

Vortrag Prof. Dr. Angenheister, München

---

"Zwei-Stockwerks-Stromsysteme beschrieben durch ein einfaches Drahtmodell"

---

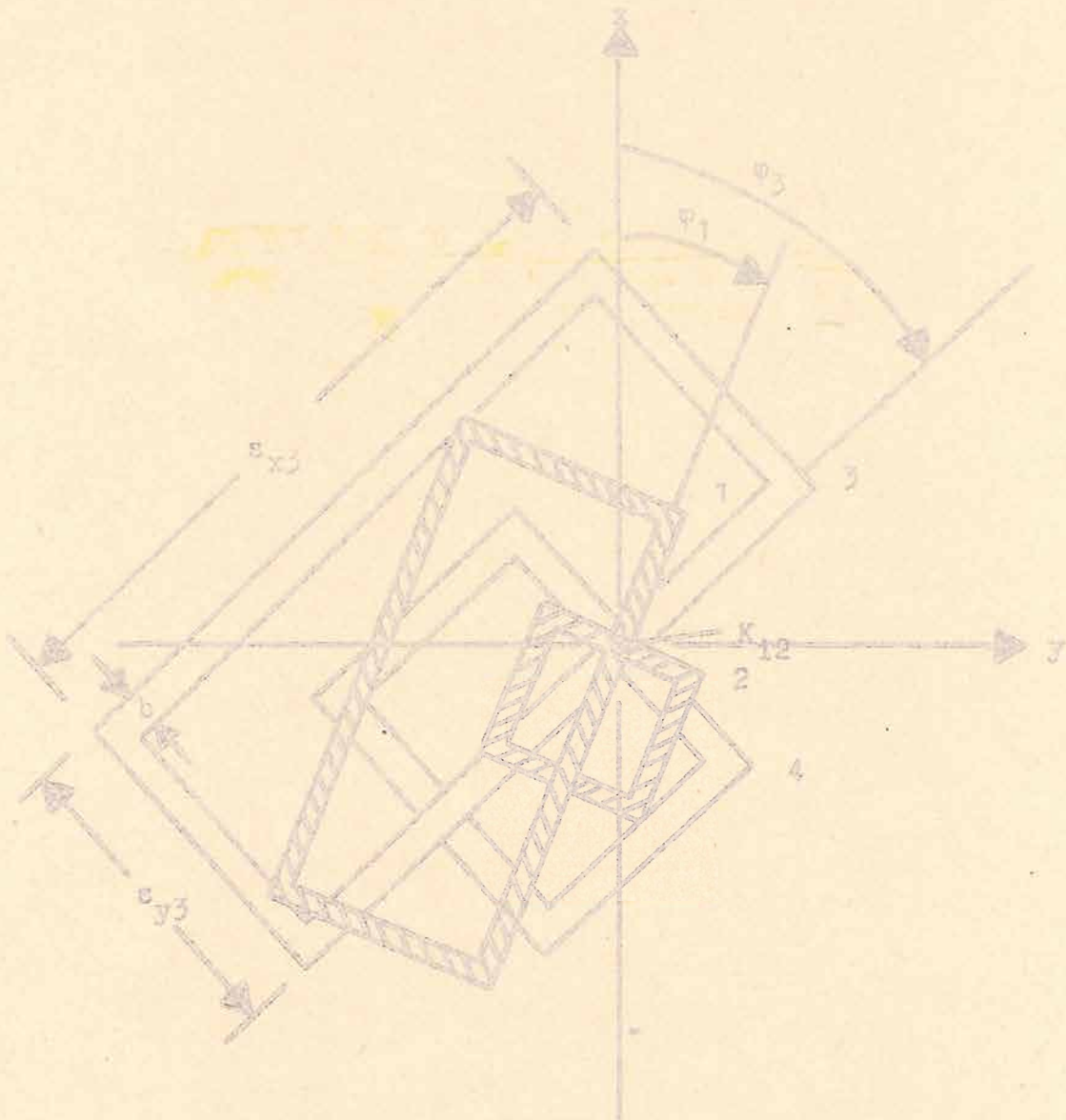
Donnerstag, den 30.9.1965

Einleitung: Unter einem Drahtmodell soll eine räumliche Verteilung linearer Leiter (Drähte) verstanden werden, durch die körperliche Leiter (räumliche Verteilung der Leitfähigkeit) ersetzt werden. Im folgenden wird ein einfaches Drahtmodell beschrieben, bei dem zwei oder ein linearer Leiter z.B. in Form eines Rechteckes in einer horizontalen Ebene liegen und als Ersatz für die gutleitende Deckschicht der Sedimente angesehen werden. Unter diesem oberen Leitersystem liegt ein zweites, das aus zwei oder einem ebenen, linearen Leiter - ebenfalls in Rechteckform - besteht. Diese beiden Leiter mögen gegen die Vertikale um beliebige Winkel  $\psi$  geneigt sein. Zwischen den beiden Leitersystemen möge keine Verbindung bestehen. Dies entspricht der Existenz der Resistospäre. In diesem Modell ist berücksichtigt worden, daß die gutleitende Deckschicht der Sedimente dünn ist, während der gutleitende obere Mantel sich weit in die Tiefe ausdehnt. Zunächst sei zur Verdeutlichung der einfache Fall betrachtet, bei dem auch die beiden Leiter des unteren Systems horizontal liegen. In Fig. 1 ist eine Aufsicht dargestellt. Bei dem Kolloquium in Goslar wurde nur diese Form des Drahtmodells erörtert, bei dem nur die vertikale Komponente des induzierenden Feldes einging. Bei der Diskussion (Kertz, Siebert) wurde dies als Schwäche des Modells empfunden. Auf Grund dieser Anregung wurde das Modell in der oben skizzierten Form erweitert.

Beschreibung des Modells: Der gegenseitige Abstand  $h$  der beiden Ebenen sei klein gegenüber dem Durchmesser der beiden Systeme. Jedes der beiden Leitersysteme sei durch Bänder der Breite  $b$  und der Dicke  $d$  gebildet und soll aus je zwei sich kreuzenden Rechtecken bestehen, deren Seiten mit  $s_{xi}$  und  $s_{yi}$  bezeichnet werden. Es mögen folgende Bedingungen gelten:

(1) Seite  $s \gg$  Breite  $b \gg$  Abstand  $h \gg$  Dicke  $d$ .

Der Einfachheit halber wird angenommen, daß die Bänder der beiden Leiter einer Ebene nur in einem Kreuzungspunkt miteinander



Figur 1: Zwei-Stoekwërks-Stromsystem: oberes Leitersystem (Leiter 1 u. 2) und unteres Leitersystem (Leiter 3 u. 4) horizontal. Kreuzungspunkt  $K_{12}$  liegt über Kreuzungspunkt  $K_{34}$ . Alle Leiter werden als lineare Leiter angesehen, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Kreuzungspunkte  $K_{12}$  und  $K_{34}$ , wo sie als Leiter von Flächenströmen betrachtet werden.



verbunden sind ( $K_{12}$  und  $K_{34}$ ). Die beiden Leiter Systeme seien so angeordnet, daß der Kreuzungspunkt  $K_{12}$  des oberen Systems über dem entsprechenden Kreuzungspunkt  $K_{34}$  des unteren Leiters liegt. Die Beobachtung des magnetischen und elektrischen Feldes möge im Kreuzungspunkt  $K_{12}$  erfolgen. Das Maßsystem sei nach den  $xy$ -Koordinaten orientiert. Aus der Messung ist daher  $E_x, E_y$  und  $H_x, H_y$  in  $K_{12}$  bekannt. Die  $x$ -Achse bilde am Kreuzungspunkt  $K_{12}$  mit dem Leiter 1 des oberen Systems den Winkel  $\varphi_1$  und mit dem Leiter 3 des unteren Systems den Winkel  $\varphi_3$ .

In folgenden wird nun angenommen, daß die Ströme hinsichtlich der Messung des erdlektrischen ( $\vec{E}$ ) und erdmagnetischen ( $\vec{H}$ ) Feldes in  $K_{12}$  wegen der Bedingung (1) als Flächenströme angesehen werden können. Die Dichte der Flächenströme sei  $\vec{j} \cdot d$  (Strom pro Breite, z.B. Amp/km).

Abgesehen von der Umgebung der Kreuzungspunkte ist die Stromdichte  $j$  in jedem Leiter konstant, da spezifischer Widerstand, Breite und Dicke der Leiter konstant sein sollen. Im Zentrum des Kreuzungsbereiches  $K_{12}$  ist die Komponente  $j_1(x)$  proportional  $j_1$  im Leiter 1. Es gilt also

$$(2) \quad j_1(K_{12}) = a_1 j_1, \quad j_2(K_{12}) = a_2 j_2, \quad j_3(K_{34}) = a_3 j_3,$$

$$j_4(K_{34}) = a_4 j_4. \quad \text{Die Proportionalitätskonstanten } a \text{ hängen}$$

nur von der Geometrie der Kreuzungen ab, sofern die Selbstinduktion des Kreuzungsbereiches vernachlässigt werden kann. Bei hinreichender Symmetrie sind alle Größen  $a$  gleich, so daß die Indizes entfallen können.

Da längs der Leiter  $\varphi, b$  und  $d$  konstant sind, sind auch die Beträge des Stromes  $I$  und des elektrischen Feldes  $E$  in den Leitern konstant. Dies gilt zwar nicht für die Kreuzungsbereiche, wo die Verhältnisse komplizierter sind. Die Kreuzungsbereiche seien aber klein gegenüber den Leitersystemen, so daß sie bei Berechnung der Umfangsspannung nicht beachtet werden. - Sei  $s_1 = 2(s_{x1} + s_{y1})$  die Länge des Leiters 1, so gilt

$$(3) \quad E_1 s_1 = \oint_1 j_1 s_1 = \frac{\varphi_1 s_1}{b_1 d_1} I_1 = R_1 I_1, \quad \text{wobei } R_1 \text{ der Widerstand}$$

und  $I_1$  der Strom des Leiters 1 ist. Hieraus folgt mit (2) für die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung des Leiters

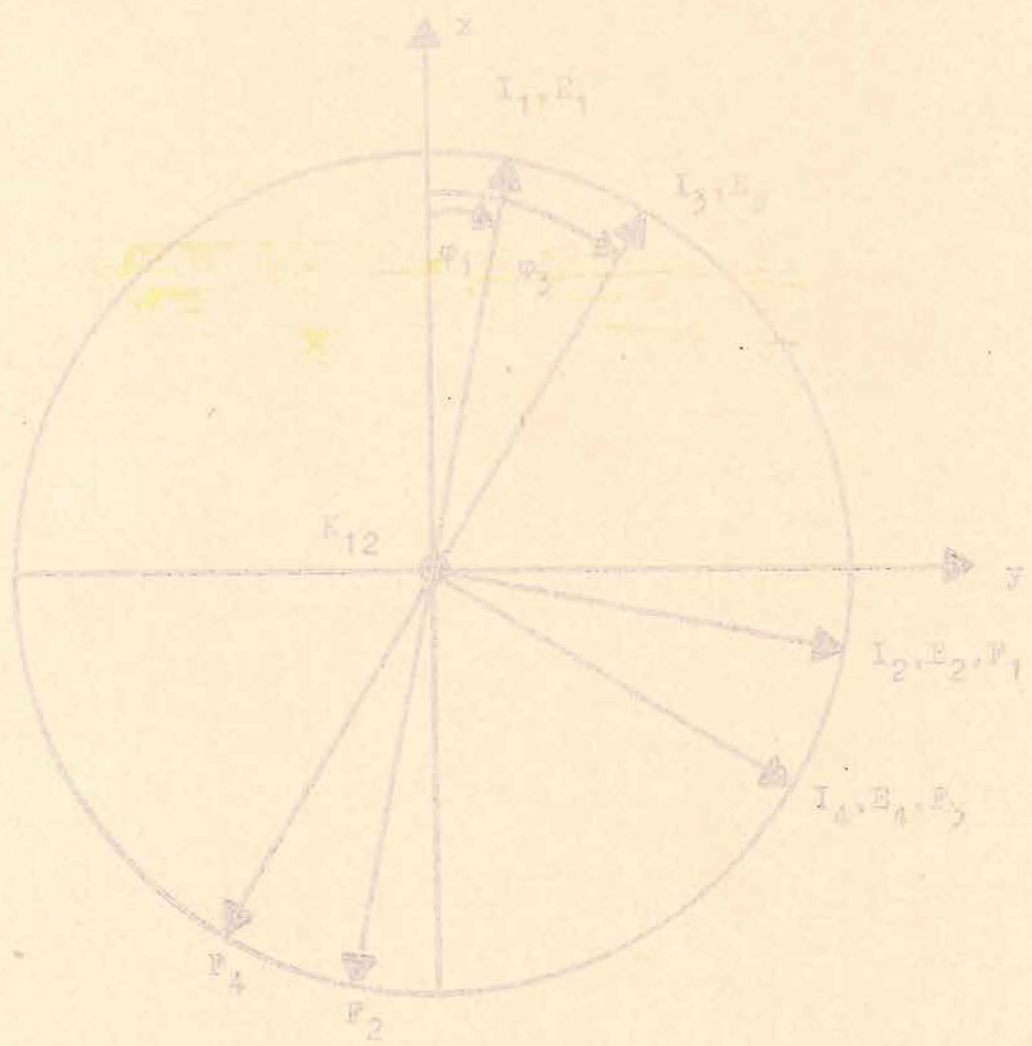
1 am Kreuzungspunkt  $K_{12}$ : (4a)  $E_1(K_{12}) = a_1 R_1 I_1 / s_1$  und analog:  
 (4b)  $E_2(K_{12}) = a_2 R_2 I_2 / s_2$ . Für die gemessenen Komponenten des  
 E-Feldes in  $K_{12}$  erhält man (siehe Fig. 2):

$$(5) \quad \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \varphi_1 - E_2 \sin \varphi_1 = \frac{a_1 R_1 I_1 \cos \varphi_1}{s_1} - \frac{a_2 R_2 I_2 \sin \varphi_1}{s_2} \\ E_y &= E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_1 = \frac{a_1 R_1 I_1 \sin \varphi_1}{s_1} + \frac{a_2 R_2 I_2 \cos \varphi_1}{s_2} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Komponenten des Magnetfeldes im Kreuzungs-  
 punkt  $K_{12}$  wird von der Bedingung (1) Gebrauch gemacht. Hiernach  
 können die Ströme hinsichtlich der Magnetfelder in  $K_{12}$  als  
 Flächenströme angesehen werden. Dies gilt auch für die Ströme  
 $\vec{J}_3$  und  $\vec{J}_4$ . Es werden nur die Magnetfelder der dem Meßpunkt  $K_{12}$   
 unmittelbar benachbarten Anteile der Flächenströme berücksich-  
 tigt. Dies ist erlaubt, wenn sich das Magnetometer hinreichend  
 dicht über dem Kreuzungsbereich des oberen Leitersystems befin-  
 det und die linearen Leiter hinreichend weit geradlinig vom  
 Kreuzungspunkt hinweggeführt sind. Die Magnetfelder der vier  
 Flächenströme addieren sich in  $K_{12}$  vektoriell. Es genügt daher,  
 zunächst das Magnetfeld nur eines Leiters zu betrachten. Wendet  
 man das Randintegral  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4 \pi I$  auf einen Weg an, der den  
 Kreuzungspunkt  $K_{12}$  enthält und rechtwinklig zum Strom  $I_1$  ver-  
 läuft, so erhält man  $F_1 = 2 \pi \cdot a_1^+ I_1 / b_1$ . Da für die anderen  
 drei Ströme je eine analoge Beziehung gilt, folgt für die meß-  
 baren Komponenten des Magnetfeldes  $\vec{F}$  (siehe Fig. 2):

$$(6a) \quad \begin{aligned} F_x &= F_x \text{ außen} - F_x \text{ innen} \\ &= F_{xa} - F_1 \sin \varphi_1 - F_2 \cos \varphi_2 - F_3 \sin \varphi_3 - F_4 \cos \varphi_3 \\ &= F_{xa} - 2\pi \left( \frac{a_1^+ I_1 \sin \varphi_1}{b_1} + \frac{a_2^+ I_2 \cos \varphi_2}{b_2} + \frac{a_3^+ I_3 \sin \varphi_3}{b_3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{a_4^+ I_4 \cos \varphi_3}{b_4} \right) \end{aligned}$$

$$(6b) \quad \begin{aligned} F_y &= F_y \text{ außen} + F_y \text{ innen} \\ &= F_{ya} + F_1 \cos \varphi_1 - F_2 \sin \varphi_1 + F_3 \cos \varphi_3 - F_4 \sin \varphi_3 \end{aligned}$$



Figur 2: Richtungen der Ströme der elektrischen und magnetischen Felder im Kreuzungspunkt  $K_{12}$  des oberen Leitersystems. Im Kreuzungspunkt werden alle Ströme als Flächenströme betrachtet.- Beachte: Bei der hier verwendeten Definition ist  $F_1$  nicht die Komponente des Magnetfeldes in der Richtung 1, sondern diejenige Komponente des Magnetfeldes, die vom Strom  $I_1$  des Leiters 1 im  $K_{12}$  erzeugt wird; sie fällt mit der Richtung des Stromes  $I_2$  ( $K_{12}$ ) zusammen.



$$F_{y_1} = 2\pi \left( \frac{a^+ \cdot I_1 \cos \varphi_1}{b_1} - \frac{a^+ \cdot I_2 \sin \varphi_1}{b_2} - \frac{a^+ \cdot I_3 \cos \varphi_3}{b_3} - \frac{a^+ \cdot I_4 \sin \varphi_3}{b_4} \right).$$

$$F_z = F_z \text{ außen.}$$

Hierbei ist  $F_{za}$  die Komponente des äußeren induzierenden,  $F_{zi}$  die Komponente des inneren induzierten Feldes.

Es sei vermerkt: Außer den vier Werten  $a^+$ , bis  $a^+$  können auch die vier Werte  $b_1$  bis  $b_4$  gleich sein, wodurch sich die Beziehungen (5) und (6) vereinfachen würden. - Die vier Ströme  $I_1$  bis  $I_4$  sind dagegen zunächst unbekannte Funktionen der Periode  $T$ , die nunmehr zu bestimmen sind.

Es sei nun zu dem allgemeineren Fall übergegangen, bei dem die beiden Leiter 3 und 4 des unteren Systems gegen die Vertikale um die Winkel  $\psi_3$  und  $\psi_4$  geneigt sind. Dabei sei angenommen, daß die breiten Seiten der Bänder zumindest in der Nähe der Kreuzungspunkte horizontal liegen. In hinreichender Entfernung vom Kreuzungspunkt können die Bänder auch in Drähte übergehen; nach dem oben Gesagten würde hierdurch das Formelwerk nicht geändert. Daher sind in Figur 3 nur Drähte gezeichnet.

In Figur 3 ist noch eine bedeutsame Vereinfachung eingeführt: Gegenüber Figur 1 besteht das obere Leitersystem nur aus dem Leiter 1. Alle Größen mit dem Index 2 entfallen also. - Dies hat zur Folge, daß das elektrische Feld im Beobachtungspunkt, der wiederum über  $K_{34}$  liege, linear polarisiert ist. Das entspricht der Beobachtung, nach der das irdische elektrische Feld an vielen Punkten innerhalb der Kontinente eine Vorzugsrichtung hat.

Für das äußere induzierende Feld gelte

$$(7) \quad F_{za} e^{i\omega t}, \quad F_{ya} e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad F_{xa} e^{i(\omega t + \beta)}.$$

Wendet man das Induktionsgesetz auf die Leiter an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 - F_{za} e^{i\theta} I_1 &= \left( \frac{R_1}{2\omega} + L_{11} \right) I_1 + L_{12} I_2 + L_{13} I_3 + L_{14} I_4 \\
 - F_{za} e^{i\theta} I_2 + L_{21} I_1 &= \left( \frac{R_2}{2\omega} + L_{22} \right) I_2 + L_{23} I_3 + L_{24} I_4 \\
 (F_{xa} \sin \varphi_3 - F_{ya} e^{i\alpha} \cos \varphi_3) I_3 \cos \psi_3 - F_{za} e^{i\theta} I_3 \sin \psi_3 & \\
 (8) \quad &= L_{31} I_1 + L_{32} I_2 + \left( \frac{R_3}{2\omega} + L_{33} \right) I_3 + L_{34} I_4 \\
 (-F_{xa} \cos \varphi_3 - F_{ya} e^{i\alpha} \sin \varphi_3) I_4 \cos \psi_4 + F_{za} e^{i\theta} I_4 \sin \psi_4 & \\
 &= L_{41} I_1 + L_{42} I_2 + L_{43} I_3 + \left( \frac{R_4}{2\omega} + L_{44} \right) I_4.
 \end{aligned}$$

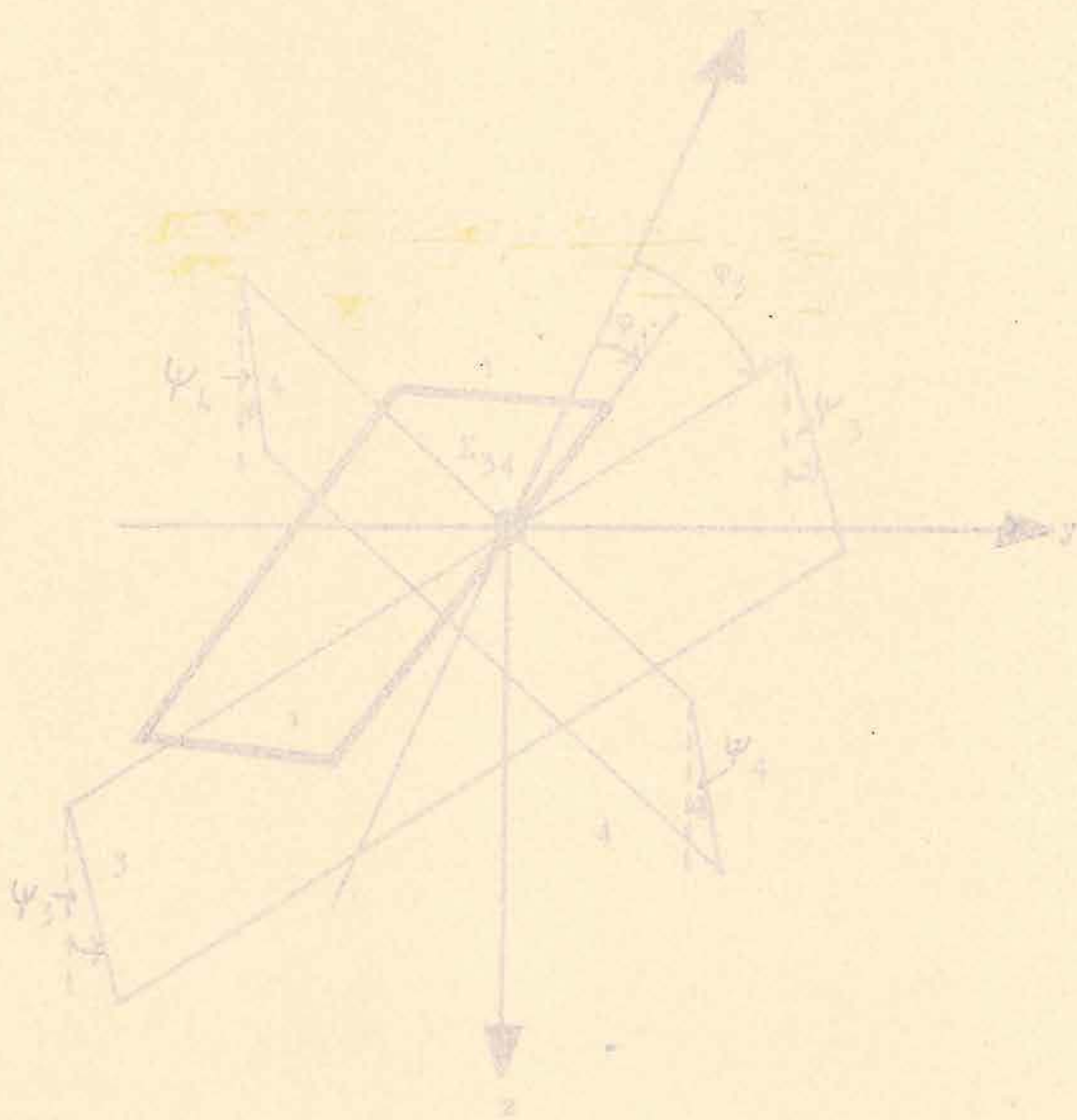
In der zweiten Zeile ist noch die Gleichung für den Leiter 2 der Vollständigkeit halber hinzugefügt worden, so wie es dem oberen Leiterkreis der Fig. 1 entsprechen würde. Laut Fig. 3 würde dagegen die Zeile 2 entfallen.

Durch die Beobachtung sind die 6 Komponenten der beiden Felder bekannt:  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$ ,  $F_x(t)$ ,  $F_y(t)$  und  $F_z(t)$ . In dem hier verwendeten Modell ist die Annahme enthalten, daß der innere Anteil der vertikalen Komponente  $F_{z,i}$  nicht existiert. Es sei auch  $F_{z,a} = 0$  gesetzt. - Man hat die Widerstände  $R_k$ , die Induktivitäten  $L_{ik}$  und die Winkel  $\varphi_k$  und  $\psi_k$  so zu wählen, daß sich die mit Gleichung (5), (6) und (8) berechneten 4 Funktionen  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$ ,  $F_x(t)$  und  $F_y(t)$  von den gemessenen möglichst wenig unterscheiden. Die so gewählten Widerstände und Induktivitäten sind jedoch nur mit weiteren Annahmen zu den realen Größen von Kruste und Mantel in Beziehung zu setzen. Es ist daher ratsam, die Ströme  $I_k$  zu betrachten, die ebenfalls bestimmt werden können.

Mit Hilfe dieses Modells kann man sich zumindest qualitativ eine Vorstellung über den Zusammenhang der Drehfelder erarbeiten. So kann z.B. bei einem induzierenden horizontalen magnetischen Drehfeld ( $F_{xa} e^{i\omega t}$ ,  $F_{ya} e^{i(\omega t + \alpha)}$ ) das gesamte, also meßbare horizontale magnetische und elektrische Drehfeld berechnet werden. - Die beiden spezifischen Widerstände

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \varphi_{a,xy} &= (|E_x|^2 / |F_y|^2) \cdot 2\pi / \varphi_1 && \text{und} \\
 \varphi_{b,yx} &= (|E_y|^2 / |F_x|^2) \cdot 2\pi / \varphi_1
 \end{aligned}$$





Figur 3: Zwei-Stöckwerks-Stromsystem: oberes Leitersystem besteht nur aus einem horizontal liegenden, linearen Leiter (1), das untere Leitersystem aus zwei Ebenen, gegen die Vertikale geneigten, linearen Leitern (3,4). Es besteht keine Verbindung zwischen dem oberen Leiter 1 und dem unteren Leitersystem (Leiter 3 u.4). (Dies entspricht der Kastenosphäre.) Dagegen sind die beiden Leiter 3 und 4 im Kreuzungspunkt  $E_{34}$  miteinander verbunden.



sind in diesem Modell nicht gleich, was für viele Meßpunkte innerhalb der Kontinente beobachtet wurde. Durch diesen Beobachtungsbefund war der Anlaß zur Beschreibung dieses Drahtmodells gegeben.

Weitere Vereinfachungen erhält man durch folgende Annahmen:

- a)  $\psi_3 = \psi_4 = 90^\circ$       b) Es mögen nur die beiden Leiter 1 und 3 existieren. In den Gleichungen (4), (5) und (7) sind alle Größen mit dem Index 2 und 4 zu streichen. c) Das induzierende Feld ist linear polarisiert ( $F_{y2} = 0, F_{z2} = 0$ ).  
d)  $\varphi_1 = 0, \varphi_3 = 90^\circ$ .

Bevor das Modell komplizierter gestaltet wird, was möglich ist, sollten solche einfachen Fälle erörtert werden. Es ist merkwürdig, daß so einfache Modelle nicht schon längst betrachtet wurden. Sie sind zwar äußerst grobe Näherungen, geben aber Zusammenhänge wieder, die bei den anderen Modellen ausgeschlossen sind.