

E. MUNDRY, R. SCHULZ

"Modellrechnungen in der Geoelektrik für 2- und 3-D Strukturen"

Im Rahmen eines vom BMFT finanzierten Forschungsprogramms "Entwicklung eines quantitativen Auswerteverfahrens für Gleichstrom-Widerstandsmessungen zur Prospektion auf mineralische Rohstoffe bei beliebiger Widerstandsverteilung im Untergrund" (NTS 105 2 bzw. R 201) wurden u.a.

- Modellrechnungen für geometrisch einfache Körper durchgeführt,
- Rechenverfahren und Computerprogramme für mehr oder weniger beliebige Widerstandsverteilungen entwickelt,
- Feldmessungen, insbesondere über graphitführende Körper, durchgeführt und die Meßergebnisse mit Hilfe der entwickelten Verfahren interpretiert.

Für die Modellrechnungen wurde die Integralgleichungsmethode für 3D- und das Differenzenverfahren für 2D-Strukturen ausgewählt und für den routinemäßigen Einsatz ausgearbeitet.

Modellrechnungen für 3D-Strukturen

Gesucht ist das Potential U , das der Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (\sigma(\underline{r}) \nabla U(\underline{r}, \underline{r}_A)) = I \delta(\underline{r} - \underline{r}_A) \quad (1.1)$$

(\underline{r}_A Quellpunkt) genügt und im Unendlichen verschwindet.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(\underline{r}, \underline{r}_A) = 0 \quad (1.2)$$

An Grenzflächen S , an denen sich die Leitfähigkeit σ sprunghaft ändert, gelten die bekannten Randbedingungen ($\underline{r}_0 \in S, \underline{r}_0 \neq \underline{r}_A$)

$$\begin{aligned} \sigma(\underline{r}_0^+) \underline{n} \cdot \nabla U(\underline{r}_0^+, \underline{r}_A) - \sigma(\underline{r}_0^-) \underline{n} \cdot \nabla U(\underline{r}_0^-, \underline{r}_A) &= 0 \\ U(\underline{r}_0^+, \underline{r}_A) - U(\underline{r}_0^-, \underline{r}_A) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

insbesondere an der (ebenen) Erdoberfläche

$$\partial/\partial z U(\underline{r}_0, \underline{r}_A) = 0 \quad (\underline{r}_0 = (x_0, y_0, 0)) \quad (1.4)$$

Für einen 3D-Störkörper (Leitfähigkeit σ_K , Oberfläche S) läßt sich die Lösung dieses Problems nur in einfachsten Fällen analytisch angeben (z.B. Kugel im Halbraum; vgl. SCHULZ 1979). Als

numerische Methode bietet sich die Integralgleichungsmethode an, die den Vorteil hat, ein 3-D-Problem über ein (2D) Oberflächenintegral zu lösen.

Unter Anwendung der Greenschen Formeln und durch Einführen einer als "Flächenladungsdichte" bezeichneten Größe μ ($\underline{r} \in S$)

$$\mu(\underline{r}) = \underline{n} \cdot \nabla U(\underline{r}^-, \underline{r}_A) - \underline{n} \cdot \nabla U(\underline{r}^+, \underline{r}_A) \quad (1.5)$$

erhält man eine Integraldarstellung für das Potential U in jedem beliebigen Punkt \underline{r}' außerhalb des Körpers:

$$U(\underline{r}', \underline{r}_A) = I\phi(\underline{r}_A, \underline{r}') + \int_S \sigma(\underline{r}) \phi(\underline{r}, \underline{r}') \mu(\underline{r}) \, d\sigma_r \quad (1.6)$$

Läßt man in (1.6) den Aufpunkt \underline{r}' gegen $\underline{r} \in S$ gehen, bildet die Normalenableitung in diesem Punkt und beachtet die Singularität in $\underline{r} = \underline{r}'$, so erhält man eine Integralgleichung für die unbekannte Größe μ :

$$I \underline{n} \cdot \nabla \phi(\underline{r}_A, \underline{r}') + \frac{\sigma_K + \sigma}{2(\sigma_K - \sigma)} \mu(\underline{r}') + \int_S \sigma(\underline{r}) \underline{n} \cdot \nabla \phi(\underline{r}, \underline{r}') \mu(\underline{r}) \, d\sigma_r = 0 \quad (1.7)$$

Die Lösung von (1.7) in (1.6) eingesetzt, liefert das gesuchte Potential.

ϕ bezeichnet in (1.6/7) die sogenannte Grundlösung, z.B. für den Halbraum:

$$\phi(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right]$$

In diesem Fall erhält man aus (1.6/7) das von DIETER et al. (1969) angegebene Verfahren. Die Grundlösung läßt sich auch für einen geschichteten Halbraum angeben (z.B. SCHULZ 1982), indem man das Rekursionsverfahren von Pekeris (KOEFOED 1979) verallgemeinert.

An Stelle von (1.6) kann auch eine Darstellung über das Oberflächenpotential verwendet werden (BARTHES & VASSEUR 1978), allerdings führt sie für den wichtigen Fall $\sigma_K \rightarrow \infty$ auf unrichtige Ergebnisse (SCHULZ 1979).

Die Integralgleichung (1.7) ist im allgemeinen nur numerisch lösbar. Dabei wird die Oberfläche S des Körpers in Oberflächenelemente S_q zerlegt. Das Integral über diese Elemente S_q wird numerisch mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln berechnet, wodurch

die Integralgleichung in ein lineares Gleichungssystem umgewandelt wird. Im einfachsten Fall, der meist aus Gründen der Rechnerökonomie verwendet werden muß, wird μ durch eine auf S_q konstante Funktion $\bar{\mu}_q$ ersetzt. Das entstehende Gleichungssystem ist i.a. vollbesetzt und kann bei nicht allzu großer Anzahl von Flächenelementen (≤ 300) durch direkte Matrixinversion gelöst werden. Das Potential (1.6) wird dann unter Verwendung derselben Quadraturformel berechnet.

Die Güte der numerischen Lösung hängt entscheidend von der Güte der Quadraturformel ab. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit des Integralkerns kann gezeigt werden (VAINIKKO 1976), daß

$$\max_{\underline{r} \in S} | \bar{\mu}(\underline{r}) - \mu(\underline{r}) | = c \max_{\underline{r} \in S} | R(\phi, \mu) |$$

gilt, wobei R das Restglied der numerischen Quadraturformel

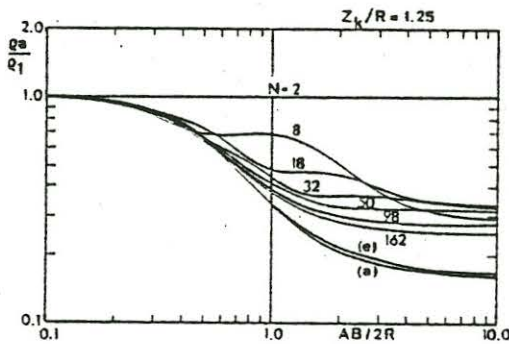


Abb.1: Modellkurven des scheinbaren spez. Widerstandes für eine Schlumberger-Anordnung über einer Kugel (Radius R, Tiefe des Mittelpunktes 1.25 R, $\varphi=0$) im homogenen Halbraum für verschiedene Anzahlen N von Oberflächenelementen (Integralgleichungsmethode), (e) extrapolierte Kurve, (a) analytische Lösung.

ist. Im angegebenen Fall ist die Konvergenzordnung nur linear (vgl. Abb.1). Allerdings kann dieses Konvergenzverhalten ausgenutzt werden, um ein Extrapolationsverfahren anzuwenden: Falls die Oberfläche S gleichmäßig diskretisiert wird (z.B. durch gleichgroße Quadrate) und $\bar{\mu}(1)$ und $\bar{\mu}(2)$ Lösungen zweier mit verschiedenen Schrittweiten h_1 und h_2 gewonnener Gleichungssysteme sind, liefert die Extrapolation

$$\bar{\mu}_e = (1/h_1 \bar{\mu}(1) - 1/h_2 \bar{\mu}(2)) / (1/h_1 - 1/h_2)$$

eine erheblich verbesserte Approximation der gesuchten Lösung (s. Abb.1).

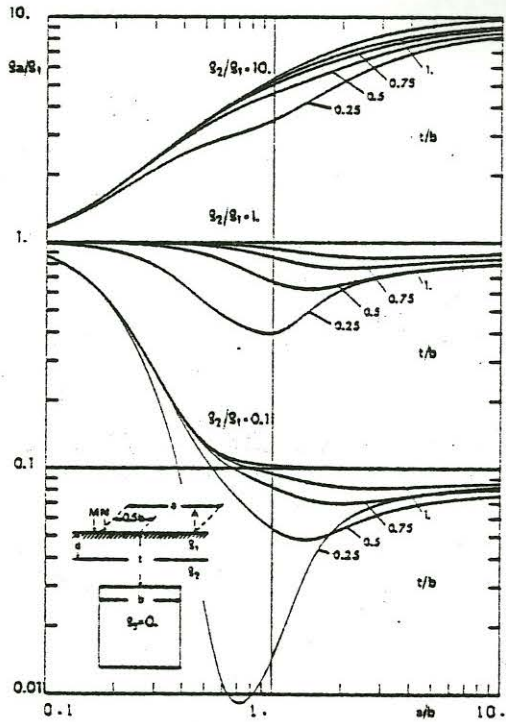


Abb.2: Modellkurven für Schlumberger-Halbmessungen (Pol-Dipol-Anordnung) über einem Würfel (Breite b , $\rho_3=0$) in einem Halbraum mit Deckschicht (Mächtigkeit $d/b = 0.1, \rho_1$). Kurvenscharen für verschiedene Widerstandsverhältnisse ρ_2/ρ_1 zwischen Substratum und Deckschichten und verschiedenen Tiefen t des Würfels als Kurvenparameter; jeweils oberste Kurve für den Zweischichtfall ohne Störkörper

In Abb.2 werden Beispiele für Modellkurven gezeigt, die mit Hilfe der vorgestellten Methode berechnet wurden. Es sind Kurven für Schlumberger-Halbmessungen über einen Würfel, der in einem zweischichtigen Halbraum eingelagert ist. Es wird deutlich, welchen starken Einfluß die Leitfähigkeit der Deckschicht hat. Abb.3 zeigt einen Vergleich zwischen einer gemessenen und einer theoretischen Kurve.

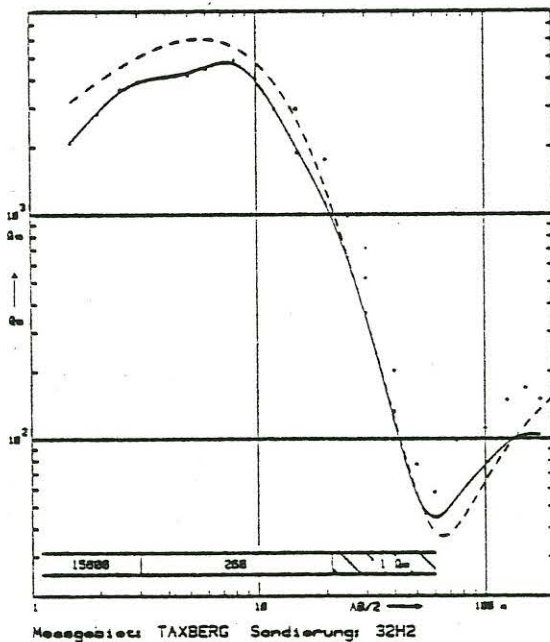


Abb.3: Messung über vermutlich graphitführendem Körper bei Kropfmühl (Passau): Vergleich zwischen einer Meßkurve (durchgezogen) und Modellkurve (gestrichelt) für eine Schlumberger-Halbmessung. Modell: quaderförmiger Körper (60 m x 60 m x 120 m) in 21 m Tiefe ($\xi=1\mu\text{m}$) in einem Halbraum mit drei Schichten.

Modellrechnungen für 2D-Strukturen

Für Modellrechnungen bei zweidimensionaler Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(x,z)$ kann o.B.d.A. für die Quelle $y = 0$ angenommen werden, wenn die horizontale y -Koordinate die Streichrichtung angibt.

Die Differentialgleichung (1.1) für das Potential U kann dann mit Hilfe der Fourierschen Kosinustransformation

$$\bar{U}(x,y,z) = 2/\pi \int_0^{\infty} \bar{U}(x,z;\lambda) \cos \lambda y \, d\lambda \quad (2.1)$$

auf die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) - \lambda^2 \sigma \bar{U} = -\bar{q} \quad (2.2)$$

transformiert werden, wobei \bar{q} der entsprechend transformierte Quellterm ist. Für \bar{U} gelten die Randbedingungen (1.2) und (1.4). Für die numerische Lösung der Gleichung (2.2) für verschiedene λ -Werte mit Hilfe eines Differenzenverfahrens wurden verschiedene Diskretisierungsverfahren erprobt. Es zeigte sich durch Vergleich mit analytischen Lösungen, daß die Auswahl der Diskretisierung von entscheidender Bedeutung für die Genauigkeit der Ergebnisse ist, insbesondere bei größeren Kontrasten in den spezifischen Widerständen. In jedem Fall wurde ein unregelmäßiges Rechteckgitter zugrunde gelegt und ein Verschwinden der Funktion \bar{U} auf dem äußeren Rand des Gitters angenommen; die Punktquellen \bar{q} wurden durch gleichmäßiges "Verschmieren" des Stromes über eine Gittermasche modelliert.

U.a. wurde ein Diskretisierungsverfahren nach DEY & MORRISON (1979) erprobt, das sich aber wegen des niedrigen Approximationsgrades (Restfehler h_1^2 , h_1 = Schrittweite in x -Richtung) nur für kleine Widerstandsverhältnisse (max. 2:1) als brauchbar erwies.

Ein in Anlehnung an das von BREWITT-TAYLOR & WEAVER (1976) für zweidimensionale magnetotellurische Modellrechnungen im Falle der H-Polarisation entwickeltes Diskretisierungsverfahren ist hingegen auch für große Leitfähigkeitskontraste geeignet. Bei diesem Verfahren wird für \bar{U} eine quadratische Interpolation auf dem unregelmäßigen Gitter vorgenommen (Restfehler h_1^3), woraus sich finite Ausdrücke für $\partial \bar{U} / \partial x$ und $\partial^2 \bar{U} / \partial x^2$ ergeben. Die

vorgegebenen Leitfähigkeitswerte σ werden der jeweiligen Maschenfläche (nicht dem Gitterpunkt) zugeordnet und daraus entsprechend dem Anteil der angrenzenden Flächen gewichtete Mittel für σ und $\partial\sigma/\partial x$ in jedem Gitterpunkt gebildet.

Nach

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) = \sigma \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$$

können dann entsprechende finite Ausdrücke aufgestellt werden. Das System der Differenzgleichungen wird mit Hilfe des SOR-Verfahrens (successive overrelaxation) gelöst. Zu Beginn werden für jeden Gitterpunkt die Kopplungskoeffizienten berechnet und abgespeichert.

Wegen $\bar{U} \rightarrow 0$ (mit Ausnahme der Quellpunkte) für $\lambda \rightarrow \infty$ beginnt die Rechnung mit dem relativ großen Wert $\lambda = 2/\min(h_i)$. Das Ende des SOR-Verfahrens wird durch Erreichen einer vorgegebenen relativen Genauigkeit $\epsilon = \Delta \bar{U} / \max |\bar{U}| \approx 10^{-6}$ angezeigt, anschließend der λ -Wert halbiert. Das Verfahren wird für 10 bis 20 λ -Werte durchgeführt, so daß die Gesamtzahl der Iterationen beispielsweise für ein Gebiet mit 56 x 25 Gitterpunkten bei ca. 20 000 liegt, entsprechend einer Rechenzeit von ca. 5 min auf einer Control Data Cyber 76-Rechenanlage.

Um zur Gewinnung einer Modellkurve bei Auslage quer zum Streifen die entsprechend den unterschiedlichen Elektrodenpositionen normalerweise erforderlichen Einzelrechnungen zu vermeiden, wird mit einer inversen Schlumberger-Anordnung (M-AB-N anstatt A-MN-B) gearbeitet. Ein entsprechendes Computerprogramm (MUNDRY 1981) erlaubt die Vorgabe des Gitters und der Werte des spezifischen Widerstandes in den einzelnen Maschen des Gitters. Abb.4 zeigt ein Beispiel für eine Modellkurvenschar für eine Schlumberger-Anordnung.

In Abb.5 werden die Ergebnisse für einen Modellkörper mit rechteckigem Querschnitt im homogenen Halbraum, gerechnet sowohl nach der Integralgleichungsmethode als auch nach dem Differenzenverfahren, miteinander verglichen. Eine etwas größere Abweichung zwischen beiden Methoden ist für größere Meßabstände festzustellen, wenn die Sonden über dem Rand des Körpers stehen und (bei

der angenommenen Halbmessung) die Auslage über den Körpertrand hinweg erfolgt (Abb.5 unten, untere Kurve). Diese Abweichungen sind z.T. auf die endliche Erstreckung des Körpers in Streichrichtung beim Integralgleichungsverfahren, z.T. auf Diskretisierungsfehler zurückzuführen.

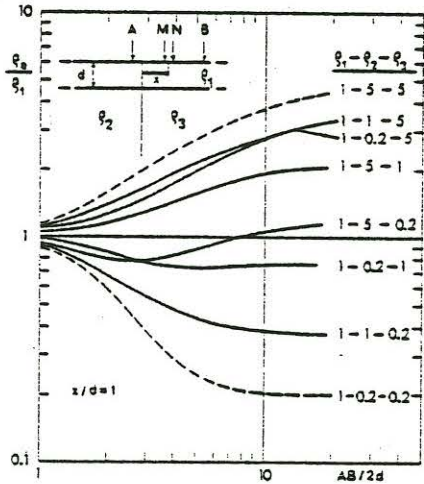


Abb.4: Modellkurven für eine Schlumberger Anordnung quer zu einer Störung unter Berücksichtigung einer Deckschicht; der Meßmittelpunkt befindet sich um eine Schichtdicke von der Störung entfernt.

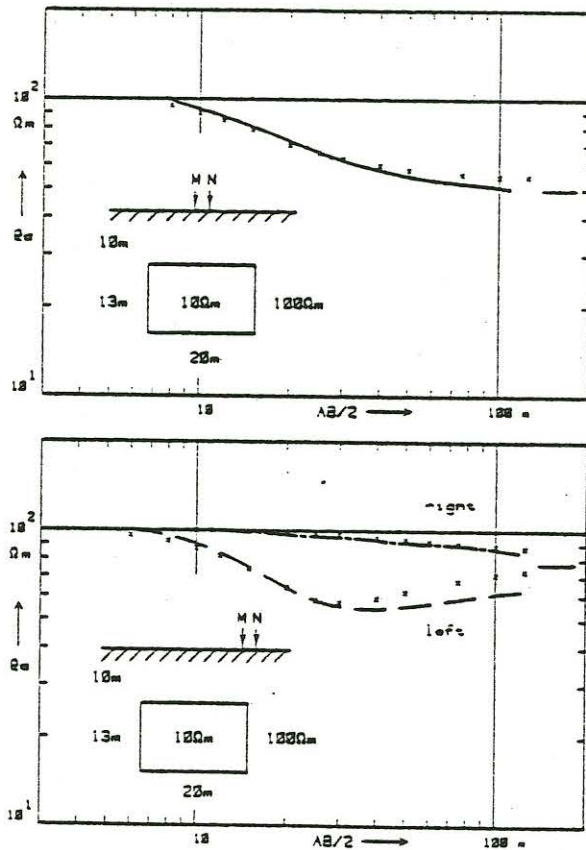


Abb.5: Vergleich von Modellkurven für Schlumberger-Halbmessungen (Pol-Dipol-Messungen) für einen gut leitenden Körper im homogenen Halbraum nach dem Differenzenverfahren (Kurven) und der Integralgleichungsmethode (Signaturen). Im unteren Bild stellt die obere Kurve die Ergebnisse für die Elektrodenposition rechts von den Sonden MN dar, die untere Kurve für eine Auslage nach links; für eine Sondenanordnung in der Mitte über dem Körper (oberes Bild) sind beide Kurven identisch.

Literatur:

Barthes, V., Vasseur, R.: Use of d.c. electrical sounding for the detection of a conducting heterogeneity buried in a stratified medium. - Seminar on geothermal energy, Brussels, 6.-8.12.1977, Commission of the European Communities EUR S 920, Vol.I., S.309-319, Luxemburg, 1978.

Brewitt-Taylor, C.R., Weaver, J.T.: On the finite difference solution of two-dimensional induction problems. - Geophys. J.R. astr. soc., 47, 375-396, 1976.

Dey, A., Morrison, F.: Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. - Geophys. Prosp., 27, 106-136, 1979.

Dieter, K., Paterson, N.R., Grant, F.S.: IP and resistivity type curves for three-dimensional bodies. - Geophysics, 34, 615-632, 1969.

Koefoed, O.: Geosounding Principles, vol.1, Resistivity Sounding Measurements. - Elsevier, Amsterdam, 1979.

Mundry, E.: Geoelektrische Modellrechnungen für zweidimensionale Strukturen. - Unveröff. Bericht, Archiv BGR/NLFB Nr.91 170, 1981.

Schulz, R.: Potential einer Kugel als Störkörper im homogenen Halbraum. - Unveröff. Bericht, Archiv BGR/NLFB Nr.81 821, 1979.

Schulz, R.: Integralgleichungsmethode zur Berechnung des Potentials eines geoelektrischen Störkörpers. - Unveröff. Bericht, Archiv BGR/NLFB Nr.89 721, 1982.

Vainikko, G.: Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. - Teubner, Leipzig, 1976.