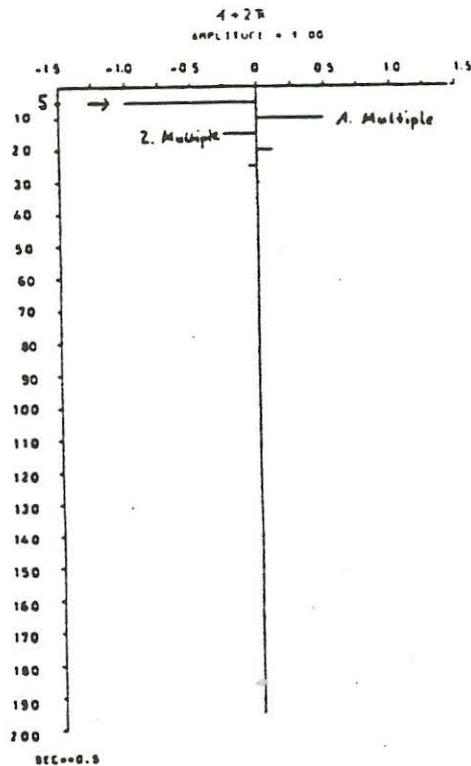


Abb. 3-7: Reflektierte Antwort des 2-Schichtfalles gemäß Abb. 3-6

3 Interpretation der Reihenentwicklung - Modellberechnung aus der Koeffizientenfolge

Die Rückgewinnung des Modells aus der Reflexionsaufreihung erfolgt rekursiv (nachdem die Primärreflexionen bestimmt sind) nach folgenden Gleichungen:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n \cdot \left(\frac{1 + \tau_n}{1 - \tau_n} \right)^2 \quad (3-10)$$

$$\Delta z_n = \frac{K \cdot (1 - \tau_n)}{\sqrt{\sigma_n} (1 + \tau_n)} \quad (3-11)$$

4 Berechnung der Reflexionsantwort aus theoretischen Sondierungskurven

Zur Berechnung der Reflexionsantwort $1 + 2R$ aus einer Sondierungskurve bietet sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems an:

$$\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{c} \quad \begin{array}{l} \underline{y} : \text{Meßwertvektor} \\ \underline{c} : \text{gesuchter Koeffizienten-} \\ \quad \text{vektor} \end{array} \quad (3-12)$$

Die Elemente der Matrix A sind dabei wie folgt aufgebaut:

$$a_{n,m} = e^{-(1+isgn(\omega))nmkq} \quad , \quad (3-13)$$

k - Schichtkonstante

q - Faktor, der die benötigten Stützwerte festlegt.

Somit würde sich der gesuchte Koeffizientenvektor zu

$$\underline{c} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{y} \quad (3-14)$$

ergeben.

Die Praxis hat jedoch gezeigt, daß sich dieses Gleichungssystem auf diese Weise nicht lösen läßt.

Aus diesem Grund wurde ein least-mean-square-Ansatz gewählt, mit dem sich die gesuchten Koeffizienten auf folgende Weise bestimmen lassen:

$$\underline{c} = [\text{Re}(\overline{\underline{A}\underline{A}}) + \lambda \cdot \underline{E}]^{-1} \cdot \text{Re}(\underline{A} \cdot \overline{\underline{y}}) \quad (3-15)$$

Die in den eckigen Klammern stehende Matrix braucht nur einmal berechnet zu werden, da sie keine schichtabhängigen Parameter enthält.

5 Lösung des linearen Gleichungssystems

Die Matrix in Gleichung (3-15) wurde auf der Rechenzentrumsanlage (TR 440) der TU Clausthal bis zum Grad $N = 200$ invertiert. Eine weitere Erhöhung des Systemgrades war aufgrund zu geringer Kernspeicherkapazität nicht möglich.

Als Inversionsverfahren wurde ein iterativer Algorithmus benutzt, der, von der Inversen des Grades n ausgehend, unter hinzufügen einer Zeile und Spalte die Inverse des Grades $n+1$ berechnet. Der Stabilisierungsterm $\lambda \cdot E$ in Gleichung (3-15) ist zur Lösung derart großer Gleichungssysteme unbedingt erforderlich.

Die im folgenden vorgestellten Entwicklungen verschiedener 2- und 3-Schichtfälle basieren auf der invertierten 200×200 Matrix.

6 Anwendung auf theoretische Messdaten

Im Folgenden wurde das Verfahren exemplarisch auf den bereits in Abb. 3-6/7 vorgestellten 2-Schichtfall und auf 3-Schichtfälle verschiedenen Typs angewandt.

Der Vergleich von Abb. 3-7 mit Abb. 3-8 zeigt, daß der Reflexionskoeffizient exakt (bzgl. seines numerischen Wertes und seiner Lage in der Seismogrammdarstellung) zurückgewonnen wurde, woraus eine genaue Rückgewinnung des Modells folgt.

Zur Überprüfung der Position des "Ersteinsatzes" wurde eine weitere Entwicklung mit einer Schichtkonstanten von $k=0.2$ durchgeführt (Abb. 3-9), die das Ergebnis von Abb. 3-7 bestätigt. Der Betrag des Reflexionskoeffizienten läßt sich unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors (5.22) und Integration über den breiten Einsatz wiedergewinnen.

Die Abbildungen 3-10 bis 3-15 zeigen entwickelte 3-Schichtfälle, denen die Modelle nach Tabelle 3/I entsprechen:

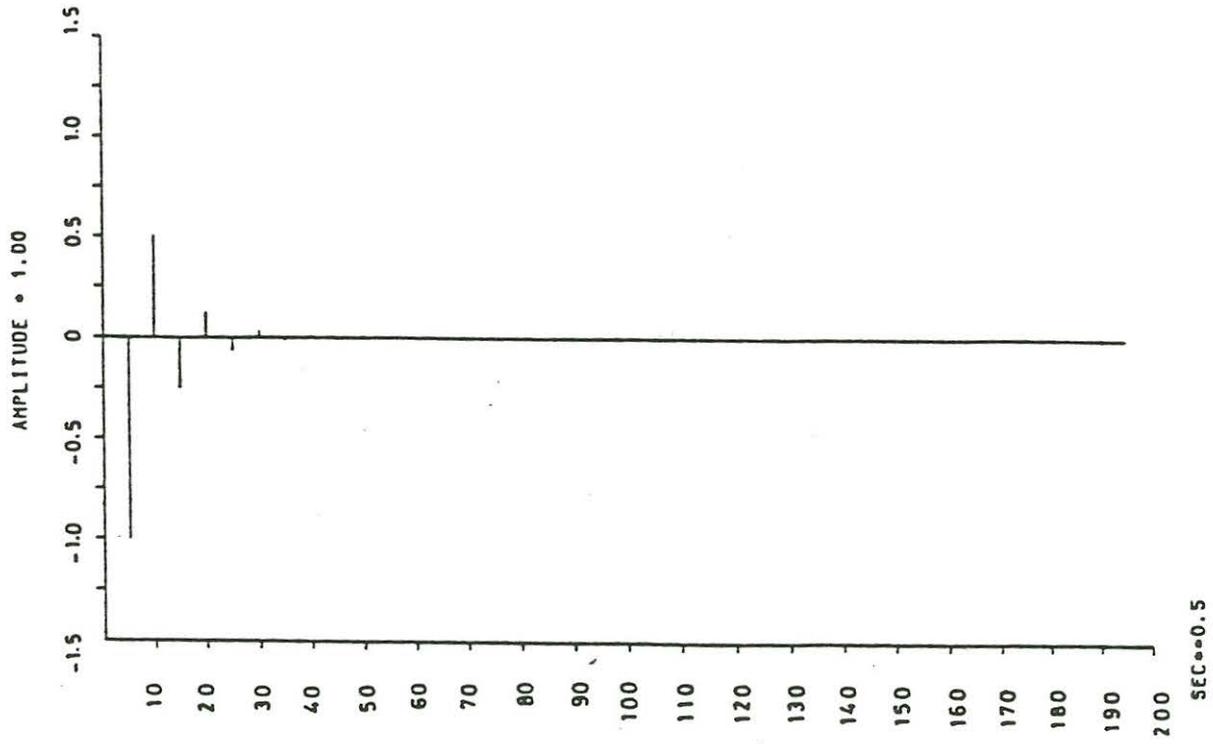


Abb. 3-8: Theoretische Reihe

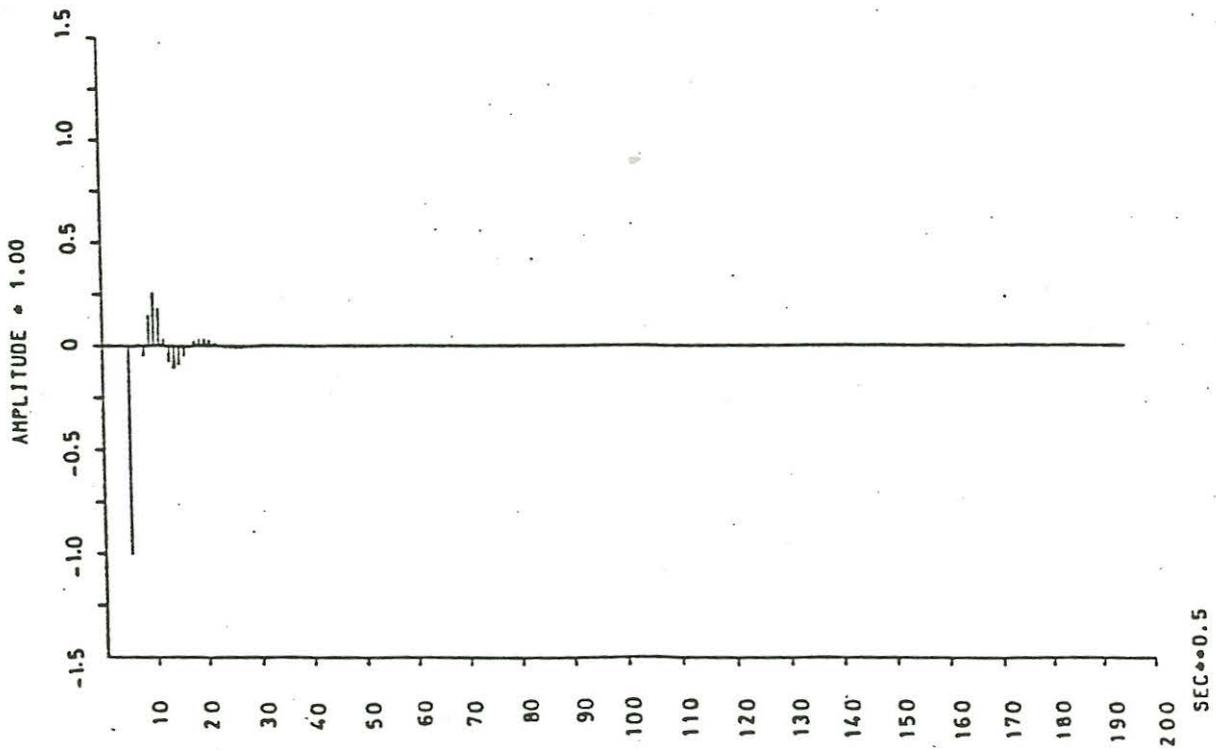
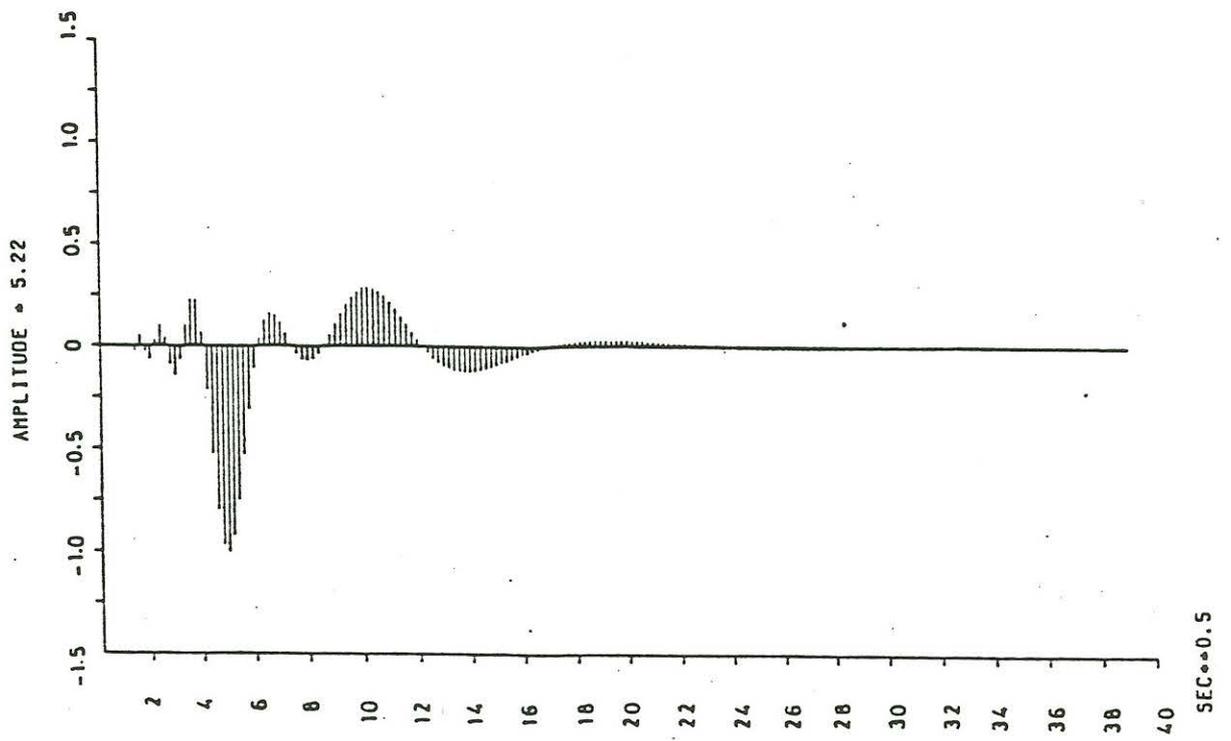


Abb. 3-7: Entwickelte Reihe

Abb. 3-9: Gespreizte Entwicklung
zu Abb. 3-8



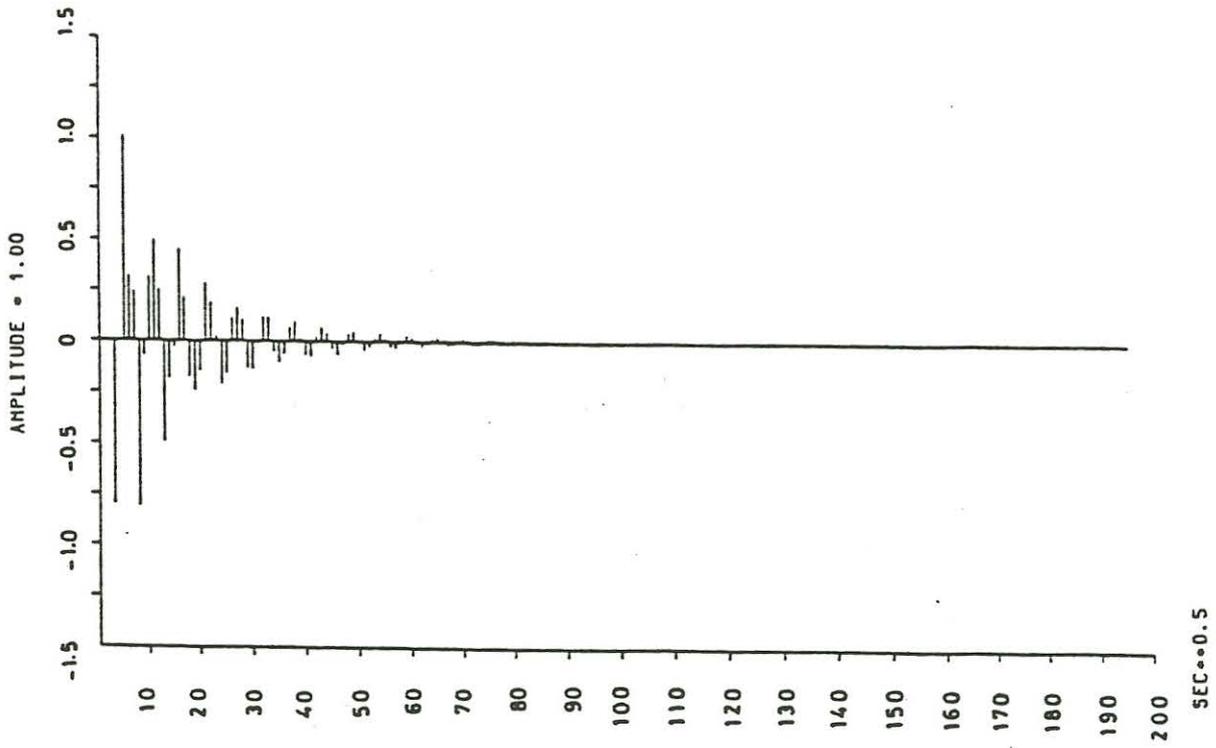


Abb. 3-11: Theoretische Reihe

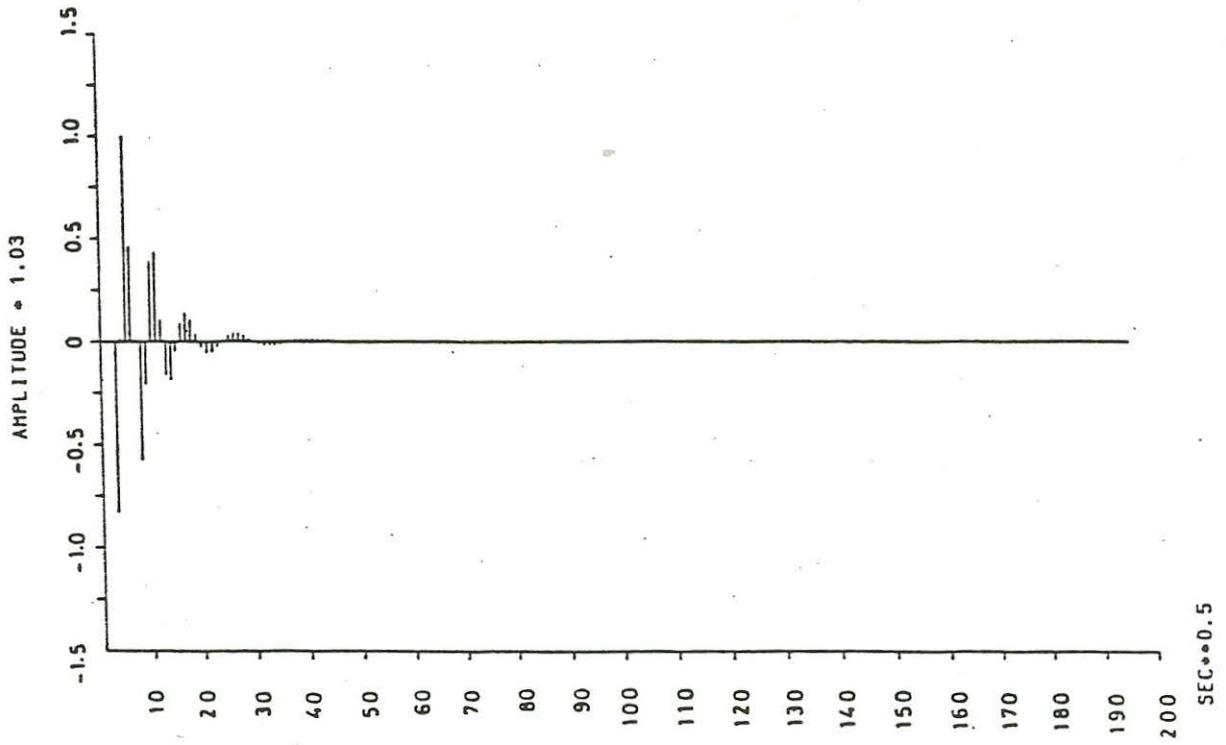


Abb. 3-10: Entwickelte Reihe

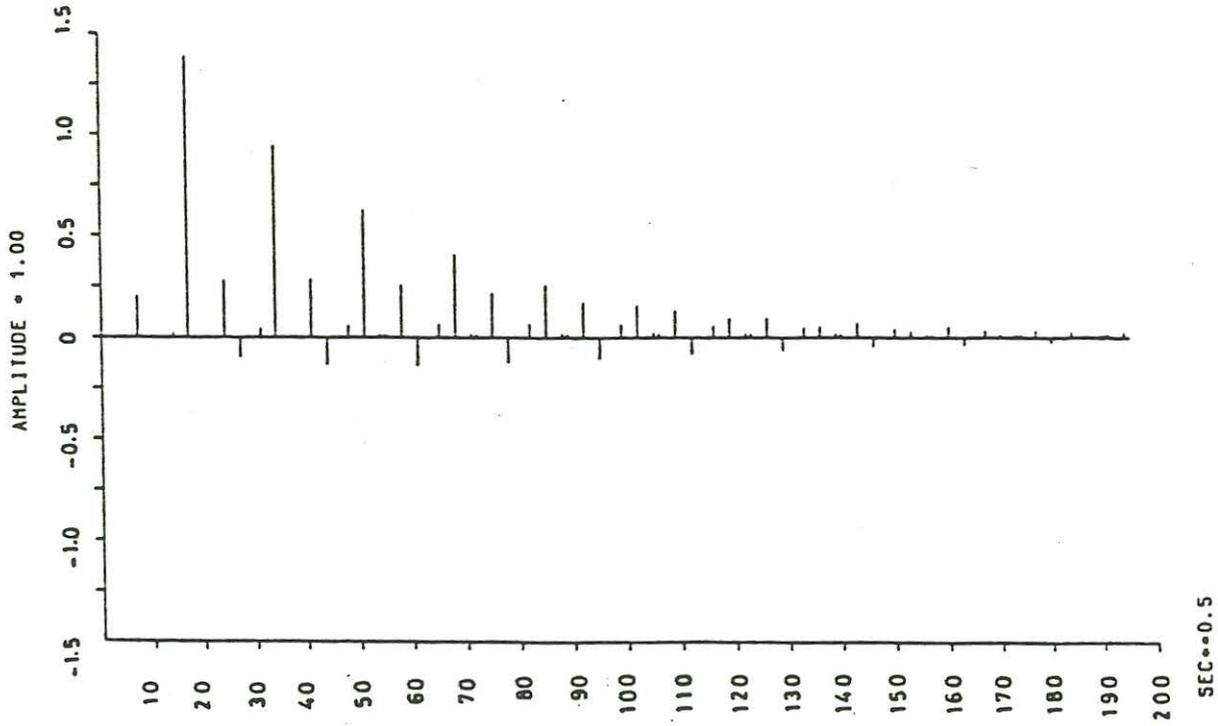


Abb. 3-13: Theoretische Reihe

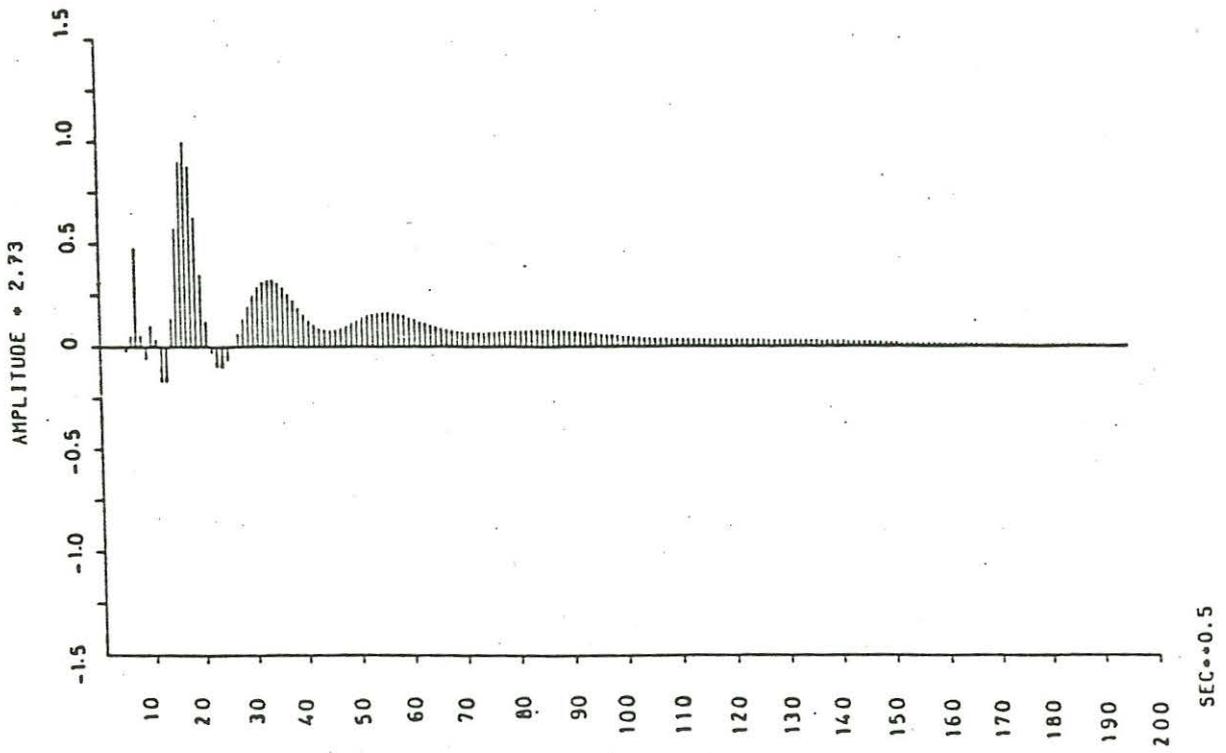


Abb. 3-12: Entwickelte Reihe

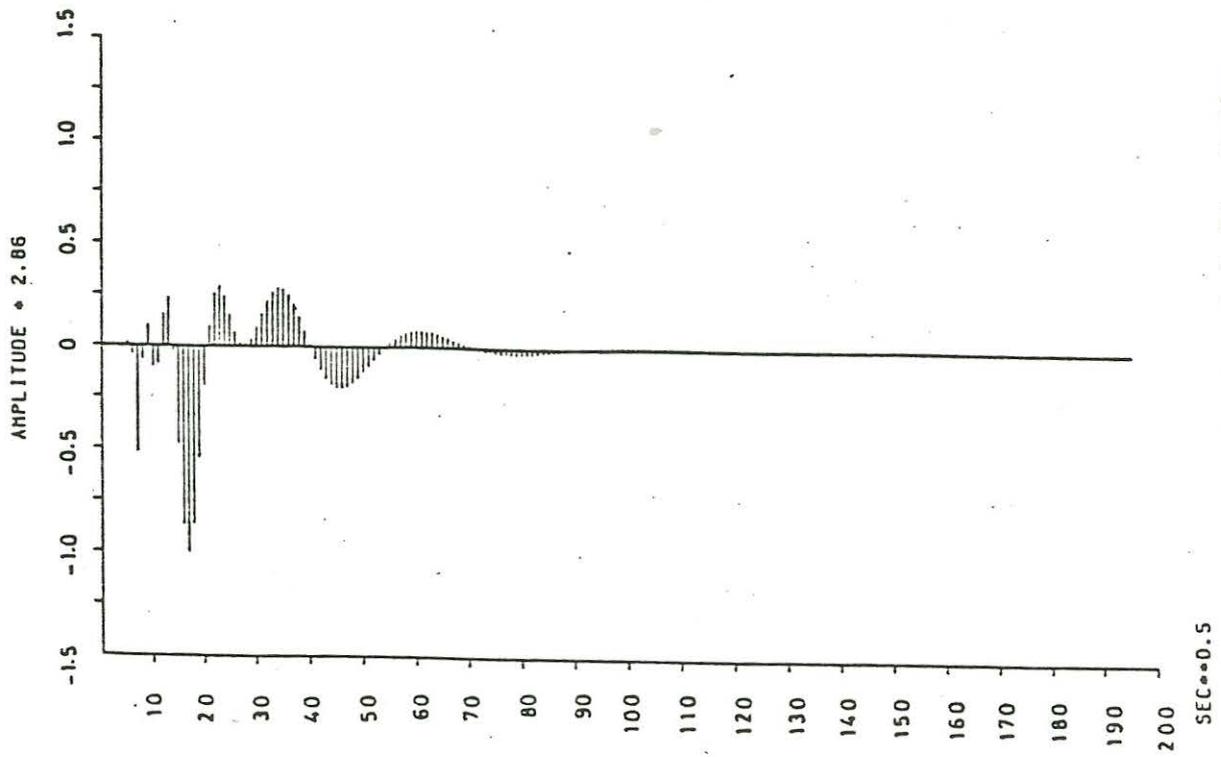


Abb. 3-14: Entwickelte Reihe

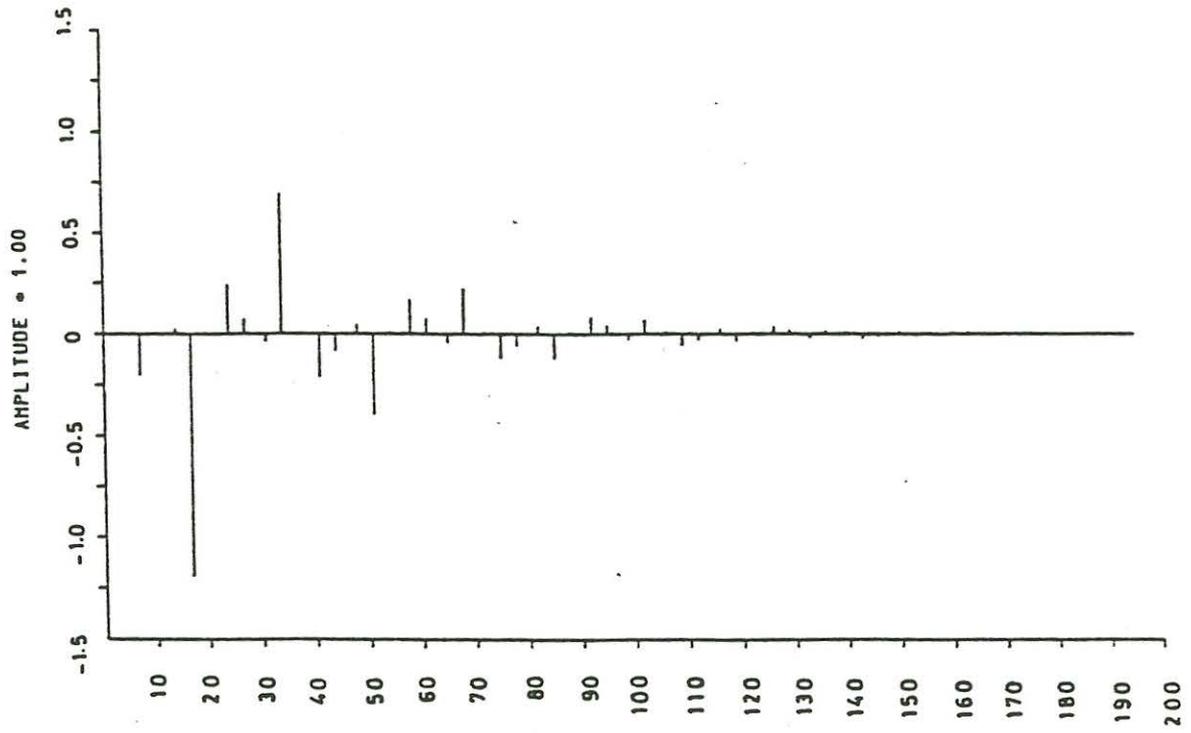


Abb. 3-15: Theoretische Reihe

Abb.:	$\Delta z_i / m$	ξ_i / Ohmm	k
3-10	$\Delta z_1 - 2700$	$\xi_1 - 1.00$	1
3-11	$\Delta z_2 - 1900$	$\xi_2 - 0.18$	
	HH	$\xi_3 - 1.10$	
3-12	$\Delta z_1 - 6250$	$\xi_1 - 1.00$	1
3-13	$\Delta z_2 - 10900$	$\xi_2 - 1.50$	
	HH	$\xi_3 - 48.0$	
3-14	$\Delta z_1 - 5400$	$\xi_1 - 1.00$	1
3-15	$\Delta z_2 - 8000$	$\xi_2 - 0.67$	
	HH	$\xi_3 - 0.04$	

Tab. 3/I :
Modellparameter der nachfolgenden Beispiele

HH - Homogener Halbraum

Zu den Entwicklungsergebnissen läßt sich allgemein feststellen, daß die Positionen der Einsätze sehr genau zu bestimmen sind. Im Falle der Abb. 3-10/11 ist es auch gelungen, die Reflexionskoeffizienten betragsmäßig sehr genau zurückzugewinnen.

7. Ergebnisse

Nach dem bisherigen Stand der Untersuchungen ist es möglich, die Entwicklungen theoretischer Meßdaten in einer Genauigkeit zu erhalten, die in jedem Fall ausreicht, die Tiefe der ersten Schichtgrenze zu bestimmen. In einigen Fällen war aber auch eine vollständige Rückgewinnung des Ausgangsmodelles möglich.

Literatur:

- G. Kunetz Processing and Interpretation of Magnetotelluric Soundings
Geophysics, Vol. 37, No.6, p. 1005-1021
- E. Scaraniec Fundamental Functions for Horizontally Stratified Earth
Geophysical Prospecting, Vol. 24, No.3, p. 528
Towards Unification of Geophysical Problems for Horizontally Stratified Media
Geophysical Prospecting, Vol. 27, No.3, p. 1979