P. NEURIEDER

Ein praktisches Verfahren zur Entzerrung des durch autokorrellierte Störungen hervorgerufenen Biasfehlers des magnetotellurischen Impedanztensors

Üblicherweise werden bei der multiplen linearen Regression zur Berechnung des Impedanztensors in der Magnetotellurik im Frequenzbereich die Fehlerfunktionen

$$1.1.\quad \sum_{i=1}^{N} d^2E_{yi} = \sum_{i=1}^{N}((E_{yi}-Z_{yx}H_{xi}-Z_{yy}H_{yi})(E^*_{yi}-Z_{yx}H^*_{xi}-Z_{yy}H^*_{yi}))$$

$$\sum_{i=1}^{N} d^2E_{xi} = \sum_{i=1}^{N}((E_{xi}-Z_{xx}H_{xi}-Z_{xy}H_{yi})(E^*_{xi}-Z_{xx}H^*_{xi}-Z_{xy}H^*_{yi}))$$

minimiert (z.B. Rokityansky, 1982, S.196), wobei N die Anzahl der äquivalenten Freiheitsgrade des Ausgleichssegmentes ist. Unter dieser Bedingung wird die Regressionsmatrix $\underline{Z}$ der Vektorgleichung

$$1.2.\quad \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx1} & Z_{xy1} \\ Z_{yxi} & Z_{yyi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{xi} \\ H_{yi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dE_{xi} \\ dE_{yi} \end{pmatrix} \qquad (i = 1,N)$$

als Impedanztensor geschätzt.

Dieser Ansatz geht von der Annahme aus, daß allein die Powerspektren der tellurischen Feldkomponenten durch ihre jeweils autokorrellierten Noise-Anteile fehlerbehaftet sind. Der daraus resultierende Biasfehler (hier zu hohe Schätzwerte!) für die Elemente von $\underline{Z}$ wird minimiert. Dabei bleiben die autokorrellierten Noise-Anteile in den Powerspektren von H_x und H_y unberücksichtigt (diese würden auf zu tiefe Schätzwerte führen). Bei einem angenähert gleichen Störungseinfluß von nicht signalkorrelliertem Noise in allen 4 Feldkomponenten werden, da nur der Zähler jedes Regressionsfaktors in $\underline{Z}$ weitgehend von Bias-Einflüssen entzerrt wird, zu niedrige Impedanzen geschätzt.

Nun gibt es eine ganze Reihe von in der Praxis sehr aufwendigen Vorschlägen, wie durch sukzessive Permutation der 4 Feldkomponenten in 1.1. eine große Zahl von Regressionsmatrizen unter verschieden Bedingungen der Fehlerminimierung berechnet und damit der Bias der Impedanzen minimiert, ja sogar völlig ausgeschlossen werden kann. Eine Möglichkeit, auf die Rangordnung der Beeinflussung der einzelnen Feldkomponenten aus der Rangordnung der Einzellösungen der verschiedenen Regressionsmatrizen zu schließen und damit ohne Mittelung eine nur minimal verzerrte Lösung für $\underline{Z}$ zu bestimmen, ist in Kao und Rankin (1977) beschrieben. Für die 5-Komponenten-Registrierung (einschließlich H_z) gibt Müller (1982) völlig autopowerfreie Lösungen für die Schätzung des Impedanz- und Leitwertstensors an, in denen sich der autokorrellierte Noise von Powerspektren nicht mehr als Biasfehler auswirken kann.

Im folgenden wird jedoch eine Möglichkeit vorgeschlagen, wie vor allem durch die Berücksichtigung des in der Praxis häufig auftretenden Falles der Drehung des Meßkoordinatensystemes in die Richtung parallel zur Ausprägung einer zweidimensionalen Leitfähigkeitsstruktur eine sinnvolle Auswahl einer kleinen Zahl von Regressionsansätzen getroffen werden kann. Da durch die Drehung das Signal/Noise-Verhältnis in E_y' minimiert und in E_x' vergrößert wird, ist die Fehlerminimierung von dE_x z.B. dreimal angesetzt worden, die von dE_y dafür nur einmal.

Gesucht sind also weitere Paare von Fehlerfunktionen ähnlich 1.1., die uns die Möglichkeit geben, jedes Element des Impedanztensors $\underline{Z}$ auch auf der Grundlage einer anderen Fehlerverteilung zu ermitteln. Wir wählen die 3 Fehleransätze

2.1. $$\sum_{i=1}^{N} d^2H_{xi} = \sum_{i=1}^{N}((H_{xi}-Y_{xx}E_{xi}-Y_{xy}E_{yi})(H_{xi}^{*}-Y_{xx}E_{xi}^{*}-Y_{xy}E_{yi}^{*}))$$
$$\sum_{i=1}^{N} d^2H_{yi} = \sum_{i=1}^{N}((H_{yi}-Y_{yx}E_{xi}-Y_{yy}E_{yi})(H_{yi}^{*}-Y_{yx}E_{xi}^{*}-Y_{yy}E_{yi}^{*}))$$

3.1. $$\sum_{i=1}^{N} d^2E_{xi} = \sum_{i=1}^{N}((E_{xi}-A_{xx}E_{yi}-A_{xy}H_{yi})(E_{xi}^{*}-A_{xx}E_{yi}^{*}-A_{xy}H_{yi}^{*}))$$
$$\sum_{i=1}^{N} d^2H_{xi} = \sum_{i=1}^{N}((H_{xi}-A_{yx}E_{yi}-A_{yy}H_{yi})(H_{xi}^{*}-A_{yx}E_{yi}^{*}-A_{yy}H_{yi}^{*}))$$

4.1. $$\sum_{i=1}^{N} d^2E_{xi} = \sum_{i=1}^{N}((E_{xi}-K_{xx}H_{xi}-K_{xy}E_{yi})(E_{xi}^{*}-K_{xx}H_{xi}^{*}-K_{xy}E_{yi}^{*}))$$
$$\sum_{i=1}^{N} d^2H_{yi} = \sum_{i=1}^{N}((H_{yi}-K_{yx}H_{xi}-K_{yy}E_{yi})(H_{yi}^{*}-K_{yx}H_{xi}^{*}-K_{yy}E_{yi}^{*}))$$

und lösen unter diesen Bedingungen die entsprechenden Vektorgleichungen

2.2 $$\begin{pmatrix} H_{xi} \\ H_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{xx} & Y_{xy} \\ Y_{yx} & Y_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dH_{xi} \\ dH_{yi} \end{pmatrix}$$

3.2. $$\begin{pmatrix} E_{xi} \\ H_{xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{yi} \\ H_{yi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dE_{xi} \\ dH_{xi} \end{pmatrix}$$

4.2. $$\begin{pmatrix} E_{xi} \\ H_{yi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{xi} \\ E_{yi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dE_{xi} \\ dH_{yi} \end{pmatrix}$$

Analog zum Impedanztensor erkennen wir die Tensoren $\underline{Y}$, $\underline{A}$ und $\underline{K}$ als Leitwerts-, Ketten- bzw. Hybridtensor.

Wir transformieren nun diese Tensoren in die entsprechenden Impedanztensoren um und berücksichtigen dabei die bekannten Vierpoltransformationen (z.B. Freitag, 1975); damit erhalten wir zur Lösung $\underline{Z}_1$ aus 1.2. drei weitere Lösungen $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$:

2.3. $$\underline{Z}_2 = \begin{pmatrix} Z_{xx2} & Z_{xy2} \\ Z_{yx2} & Z_{yy2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \underline{Y}} \begin{pmatrix} Y_{yy} & -Y_{xy} \\ -Y_{yx} & Y_{xx} \end{pmatrix}$$

3.3. $$\underline{Z}_3 = \begin{pmatrix} Z_{xx3} & Z_{xy3} \\ Z_{yx3} & Z_{yy3} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{yx}} \begin{pmatrix} A_{xx} & \det \underline{A} \\ 1 & A_{yy} \end{pmatrix}$$

4.3. $$\underline{Z}_4 = \begin{pmatrix} Z_{xx4} & Z_{xy4} \\ Z_{yx4} & Z_{yy4} \end{pmatrix} = \frac{1}{K_{yy}} \begin{pmatrix} \det \underline{K} & K_{xy} \\ -K_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

Ist der Anteil an nicht signalkorrellierten Störungen in den einzelnen Feldkomponenten unbekannt, so erbringt im allgemeinen eine Mittelung über alle 4 Lösungen eine bessere Schätzung der Impedanz als die Auswertung mit nur einem einzigen Paar der Fehlerfunktionen 1.1., 2.1., 3.1. oder 4.1.; eine einfache arithmetische Mittelung wäre denkbar:

5. $$\underline{Z} = \frac{1}{4} \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \right)$$

Um eine beste und stabilste Schätzung aus den vier Einzellösungen zu erhalten, wird die Gewichtsfunktion der Varianzen der Einzellösungen eingeführt:

6. $$g_{ij} = \left(s_{ij}^2 \sum_{m=1}^{4} \frac{1}{s_{ijm}^2} \right)^{-1} \qquad (i=x,y;\ j=x,y)$$
bei festen i und j

Diese hat die Eigenschaft, daß die Summe der Gewichte über 4 Lösungen gerade zu Eins wird:

$$\sum_{m=1}^{4} g_{ijm} = 1 \qquad \text{bei festen i und j}$$

Damit wird eine beste Schätzung der Impedanz aus den 4 hier vorgeschlagenen Lösungen

7. $$Z_{ij} = \sum_{m=1}^{4} g_{ijm} Z_{ijm} \qquad \text{für festgehaltene } i,j$$

oder in expliziter Schreibweise

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{4} g_{xxm} Z_{xxm} & \sum_{m=1}^{4} g_{xym} Z_{xym} \\ \sum_{m=1}^{4} g_{yxm} Z_{yxm} & \sum_{m=1}^{4} g_{yym} Z_{yym} \end{pmatrix}$$

Für gleiche s_{ijm}^2 ($m = 1,..,4$) werden die $g_{ij} = \frac{1}{4}$ und aus 7. wird 5..

Ähnliche Verfahren zur Mittelung von Lösungen aus ausgewählten Fehlerminimierungsansätzen schlagen auch Gundel (1977) und Jödicke (1978) zur Verbesserung der Impedanzschätzung vor. Bei der hier vorgeschlagenen Lösung gehen allerdings mehr Informationen der Spektralmatrizen in die Einzellösungen $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ ein. Darüber hinaus bieten die Einzellösungen als Matrizen, welche die Eigenschaften von Vierpolen beschreiben, den Vorteil der Anwendbarkeit auf Modellrechnungen mit Durchlaßketten aus elektrischen Vierpolen (für 1-dimensionale Leitfähigkeitsverteilung). Portis (1978) verwendet z.B. die Kettenmatrix $\underline{A}$ zur Berechnung des Reflexionskoeffizienten für einen N-Schichtenfall.

Literatur:

Rokityansky, I.I.: Geoelectromagnetic Investigation of the Earth's Crust and Mantle. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

Kao, D.W. and Rankin, D.: Enhencement of signal-to-noise ratio in magnetotelluric data. Geophys., 42, 103-110, 1977.

Müller, W.: Unified Calculation of the Magnetotelluric Impedance and Admittance Tensor Elements. Geolog.Jhrb. (in Druck), Hannover, 1982.

Freitag, H.: Einführung in die Vierpoltheorie. Teubner Studienskripten, Verlag Teubner, Stuttgart, 1975.

Gundel, A.: Erdmagnetische Induktion in einer dreidimensionalen Salzstruktur. Diss. Math.-Naturwiss.Fak. Univ. Göttingen, 1977.

Jödicke, H.: Auswertungsverfahren Münster. Prot.Koll.Elektromagnet.Tiefenforschung, Neustadt/Weinstraße, 1978

Portis, A.M.: Electromagnetic Fields - Sources and Media. Verlag John Wiley & Sons, New York, Toronto, 1978