

J. WATERMANN

" Zur Erzeugung weitgehend homogener Magnetfelder  
im Inneren von Zylinderspulen "

Einführung

Seit der quantitativen Behandlung von Magnetfeldern stationärer Ströme ist die Erzeugung möglichst homogener Felder ein Problem, das je nach den ihm zugrunde liegenden speziellen Anforderungen zu immer neuen Antworten geführt hat. Während in einigen Anwendungen (geophysikalischen, atomphysikalischen usw.) möglichst homogene mäßig starke Felder in einem etwa kugel- oder würfelförmigen Volumen gefordert wurden und zur Entwicklung der Helmholtzspule, Braunkeschkammer usw. geführt haben (siehe z.B. die diesbezügliche Zusammenstellung bei SERSON (1974)), in anderen Anwendungen (z.B. in der Kern- und Teilchenphysik oder der Angewandten Plasmaphysik und Hochenergiephysik) kurze dicke Zylinderspulen zur Erzeugung sehr starker, einigermaßen homogener Felder bei begrenztem Raum und begrenztem Energieeinsatz systematisch aus mehreren Sektoren unterschiedlicher Wicklungsdichte zusammengesetzt wurden (vgl. z.B. MONTGOMERY (1969), pp. 258-261) oder auch Kombinationen aus verschiedenen Zylinderspulen und einzelnen Stromschleifen vorgeschlagen wurden (GARRETT (1967)), werde hier die Aufgabe folgendermaßen gestellt:

Gefordert wird ein schwaches, möglichst homogenes Magnetfeld in einem langen, schmalen, feldparallelen Bereich, wobei z.B. aus praktischen Gründen die Länge der felderzeugenden Spule nur wenig größer sein darf, der Durchmesser aber evtl. viel größer sein muß als die Dimensionen dieses Bereiches. (Mit schwachen Feldern seien hier Feldstärken von einigen mA/m entsprechend einigen nT gemeint.)

Betrachtet man das Magnetfeld auf der Mittelachse einer Zylinderspule, so bemerkt man, daß bei gleichmäßig gewickelter Spule die Stärke des (nur axial gerichteten) Feldes zu den Enden hin abfällt, und zwar umso steiler je näher man dem Ende kommt. Dies führt auf den Gedanken, die Wicklungsdichte von der Mitte aus zu den Enden hin zunehmen zu lassen, bzw. allgemeiner, die Wicklungsdichte ortsabhängig zu wählen. Wie dabei vorgegangen werden kann, wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Anschließend wird die Anwendung des Konstruktionsverfahrens an einem Beispiel erläutert.

### Das Rechenverfahren

Eine einlagige Zylinderspule, die nicht dicht gewickelt ist, wird statt durch einen auf dem gesamten Mantel verteilten Flächenstrom besser durch eine Serie von Linienströmen beschrieben. Es wird also angenommen, daß die Spule aus einer Reihe kreisförmiger, radiusgleicher, auf einem Zylinder hintereinandergereihter und durch längsachsenparallele Leiterstücke seriell verbundener Drahtschleifen besteht. Darüberhinaus soll angenommen werden, daß in allen Drahtschleifen nur Linienströme gleicher Richtung und Stärke auftreten können. Dies ist technisch leichter (und präziser) realisierbar als Anordnungen, die verschiedene Schleifendurchmesser oder verschiedene Stromstärken zulassen.

Einleuchtend ist, daß die Spule aus zwei symmetrischen Teilspeulen bestehen wird. Wir positionieren sie deshalb in einem Zylinderkoordinatensystem so, daß ihre Längsachse mit der z-Achse zusammenfällt und der Spulenmittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Spule habe den Radius a und die Länge  $2z_N$  (d.h. sie reicht von  $-z_N$  bis  $z_N$ ) und trage  $2N+1$  Stromringe in den Ebenen  $z_n = \text{const}$  ( $n = -N, \dots, N$ ), die i.a. keine gleichweiten Abstände voneinander haben.

Berechnet man an einem beliebigen Punkt z auf der Zylinderachse das Magnetfeld, das durch einen Kreisstrom der Stärke I in der Ebene  $z_n = \text{const}$  hervorgerufen wird (es hat nur eine Axialkomponente), so ergibt sich nach dem Biot-Savart-Gesetz der Betrag:

$$H_n(z) = \frac{I}{2a} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z - z_n)^2}} \right)^3 = \frac{I}{2a} \sin^3 \Theta_n(z) \quad (1)$$

$\Theta_n(z)$  bezeichnet den halben Öffnungswinkel des durch den Aufpunkt z und die Kreisschleife bei  $z_n$  bestimmten Kegels (vgl. Abbildung 1)

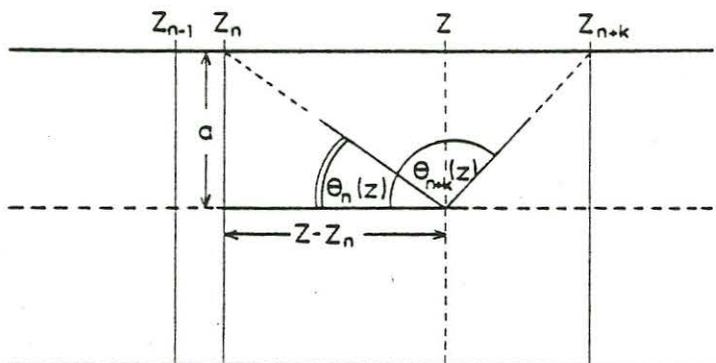


Abb. 1: Zur Berechnung des Magnetfeldes auf der z-Achse am Ort z, hervorgerufen durch einen Kreisstrom in der Ebene  $z_n = \text{const.}$

Zur Vereinfachung werden alle Längen auf den Radius a des Zylinders und das Magnetfeld  $H_n(z)$  auf  $H_n(z_n) = I/2a$  (unabhängig von n) normiert, so daß man statt (1) erhält:

$$H_n(z) = \sin^3 \theta_n(z) \quad (1a)$$

Alle  $2N+1$  Schleifen zusammen liefern am Punkt z das Feld:

$$H(z) = \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n(z) \quad (2)$$

Sei  $\bar{H}$  ein (entsprechend normiertes) mittleres Achsenfeld (dessen Definition sich weiter unten ergeben wird), so ist der Fehler an der Stelle z:

$$D(z) = H(z) - \bar{H} = \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n(z) - \bar{H} \quad (3)$$

Der relative Fehler wird:

$$D_r(z) = \frac{D(z)}{\bar{H}} = \frac{1}{\bar{H}} \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n(z) - 1 \quad (3a)$$

Der Bereich, in dem ein möglichst homogenes Feld verlangt wird, reiche von  $-z_M$  bis  $z_M$ . Am besten würde man nun über die relativen Fehlerquadrate zwischen den Grenzen  $-z_M$  und  $z_M$  integrieren und das Integral minimieren:

$$J_2 = \int_{-z_M}^{z_M} Dr^2(z) dz = z_M \int_{-1}^1 Dr^2(z_M \cdot z) dz \stackrel{!}{=} \min \quad (4)$$

Eine dazu notwendige Bedingung ist, daß das Integral über die Fehler verschwindet:

$$J_1 = \int_{-z_M}^{z_M} D(z) dz = z_M \int_{-1}^1 D(z_M \cdot z) dz = 0 \quad (5)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß als  $\bar{H}$  der Mittelwert des Feldes im Abschnitt  $z=-z_M$  bis  $z=z_M$  gewählt wird.

Man würde nun etwa für alle  $n$  die Ableitungen  $\partial J_2 / \partial z_n$  bilden und deren Nullstellen aufsuchen. Sofern man sich vergewissert, daß die dadurch bestimmten  $z_n$  wirklich zu einem Minimum von  $J_2$  führen, hätte man eine Lösung. Nun stellt sich aber heraus, daß weder  $J_2$  noch  $\partial J_2 / \partial z_n$  geschlossen darstellbar sind, so daß man auf die numerische Auswertung über eine geeignete Quadraturformel angewiesen ist. Dazu seien  $2M+1$  Stützstellen gewählt. Die Anzahl der Stützstellen sei erheblich größer als die der Drahtschleifen, da der Abstand zweier Drahtschleifen eine untere Grenze für die räumliche Wellenlänge der Schwankungen des Magnetfeldes bildet.

Wir bezeichnen also mit:

$$Q = z_M \sum_{m=-M}^M g_m \cdot D^2(z_M \cdot z_m) = z_M \sum_{m=-M}^M g_m D_m^2 \quad (6)$$

und

$$Qr = z_M \sum_{m=-M}^M g_m \cdot Dr^2(z_M \cdot z_m) \quad (6a)$$

die Summe der absoluten bzw. relativen Fehlerquadrate. Darin geben die  $z_m$  ( $m=-M, \dots, M$ ) die sich aus der Quadraturformel ergebenden Stützstellen im Intervall  $[-1, 1]$  an, die zugehörigen Gewichte sind mit  $g_m$  bezeichnet,  $D_m$  steht als Abkürzung für  $D(z_M \cdot z_m)$ . Eine entsprechende Quadratur von  $J_1$  führt zu der Summe:

$$P = z_M \sum_{m=-M}^M g_m D_m = z_M \sum_{m=-M}^M g_m \left( \sum_{n=-N}^N \sin^3 \Theta_n^m - \bar{H} \right) = 0 \quad (7)$$

wobei  $\Theta_n^m = \Theta_n(z_M \cdot z_m)$  geschrieben wird. Wegen  $\sum_{m=-M}^M g_m = 2$  erhält man daraus:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M g_m \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^m \quad (8)$$

$$D_{\bar{m}} = \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^{\bar{m}} - \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M g_m \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^m \quad (9)$$

$$Dr_{\bar{m}} = \left( 2 \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^{\bar{m}} \right) / \left( \sum_{m=-M}^M g_m \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^m \right) - 1 \quad (9a)$$

Wegen der Unhandlichkeit des Bruches in (9a) wird davon abgesehen, die Summe der relativen Fehlerquadrate zu minimieren. Stattdessen wird Q minimiert. Scheinbar kann dadurch das Ergebnis verzerrt werden; später wird sich aber zeigen, daß der Algorithmus so eingerichtet werden kann, daß sich das mittlere Feld  $\bar{H}$  bei veränderter Anordnung der Stromschleifen auf dem Zylinder fast nicht ändert.

Die Aufgabe besteht also darin, die Orte  $z_{\bar{n}}$  ( $\bar{n}=-N, \dots, N$ ) der Stromschleifenebenen auf der z-Achse zwischen  $-z_N$  und  $z_N$  so zu bestimmen, daß Q minimal wird. Damit wird man auf ein System von  $2N+1$  Gleichungen ( $\bar{n}=-N, \dots, N$ ) geführt:

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial z_{\bar{n}}} = z_M \sum_{\bar{m}=-M}^M g_{\bar{m}} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{n}}} D_{\bar{m}}^2 = 2z_M \sum_{\bar{m}=-M}^M g_{\bar{m}} D_{\bar{m}} \frac{\partial D_{\bar{m}}}{\partial z_{\bar{n}}} \quad (10)$$

Mit

$$\frac{\partial D_{\bar{m}}}{\partial z_{\bar{n}}} = \frac{\partial}{\partial z_{\bar{n}}} \sin^3 \theta_{\bar{n}}^{\bar{m}} - \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M g_m \frac{\partial}{\partial z_{\bar{n}}} \sin^3 \theta_{\bar{n}}^m$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z_{\bar{n}}} \sin^3 \theta_{\bar{n}}^m = 3 \sin^4 \theta_{\bar{n}}^m \cos \theta_{\bar{n}}^m$$

wird daraus:

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial z_{\bar{n}}} = 6z_M \sum_{\bar{m}=-M}^M \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M g_m \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^m - g_{\bar{m}} \sum_{n=-N}^N \sin^3 \theta_n^{\bar{m}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^M g_m \sin^4 \theta_{\bar{n}}^m \cos \theta_{\bar{n}}^m - \sin^4 \theta_{\bar{n}}^{\bar{m}} \cos \theta_{\bar{n}}^{\bar{m}} \right] \quad (11)$$

Dieses System läßt sich wegen der Symmetrie des Zylinders zur Ebene  $z=0$  reduzieren, wenn man die Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} z_{-n} &= -z_n \\ \varphi_{-m} &= \varphi_m \\ \sin \theta_n^{-m} &= \sin \theta_n^m \\ \cos \theta_n^{-m} &= -\cos \theta_n^m \\ \frac{\partial Q}{\partial z_{-n}} &= -\frac{\partial Q}{\partial z_n} \end{aligned}$$

berücksichtigt. Statt (11) erhält man das Gleichungssystem ( $\bar{n}=0, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{6z_M} \frac{\partial Q}{\partial z_{\bar{n}}} = \\ &\sum_{\bar{n}} \varphi_{\bar{n}} \left[ \sum_n \sin^3 \theta_n^{\bar{n}} - \sum_m \varphi_m \sum_n \sin^3 \theta_n^m - \frac{\varphi_0}{2} \sum_n \sin^3 \theta_n^0 \right] \\ &\cdot \left[ \sin^4 \theta_n^{\bar{n}} \cos \theta_n^{\bar{n}} - \sin^4 \theta_n^{\bar{n}} \cos \theta_n^{\bar{n}} - \varphi_0 \sin^4 \theta_n^0 \cos \theta_n^0 - \sum_m \varphi_m (\sin^4 \theta_n^m \cos \theta_n^m - \sin^4 \theta_n^m \cos \theta_n^m) \right] \\ &+ \frac{\varphi_0}{2} \left[ \left(1 - \frac{\varphi_0}{2}\right) \sum_n \sin^3 \theta_n^0 - \sum_m \varphi_m \sum_n \sin^3 \theta_n^m \right] \\ &\cdot \left[ (2 - \varphi_0) \sin^4 \theta_n^0 \cos \theta_n^0 - \sum_m \varphi_m (\sin^4 \theta_n^m \cos \theta_n^m - \sin^4 \theta_n^m \cos \theta_n^m) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Für die Fehlerquadratsumme erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} Q &= 2z_M \sum_{\bar{n}} \varphi_{\bar{n}} \left[ \sum_n \sin^3 \theta_n^{\bar{n}} - \sum_m \varphi_m \sum_n \sin^3 \theta_n^m - \frac{\varphi_0}{2} \sum_n \sin^3 \theta_n^0 \right]^2 \\ &+ z_M \varphi_0 \left[ \left(1 - \frac{\varphi_0}{2}\right) \sum_n \sin^3 \theta_n^0 - \sum_m \varphi_m \sum_n \sin^3 \theta_n^m \right]^2 \end{aligned} \quad (13)$$

In beiden Formeln ist bei  $m$  oder  $\bar{m}$  unter dem Summenzeichen von 1 bis  $M$  zu summieren, eine Summation über  $n$  erstreckt sich von  $-N$  bis  $N$ .

Das Gleichungssystem (12) direkt nach  $\Theta_n^m$  aufzulösen und daraus  $z_n$  zu bestimmen, erweist sich wegen der Nichtlinearität als nicht möglich. Deshalb soll hier mit der Gradientenmethode ein Minimum von  $Q$  aufgesucht werden. So wird man, mit äquidistanten Stromschleifen beginnend, für jede Schleife  $\partial Q / \partial z_n$  berechnen und damit die Richtung des Gradienten von  $Q$  im  $(2N+1)$ -dimensionalen Raum erhalten. Korrekturen in entgegengesetzter Richtung angebracht, etwa nach der Form

$$z_n^{(k+1)} = z_n^{(k)} - \alpha \frac{\partial Q}{\partial z_n^{(k)}} \quad (14)$$

führen bei geeigneter Wahl von  $\alpha$  an ein relatives Minimum von  $Q$ . Die Richtung der Korrekturen gewährleistet automatisch, daß nicht ein Maximum als Extremum erreicht wird.

Der Algorithmus weist jedoch noch eine Schwäche auf: Er führt nicht nur dazu, die Schleifenabstände ungleichmäßig zu machen, sondern auch dazu, die Spule insgesamt zu verlängern, wobei zwar die Summe der absoluten Fehlerquadrate abnimmt, die der relativen aber zunimmt. Um dem entgegenzuwirken, wird nach jedem Iterationsschritt die Anordnung der Schleifen durch lineare Transformation auf die vorher gewählte Spulenlänge reduziert. Damit treten dann nur noch Schleifenverschiebungen im zugelassenen Längenbereich auf, und das mittlere Feld bleibt nahezu unverändert.

#### Ein Beispiel

Vorgeführt werden soll das Verfahren am Beispiel einer Zylinder- spule mit einem Längen-Breiten-Verhältnis von 5, an die die Forde- rung gestellt wird, auf etwa 90% der Gesamtlänge ein möglichst homogenes Feld längs der Mittelachse zu erzeugen. Insgesamt 101 Stromschleifen ( $N=50$ ) sind vorgesehen, und 1001 Stützstellen ( $M=500$ ) werden benutzt. Nach 78 Iterationen ist die Summe der Fehlerquadrate  $Q$  auf 0.1% derjenigen bei äquidistanten Stromschlei- fen gesunken. Das mittlere Feld  $\bar{H}$  hat sich hierbei um weniger als 2% geändert. Abbildung 2 zeigt einen Vergleich zwischen einer Spule mit äquidistanter Anordnung und derjenigen mit verbesserter Anord- nung der Schleifen. Dargestellt ist nur eine Spulenhälfte. Die

Kurven im oberen Kasten zeigen oben die relative Abweichung des Axialfeldes vom Feld im Mittelpunkt der Spule bei äquidistantem Schleifenabstand, darunter die der verbesserten Spule. Strichpunktuiert eingetragen ist die Grenze des 90%-Längenbereiches. Die Vorzeichen (+)/(-) geben an, ob das Feld größer oder kleiner als im Mittelpunkt der Spule ist. Sowohl das Ergebnis nach 78 als auch das nach 250 Iterationen ist eingetragen.

Fehler wurden erst ab einer Größe von 0.1% aufgetragen, um der technischen Konstruktionsungenauigkeit gerecht zu werden: Die Baufehler werden als normalverteilt angenommen. Sei der mittlere Fehler des Spulenradius  $\Delta a$ , und sei nach Gleichung (1) das an der Stelle  $z$  vom Stromring in  $z_n$  hervorgerufene Feld:

$$H_n = \frac{I}{2} \frac{a^2}{[a^2 + (z - z_n)^2]^{3/2}} \quad (15)$$

Dann liefert eine Differentiation nach  $a$  und Berücksichtigung der Normierung sowie der Gleichung (1a):

$$\frac{\partial H_n}{\partial a} = \sin^3 \theta_n \cdot (2 - 3 \sin^2 \theta_n)$$

Die Gleichung bzw. deren Ableitung nach  $\theta_n$  zeigt, daß der Betrag des Fehlers am größten für  $z=z_n$  wird, monoton abnimmt und nach einer Nullstelle bei  $|z-z_n| = \sqrt{2}^n / 2$  wieder auf nur noch 1/5 dieses Wertes anwächst, bevor er für  $|z-z_n| \rightarrow \infty$  monoton auf Null abfällt. Somit tragen die  $z$  am nächsten liegenden Windungen am meisten zum Fehler in  $z$  bei, und der mittlere Gesamtfehler wird am größten für  $z=0$ . Dort erhält man:

$$\frac{\Delta H^0}{\bar{H}} \approx \frac{\Delta a}{\bar{H}} \sqrt{2 \sum_{n=1}^N [(2 - 3 \sin^2 \theta_n^0) \cdot \sin^3 \theta_n^0]^2 + 1} \quad (16)$$

Der mittlere Fehler der Position eines jeden Stromringes sei  $\Delta z$ . Aus (15) erhält man wieder:

$$\frac{\partial H_n}{\partial z_n} = 3(z - z_n) \cdot \sin^5 \theta_n = 3 \sin^4 \theta_n \cos \theta_n$$

Der Fehler verschwindet bei  $z=z_n$ , nimmt aber rasch zu, erreicht sein Maximum schon bei  $|z-z_n| = 0.5$  und nimmt dann monoton auf Null ab. Also wird der Gesamtfehler wieder am größten bei  $z=0$ :

$$\frac{\Delta H^o}{\bar{H}} \approx \frac{3 \Delta z}{\bar{H}} \sqrt{2 \sum_{n=1}^N (\sin^4 \theta_n^o \cos \theta_n^o)^2} \quad (17)$$

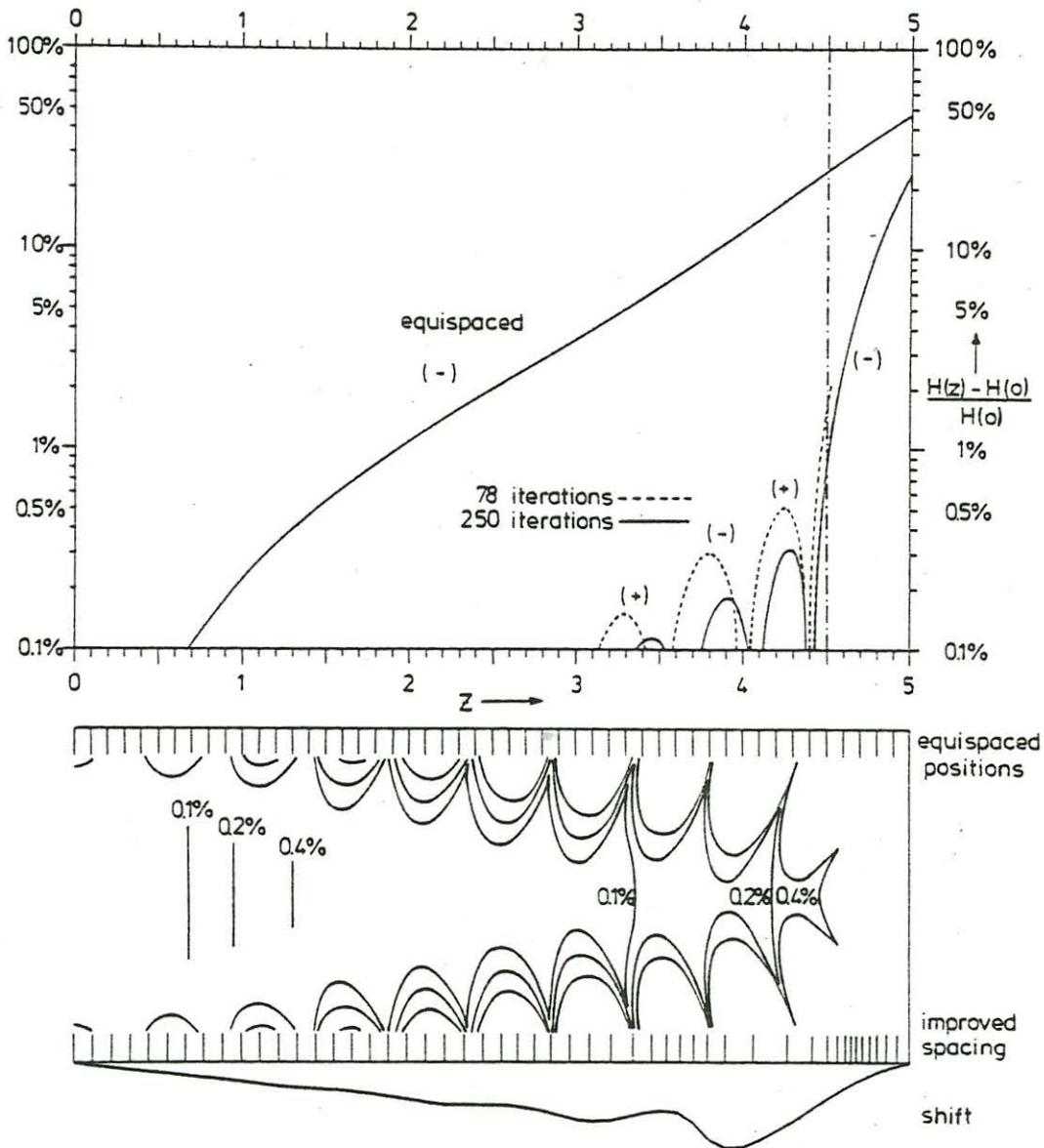


Abb. 2: Abweichung des achsenparallelen Magnetfeldes auf der Mittelachse der Spule vom Feld im Spulenmittelpunkt bei äquidistanter Anordnung der Stromschleifen und bei veränderter Anordnung nach 78 bzw. 250 Rechenschritten (oberer Kasten). Für den letzten Fall Einhüllende der 0.1%- , 0.2%- und 0.4%-Bereiche sowie die verschobene Schleifenanordnung (unterer Kasten). Am unteren Rand die Größe der Schleifenverschiebung im gleichen Maßstab.

Wählt man  $a=10\text{ cm}$  (d.h. die Spulenlänge beträgt  $100\text{ cm}$  bei  $20\text{ cm}$  Durchmesser), und läßt man für  $\Delta a$  und  $\Delta z$  je  $0.5\text{ mm}$  zu (was feinmechanisch leicht realisierbar ist), so ergibt sich aus beiden zusammen ein baubedingter Fehler von  $\Delta H^0/\bar{H} \approx 0.1\%$ .

Im unteren Teil von Abb. 2 ist eine Spulenhälfte maßstabsgetreu aufgetragen. Am oberen Rand ist die äquidistante Ringverteilung durch vertikale Striche angedeutet, am unteren Rand das Ergebnis der Verbesserung. Die Größe der Verschiebung wird - ebenfalls maßstabsgetreu - durch die Kurve ganz unten veranschaulicht. Definitionsgemäß ist sie in der Mitte der Spule und am Ende Null, dazwischen aber keineswegs sehr gleichmäßig, sondern nimmt abwechselnd zu und ab und erreicht ihr Maximum von knapp über  $0.5$  bei  $z \approx 3.9$ . Dieses Verhalten ähnelt den Ergebnissen von MONTGOMERY (1969, p. 260) für zusammengesetzte Spulen. Im Innenraum der Spule sind die Bereiche abgebildet, in denen die Abweichung vom Mittelpunktfeld weniger als  $0.1\%$ ,  $0.2\%$  und  $0.4\%$  beträgt. Die vertikalen Striche deuten die Grenzen der Bereiche bei äquidistanter Schleifenverteilung an, die Girlanden markieren die Grenzen der verbesserten Anordnung. Die achsenparallelen Feldkomponenten für Punkte außerhalb der  $z$ -Achse wurden der Zusammenstellung von HART (1967) entnommen.

#### Literatur:

Garrett, M.W.: Thick Cylindrical Coil Systems for Strong Magnetic Fields with Field or Gradient Homogeneities of the 6th to 20th Order. J. Appl. Phys. Vol 38 Nr. 6, 2563 - 2586, 1967.

Hart, Ph.J.: Universal Tables for Magnetic Fields of Filamentary and Distributed Circular Currents. American Elsevier Publ. Comp., New York, 1967.

Montgomery, D.B.: Solenoid Magnet Design - The Magnetic and Mechanical Aspects of Resistive and Superconducting Systems. J. Wiley Interscience Publ., New York, 1969.

Serson, P.H.: Compact Bias Coil Systems for Geomagnetic Measurements. Publ. Earth Physics Branch Vol 44 Nr. 10, Ottawa, 1974.