

U. SCHMUCKER

"Induktion in geschichteten Halbräumen durch inhomogene Felder"

1. Einleitung

Die Ausgangsgleichungen der Magnetotellurik zur Bestimmung der Impedanz $Z(\omega)$ lauten bekanntlich

$$E_x(\omega) = Z(\omega) H_y(\omega), \quad E_y(\omega) = -Z(\omega) B_x(\omega) \quad (1)$$

mit den üblichen Bezeichnungen für die Komponenten des tellurischen und magnetischen Feldes an der Oberfläche $z = 0$ eines Halbraumes. Sein Widerstand ρ soll allein eine Funktion der Tiefe sein. Dabei wird so getan, als ob dann $Z(\omega)$ ausschließlich eine Funktion der Frequenz ist und unabhängig von den (x,y) -Koordinaten des Ortes, an denen die Felder beobachtet werden.

Dies ist jedoch nur näherungsweise richtig. Die stets vorhandene Inhomogenität des induzierenden Feldes (sofern sie nicht durch eine einzige Wellenzahl erfaßbar ist) sorgt dafür, daß die Beziehungen zwischen \underline{E} und \underline{H} ortsabhängig sind. Für einen gewählten Aufpunkt wird E_x (oder E_y) an diesem Ort von H_y (oder H_x) an allen Orten der $z = 0$ -Ebene abhängen, d.h. die Ausgangsgleichungen der Magnetotellurik müßten eigentlich in der Form von Faltungsintegralen geschrieben werden, wie sie in den Abschnitten 3 und 4 erscheinen.

Es ist das Ziel dieses Beitrages zu zeigen, wie sich diese Faltungsintegrale näherungsweise lösen lassen, indem man gewisse Symmetrie- und Integraleigenschaften der Faltungskerne ausnutzt. Dabei wird zugleich der Gültigkeitsbereich der Ausgangsgleichungen (1) klar werden.

Ich werde im Folgenden statt der Impedanz die induktive Skalenzlänge oder (verallgemeinerte) Eindringtiefe

$$C(\omega) = Z(\omega) / i\omega \mu_0 \quad (2)$$

benutzen und statt der magnetischen Feldstärke \underline{H} seine Kraftflußdichte $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$. Außerdem soll eine besondere Kennzeichnung der Frequenzabhängigkeit aller Feldgrößen und Übertragungsfunktionen entfallen. Diese Größen seien von nun an stets als komplexe Funktionen der Frequenz verstanden. Die Ausgangsgleichungen der Magnetotellurik erhalten dann die Form

$$E_x = i\omega C B_y, \quad E_y = -i\omega C B_x. \quad (3)$$

Die entsprechende Ausgangsgleichung für das magnetische Gradientenverfahren, deren Gültigkeitsbereich gleichfalls untersucht werden soll, gewinnt man aus (3) durch Differenzieren: Betrachte C als ortsunabhängige Konstante und differenziere die linke Beziehung nach y, die rechte nach x. Bilde die Differenz und beachte, daß wegen $\text{rot } \underline{E} = -i\omega \underline{B}$

$$\partial E_x / \partial y - \partial E_y / \partial x = i\omega B_z$$

gilt. Dies führt in

$$B_z = C (\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y) \quad (4)$$

auf die Ausgangsgleichung des Gradientenverfahrens zur Bestimmung von C(ω) oder Z(ω) aus der Vertikalkomponente B_z des Magnetfeldes.

2. Grundgleichungen im Wellenzahlbereich

Zur Lösung der Diffusionsgleichung $\nabla^2 F = i\omega\mu_0\sigma F$ ($F: \underline{E}$ oder \underline{B}) wird eine FOURIER-Darstellung der Felder in Ebenen $z = \text{const.}$ gewählt:

$$\underline{F}(\underline{r}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\underline{F}}(\underline{k}, z) e^{-i\underline{k}\underline{r}} d k_x d k_y \quad (5a)$$

mit der inversen Transformation

$$\hat{\underline{F}}(\underline{k}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\underline{r}, z) e^{i\underline{k}\underline{r}} dx dy \quad (5b)$$

und $\underline{r} = (x, y)$ als Ortsvektor und

$\underline{k} = (k_x, k_y)$ als Wellenzahlvektor in z-Ebenen.

Für die transformierten Felder wird die Diffusionsgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung $d^2 \hat{\underline{F}} / dz^2 = (i\omega\mu_0\sigma + k^2) \hat{\underline{F}}$ überführt mit

$$k = + \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

als Betrag des Wellenzahlvektors. Ihre Lösung wird daher auch nur von k abhängen. Zur Gewinnung der Grundgleichungen führe ich die Länge

$$c(k) = \frac{\hat{E}_x}{-\partial \hat{E}_x / \partial z} = \frac{\hat{E}_y}{-\partial \hat{E}_y / \partial z} \quad (6)$$

als Eindringtiefe im Wellenzahlbereich ein. Ich setze $E_z = 0$ voraus, d.h. ich beschränke mich auf TE-Moden des induzierenden Feldes. Dann ergeben sich nach Transformation von $\text{rot } \underline{E} = -i\omega \underline{B}$ folgende Beziehungen zwischen den Komponenten von $\hat{\underline{E}}$ und $\hat{\underline{B}}$:

$$\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = i\omega \hat{B}_x, \quad \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = -i\omega \hat{B}_y, \quad k_y \hat{E}_x - k_x \hat{E}_y = \omega \hat{B}_z.$$

Einsetzen von (6) führt auf die Grundgleichungen der magnetotellurischen und magnetischen Sondierung für räumlich harmonisch oszillierende Felder:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x &= i\omega c(k) \hat{B}_y, & \hat{E}_y &= -i\omega c(k) \hat{B}_x \\ \hat{B}_z &= c(k) \cdot [ik_x \hat{B}_x + ik_y \hat{B}_y]. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Berechnung von $c(k)$ für ein vorgegebenes Modell $\rho(z)$ bereitet keine Schwierigkeit. Erwähnt seien die speziellen Lösungen

$$c(k) = \tanh(kh)/k \quad (8)$$

für einen idealen Leiter in der Tiefe $z = h$ mit

$$\rho = \infty \text{ für } 0 < z < h \text{ und } c(k) = (i\omega\mu_0/\rho_0 + k^2)^{-1/2} \quad (9)$$

für einen homogenen Halbraum mit $\rho(z) = \rho_0$. Diese Gleichungen lassen das allgemeingültige asymptotische Verhalten von $c(k)$ erkennen (s. Abb. 1 und 2): Für $k \rightarrow \infty$ wird $c(k) \rightarrow k^{-1}$ und für $k \rightarrow 0$ strebt $c(k)$ gegen einen Grenzwert $c(0)$ mit verschwindender Ableitung dc/dk .

3. Grundgleichungen im Ortsbereich: 2-D-Felder

Zur praktischen Anwendung der Grundgleichungen (7) gibt es zwei Möglichkeiten: 1. Die beobachteten Felder werden für ein festes ω nach Gl. (5b) einer räumlichen FOURIER-Analyse unterworfen und die Eindringtiefen $c(k)$ als Funktionen von k bestimmt. Dieses Verfahren wird sinngemäß bei der Entwicklung globaler Variationsfelder nach Kugelfunktionen angewandt. 2. Die Grundgleichungen (7) werden in den Ortsbereich transformiert und auf die beobachteten Feldgrößen $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, 0)$ direkt angewandt. Man erhält dann durch die gleiche Transformation erzeugte neue Übertragungsfunktionen, die in ihrer Abhängigkeit von r (und natürlich auch ω) durch die Widerstandsverteilung $\rho(z)$ bestimmt werden (SCHMUCKER, 1970).

Dieser zweite Weg soll weiter verfolgt werden. Er vermeidet die bei lokalen Untersuchungen stets problematische Darstellung durch räumliche FOURIER-Transformierte und führt bei einer näherungsweise Darstellung der Felder durch Polynome in x und y zu sehr einfachen Beziehungen, in denen die Ausgangsgleichungen (3) und (4) wieder erkennbar werden.

Zunächst sei die Transformation für 2-D Felder vorgenommen, die in x -Richtung konstant sind: $k_x = 0$ und $k = |k_y|$. Wegen $\partial B_x / \partial y - \partial B_y / \partial x \sim E_z = 0$ ist dann B_x und damit auch E_y konstant (oder Null).

Zu betrachten sind also nur die in y -Richtung variablen Feldkomponenten E_x , B_y und B_z .

Ich führe als FOURIER-Transformierte von $c(k)$ und $ik_y c(k)$ die Funktionen

$$\begin{aligned} N(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} c(k) \cos(ky) dk \\ M(y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k c(k) \sin(ky) dk \end{aligned} \quad (10)$$

ein, wobei ich bereits die Tatsache ausgenutzt habe, daß $c(k)$ nur vom Betrag von k abhängt. Die Transformation von (7) ergibt dann nach dem Faltungssatz der FOURIER-Transformation

$$E_x = i\omega N * B_y, \quad B_z = M * B_y \quad (11)$$

$$[E_x(y) = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta) B_y(y-\eta) d\eta] .$$

Ich differenziere $N(y)$ in (10) unter dem Integralzeichen nach y , erhalte

$$dN/dy = M \quad (12)$$

und löse die Gleichung $B_z = M * B_y$ durch partielle Integration. Wegen $N(y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \pm \infty$ (s. unten) führt dies auf

$$B_z = N * dB_y/dy. \quad (13)$$

Die Gleichungen (11 und (13) stellen die drei Grundgleichungen zur Bestimmung der Übertragungsfunktionen $N(y)$ und $M(y)$ im Ortsbereich dar. Praktisch könnte dies etwa dadurch geschehen, indem man diese Gleichungen als lineare Gleichungen für die Unbekannten $N_0, N_1, N_2 \dots$ betrachtet; $N_j = N(\Delta_y \cdot j)$ mit Δ_y als Abstand der Meßpunkte auf der y -Achse, an denen die Feldwerte E_x , B_z und B_y beobachtet worden sind.

Soweit ich weiß, ist eine solche Rechnung noch nie durchgeführt worden. Es wäre sicher lohnend, dies mit guten Beobachtungen im Bereich eines Elektrojets einmal zu versuchen, da man dann zusätzlich zur Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktionen auch noch ihre Ortsabhängigkeit zur Interpretation benutzen könnte.

Am Beispiel der Modelle für Gl.(8) und (9) seien die allgemeinen Eigenschaften der Funktionen $N(y)$ und $M(y)$ vorgestellt (Abb.1 und 2). Die Ausführung der Transformation nach (10) ergibt

$$\begin{aligned}
 N(y) &= \frac{1}{\pi} \ln [ctnh (\pi |y| / 4h)] \\
 M(y) &= -\frac{1}{\pi} [2h \sinh (\pi y / 2h)]^{-2}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

für den idealen Leiter in der Tiefe h und

$$\begin{aligned}
 N(y) &= \frac{1}{\pi} K_0 (\alpha |y|) \\
 M(y) &= -\frac{\alpha}{\pi} K_1 (\alpha y)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

für den homogenen Halbraum mit der Skintiefe $p = (2\rho/\omega\mu_0)^{1/2}$; $\alpha = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_0} = (1+i)/p$ und K_j bezeichnet eine modifizierte Besselfunktion 2. Art mit dem asymptotischen Verhalten $K_j(u) \rightarrow e^{-u}/u$ für $|u| \rightarrow \infty$ und $K_0(u) \rightarrow -\ln(u)$, $K_1(u) \rightarrow u^{-1}$ für $|u| \rightarrow 0$. Damit wird die logarithmische Singularität von N und die y^{-1} -Singularität von M im "Nahbereich" für $y \ll p$ oder h erkennbar sowie das exponentielle Verschwinden von M und N im "Fernbereich" für $y \gg p$ oder h. Dieses Verhalten gilt allgemein, indem man für p (oder h) die Eindringtiefe $|c(0)|$ als Referenzlänge nimmt.

Wichtig für das Folgende sind Symmetrie- und Integraleigenschaften, die den Transformationsformeln (10) unmittelbar zu entnehmen sind:

$$N(-y) = N(y) \quad , \quad M(-y) = -M(y)
 \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(y) dy = c(0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} M(y) dy = 0
 \tag{17}$$

Das linke Integral folgt aus der inversen Transformation

$$c(k) = 2 \int_0^{\infty} N(y) \cos(ky) dy$$

für $k = 0$, das zweite Integral aus der negativen Symmetrie von M(y) bezüglich $y = 0$.

4. Grundgleichungen im Ortsbereich: 3-D Felder

Zur Erweiterung auf allgemeine Felder, die in z-Ebenen sowohl von x als auch von y abhängen, definiere ich als 2-dimensionale FOURIER-Transformierte

5. Auswertung der Feldintegrals

In den Integralen über den Feldwert E und H in Gl. (17) und (18) wird die besondere Bedeutung sichtbar, die dem Ortswert der

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{i \frac{k_x x}{r}} dk_x dk_y \\
 H_x(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} i k_x c(k) e^{i \frac{k_x x}{r}} dk_x dk_y \\
 H_y(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} i k_y c(k) e^{i \frac{k_x x}{r}} dk_x dk_y.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Offensichtlich gilt wieder entsprechend Gl. (12)

$$H_x = \partial G / \partial x, \quad H_y = \partial G / \partial y. \tag{19}$$

Die 2-dimensionale Transformation von (7) führt dann zu den Grundgleichungen in ihrer allgemeinen Form für geschichtete Leiter:

$$\begin{aligned}
 E_x &= i\omega G^{**} B_y, & E_y &= -i\omega G^{**} B_x \\
 B_z &= H_x^{**} B_x + H_y^{**} B_y
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$[E_x(x, y) = i\omega \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta) B_y(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \right]].$$

Die tatsächliche Berechnung von $G(x, y)$ wird man in Polarkoordinaten vornehmen, da $c(k)$ vom Betrag des Wellenvektors allein abhängt. Ich setze also $k_x = k \cos\phi$, $k_y = k \sin\phi$ und $dk_x dk_y = k d\phi dk$, ebenso $x = r \cos\psi$, $y = r \sin\psi$ und erhalte mit $u = \phi - \psi$

$$G(r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} e^{i k r \cos u} du \right] k c(k) dk,$$

also mit

$$(\text{SOMMERFELD}) \int_0^{2\pi} e^{i k r \cos u} du = 2\pi J_0(kr)$$

die Transformation

$$\begin{aligned}
 G(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(kr) c(k) k \, dk \\
 H_x(r) &= -\frac{1}{2\pi} \cos \gamma \int_0^{\infty} J_1(kr) c(k) k^2 \, dk \\
 H_y(r) &= -\frac{1}{2\pi} \sin \gamma \int_0^{\infty} J_1(kr) c(k) k^2 \, dk .
 \end{aligned} \tag{21}$$

Hierin sind J_j Besselfunktionen 1. Art. Transformiert man speziell $c(k)$ von Gl.(9) für einen homogenen Halbraum, so ist mit $\alpha = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_0} = (1+i)/p$

$$\int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr)}{(k^2 + \alpha^2)^{1/2}} \, dk = \sqrt{\frac{2\alpha}{r}} K_{\frac{1}{2}}(\alpha r)$$

(DOVER Handbuch Formel 11. 4.44) und mit

$$K_{\frac{1}{2}}(\alpha r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha r}} e^{-\alpha r}$$

(DOVER Handbuch Formel 10. 2.17)

$$\begin{aligned}
 G(r) &= \frac{1}{2\pi r} e^{-\alpha r} = \frac{1}{2\pi r} e^{-r/p} \left[\cos\left(\frac{r}{p}\right) - i \sin\left(\frac{r}{p}\right) \right] \\
 H_x(r) &= -\frac{1}{2\pi r^2} \cos \gamma e^{-\alpha r} (1 + \alpha r) .
 \end{aligned} \tag{22}$$

Abb. 1 zeigt $G(r)$ nach Gl.(22) im Vergleich zu $N(y)$ nach Gl.(15). Für $r \rightarrow 0$ besitzen G und H eine r^{-1} und r^{-2} Singularität, für $r \rightarrow \infty$ verschwinden sie exponentiell wie N und M . Aus der inversen Transformation von $G(x,y)$ ergibt sich wieder für $k = 0$ die Integraleigenschaft

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} G(x,y) \, dx \, dy = c(0) , \tag{23}$$

woraus sich durch Vergleich mit Gl.(17) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y) \, dx = N(y) \tag{24}$$

zu der einfachen Transformierten von $c(k)$ ableitet. Die Abhängigkeit von $c(k)$ vom Betrag k wird in die Abhängigkeit von $G(r)$ vom Betrag r überführt, so daß die Symmetriebeziehungen lauten:

$$G(x,y) = G(-x,y) = G(x,-y) = G(-x,-y) . \tag{25}$$

5. Auswertung der Faltungsintegrale

In den Integralen über den Faltungskernen N und G in Gl.(17) und (23) wird die besondere Bedeutung sichtbar, die dem Grenzwert der

Eindringtiefe $c(k)$ für $k = 0$ zukommt. Sind nämlich B_x und B_y in einem Kreis um den gewählten Aufpunkt \underline{r} , dessen Radius groß ist gegenüber der Eindringtiefe $|c(0)|$, näherungsweise konstant, so können B_x und B_y vor die Faltungsintegrale gezogen werden, da die Faltungskerne N und G dann innerhalb dieses Kreises auf Null abklingen.

Damit reduzieren sich die Grundgleichungen (11) und (20) auf

$$E_x(\underline{r}) = i\omega c(0) B_y(\underline{r}), \quad E_y(\underline{r}) = -i\omega c(0) B_x(\underline{r}), \quad B_z(\underline{r}) = 0 \quad (26)$$

und man ist so bei den Ausgangsgleichungen (3) und (4) angelangt, indem man die Übertragungsfunktion $C(\omega)$ mit der Wellenzahl-Eindringtiefe für $k = 0$ gleichsetzt:

$$C(\omega) = c(\omega, k=0). \quad (27)$$

Ich werde von nun an diesen Grenzwert von $c(k)$ einfach mit C bezeichnen. Zu diesem bekannten Ergebnis für quasi-homogene Felder hätte man auch dadurch kommen können, indem man für das Wellenzahlspektrum des induzierenden Feldes fordert, daß seine Spektraldichte für $k > k_{\max}$ Null ist mit $k_{\max} |C| \ll 1$.

Die Annahme eines im Bereich der Reichweite der Kerne N und G näherungsweise homogenen Feldes gibt aber noch nicht den tatsächlichen Gültigkeitsbereich von Gl. (3) wieder. Um dies zu zeigen, beschränke ich mich zunächst auf 2-D felder (Abschnitt 3) und wähle für $B_y(y)$ für $|y| < Y$ folgende Darstellung durch ein Polynom:

$$B_y(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \quad (28)$$

Die Bereichsgrenzen sind dabei für die betrachtete Frequenz wieder genügend groß im Vergleich zur Eindringtiefe gewählt: $(Y \gg |C|)$. Für die Faltungsintegrale in (11) erhalte ich

$$N * B_y = \sum_n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta) (y-\eta)^n d\eta$$

$$M * B_y = \sum_n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} M(\eta) (y-\eta)^n d\eta.$$

Ich schreibe nun abkürzend

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta) \eta^n d\eta, \quad J_n = - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\eta) \eta^n d\eta \quad (29)$$

und beachte, daß wegen der Symmetrieeigenschaften (16) die Integrale $I_1, I_3, I_5 \dots$ verschwinden. Speziell für $n = 0$ gilt nach (17) $I_0 = C$ und $J_0 = 0$. Außerdem ist $J_n = nI_{n-1}$, wovon man sich durch partielle Integration und Verwendung von (12) überzeugt. Die gliedweise Integration nach der Binomialformel ergibt mit $r = 0$, wenn n gerade, und $r = 1$, wenn n ungerade,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta) (y-\eta)^n d\eta = y^n I_0 + \binom{n}{2} y^{n-2} I_2 + \dots + \binom{n}{r} y^r I_{n-r}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(\eta) (y-\eta)^n d\eta = \binom{n}{1} y^{n-1} J_1 + \binom{n}{3} y^{n-3} J_3 + \dots + \binom{n}{1-r} y^{1-r} J_{n-1+r}$$

Ich fasse nun für $n = 0, 1, 2, \dots$ die zu gleichen Integralen I_n gehörigen Terme zusammen und setze B_y von (28) und seine Ableitungen

$$d^n B_y / dy^n = n! / 0! \cdot a_n + (n+1)! / 1! \cdot a_{n+1} y + \dots$$

ein. Dies führt auf folgende Reihenentwicklung der Grundgleichungen im Ortsbereich ($J_n = nI_{n-1}$):

$$\begin{aligned} E_x(y) &= i\omega \left[I_0 B_y(y) + \frac{I_2}{2!} \frac{d^2 B_y}{dy^2} + \dots \right] \\ B_z(y) &= I_0 \frac{dB_y}{dy} + \frac{I_2}{2!} \frac{d^3 B_y}{dy^3} + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Dabei sind die Ableitungen am jeweils betrachteten Aufpunkt zu bilden, d.h. man hätte diese Gleichungen auch durch eine TAYLOR-Entwicklung von B_y unter dem Integral erhalten können, indem man die Ableitungen als Konstante für jeden Aufpunkt vor das Integral zieht.

Diese Darstellungen von E_x und B_z durch Reihen besagen, daß die Impedanz dann eine Funktion des Ortes y wird, wenn die zweite Ableitung von B_y bezüglich y nicht vernachlässigt werden darf, wobei - wie in Gl. (34) gezeigt wird - die Eindringtiefe $|I_0| = |C|$ als Referenzlänge bei der Bildung der Ableitungen zu nehmen ist. Entsprechendes gilt für das Verhältnis $B_z / (\partial B_y / \partial y)$ von der dritten Ableitung von B_y an. Außer der Ortsabhängigkeit der Impedanz bewirken die höheren Ableitungen im induzierenden Feld auch eine Richtungsabhängigkeit, da ja die für E_y gebildete Impedanz als ortsunabhängig vorausgesetzt worden ist.

Die Erweiterung auf 3-D Felder ist einfach. Zunächst wähle ich für das Horizontalfeld in der Umgebung des Punktes $\underline{r} = 0$ die Darstellungen

$$B_x(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

$$B_y(x, y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots,$$

die wieder in einem genügend großen Bereich gelten sollen. Da

$$\text{rot}_z \underline{B} = \partial B_x / \partial y - \partial B_y / \partial x = 0 \quad (31)$$

zu fordern ist, bestehen zwischen gewissen Entwicklungskoeffizienten zusätzliche Beziehungen. Bei einer Entwicklung bis zu einem Polynom 2. Grades lauten sie etwa

$$a_{01} = b_{10} \quad a_{11} = 2b_{20} \quad b_{11} = 2a_{02}.$$

Die bei der Faltung auftretenden Integrale

$$I_{nm} = I_{mn} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^m \eta^n G(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

werden wegen der Symmetrie von G nur dann von Null verschieden sein, wenn sowohl n als auch m gerade Zahlen sind (Gl.25). Außerdem ist $I_{n0} = I_n$ und insbesondere $I_{00} = C$. Erst bei einer Entwicklung bis zu einem Polynom 4. Grades wird also in I_{22} ein Integral erscheinen, das bei der Behandlung von 2-D Feldern noch nicht vorkam.

Ich beschränke mich daher auf Polynome 3. Grades und erhalte bei der gliedweisen Integration ($m, n = 0, 1, 2, 3$)

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^m (y-\eta)^n G(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$= I_{00} x^m y^n + I_{20} \binom{m}{2} x^{m-2} y^n + I_{02} \binom{n}{2} x^m y^{n-2},$$

wobei die letzten Terme wegzulassen sind, wenn $m < 2$ oder $n < 2$. Ich ordne wieder nach gleichen Integralen I_n , setze B_x und B_y von (31) und ihre partiellen Ableitungen ein und erhalte

$$E_x(x, y) = i\omega \left[I_0 B_y(x, y) + \frac{1}{2} I_2 \Delta B_y \right]$$

$$E_y(x, y) = -i\omega \left[I_0 B_x(x, y) + \frac{1}{2} I_2 \Delta B_x \right] \quad (32)$$

$$B_z(x, y) = I_0 \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta B_x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta B_y \right)$$

mit

$$\Delta = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$$

An diesen Formeln werden mit $I_0 = C$ die Gültigkeitsgrenzen der Ausgangsgleichungen (3) und (4) deutlich. Sie gelten beide, wenn die magnetischen Horizontalkomponenten näherungsweise lineare Funktionen des Ortes in einem Umkreis sind, der groß ist gegenüber der Eindringtiefe $|C|$ (DMITRIEV und BERDICHEVSKY, 1979). Sind sie durch Polynome 2. Grades darzustellen, gilt die Ausgangsgleichung (4) des Gradientenverfahrens unverändert, diejenigen der Magnetotellurik erhalten jedoch durch das Integral I_2 bestimmte Zusatzterme. Man kann diese Terme auf die Gradienten der Vertikalkomponente zurückführen, indem man beachtet, daß wegen (31)

$$\Delta B_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)$$

$$\Delta B_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)$$

und wegen der Gültigkeit von (4)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = B_z / C$$

ist. Dies führt auf die erweiterten Ausgangsgleichungen

$$E_x = i\omega \left(C B_y + \frac{1}{2} \frac{I_2}{C} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (33)$$

$$E_y = -i\omega \left(C B_x + \frac{1}{2} \frac{I_2}{C} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

der Magnetotellurik für Horizontalfelder, deren Verlauf im Bereich der Eindringtiefe Krümmungen aufweist.

Bei der praktischen Anwendung muß man sich die I_n für ein vorgegebenes Modell durch numerische Integration ausrechnen. Wegen des

exponentiellen Abklingens der Faltungskerne G und N werden diese Integrale stets endlich sein. Für das Modell eines homogenen Halbraums des Widerstandes ρ_0 läßt sich die Integration geschlossen ausführen. Sie ergibt mit $\alpha = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_0}$ und $C = 1/\alpha$ (Gl.9)

$$I_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\alpha y) y^n dy = \frac{2^n}{\pi \alpha^{n+1}} \left(\Gamma \left[\frac{n+1}{2} \right] \right)^2 \quad (34)$$

(DOVER Handbuch Formel 11. 4.22), also speziell für $n = 2$

$$I_2 = \alpha^{-3} = C^3.$$

Eingesetzt in (33) erhalten die erweiterten Ausgangsgleichungen dann die Form

$$\begin{aligned} E_x &= i\omega C B_y \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{B_y} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= -i\omega C B_x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C}{B_x} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Sie erlauben gegebenenfalls eine Abschätzung der durch die Gradienten von B_z bedingten Zusatzterme, indem man zunächst für C/B_y und C/B_x näherungsweise $E_x/i\omega$ und $-E_y/i\omega$ einsetzt. Für den Sq-Gang in mittleren Breiten beispielsweise betragen die Variationen der Horizontalkomponenten etwa 40 nT und die Gradienten von B_z liegen bei 2 nT/100 km. Damit würde die Korrekturterme für eine Eindringtiefe von 400 km gerade 1/10 betragen. Im Bereich von Jetfeldern werden bei genügend großen Eindringtiefen die Korrekturen vielleicht etwas größer ausfallen.

6. Zusammenfassung und Anwendungen

Es ist oft versucht worden, den durch die Inhomogenität des induzierenden Feldes bedingten Einfluß auf die Impedanz dadurch abzuschätzen, indem man ihre Wellenzahlabhängigkeit für vorgegebene Modelle untersucht. Dieser Beitrag soll zeigen, daß man den genannten Einfluß in sehr allgemeiner Form darstellen und berücksichtigen kann, wenn man eine Transformation in den Ortsbereich vornimmt und die Horizontalkomponenten des Magnetfeldes in Polynome entwickelt. Im einzelnen gilt folgendes (Abb.3):

Sind H_x und H_y näherungsweise konstant in einem Umkreis um den gewählten Aufpunkt, der groß ist im Vergleich zur Eindringtiefe, so ist E_x gleichfalls konstant und B_z Null. Die Impedanz ist eine orts-

unabhängige Konstante (Abb.3a). Sind H_x und H_y näherungsweise lineare Ortsfunktionen in dem genannten Bereich, so ist auch E_x eine lineare Funktion des Ortes und B_z eine von Null verschiedene Konstante. Die Impedanz bleibt ortsunabhängig (Abb.3b). Sind H_x und H_y jedoch quadratische Funktionen des Ortes, so ist zwar E_x gleichfalls eine quadratische und B_z eine lineare Funktion des Ortes, doch die Impedanz wird orts- und gegebenenfalls auch richtungsabhängig. Entscheidend für die Größe dieser Abhängigkeiten ist der Gradient von B_z im Verhältnis zur Eindringtiefe (Abb.3c). Die Ausgangsgleichung für das Gradientenverfahren wird erst durch Polynome ab 3. Grades beeinflusst.

Insgesamt aber erweist sich die Orts- und Richtungsabhängigkeit der Impedanz, soweit sie auf der Inhomogenität des induzierenden Feldes beruht, als ziemlich unbedeutend und nur bei der Induktion durch langperiodische Jetfelder wird ihre Berücksichtigung wichtig. Wird sie beobachtet, so wird ihre Ursache fast ausschließlich in lateralen Inhomogenitäten des leitfähigen Untergrundes zu suchen sein.

Abb.4 zeigt eine Anwendung der Grundgleichungen (35) auf das Feld eines Linienstroms in der Höhe L über einem homogenen Halbraum mit der Skintiefe $p = L$. Alle Feldgrößen sind auf das Linienstromfeld im Abstand L normiert. Ist $B_y^{(e)}(y)$ dieses Feld entlang der y -Achse, so wurden zunächst das zugehörige horizontale Gesamtfeld $B_y = B_y^{(e)} + p * B_y^{(e)}$, das Vertikalfeld $B_z = R * B_y^{(e)}$ und das elektrische Feld $E_x = i\omega Q * B_y^{(e)}$ berechnet. Die Faltungskerne P , Q und R sind anderswo erklärt worden (SCHMUCKER, 1969; S. 11). Sodann wurde mit $C = p/(1+i)$ für jeden Aufpunkt aus B_y und dB_y/dy ein theoretisches E_x nach Gl.(3) und ein theoretisches B_z nach Gl.(4) berechnet. Es zeigt sich, daß das theoretische E_x deutlich von seinem aus $B_y^{(e)}$ abgeleiteten "wahren" Wert abweicht, insbesondere dort, wo B_z einen großen Gradienten besitzt. Diese Diskrepanz läßt sich fast vollständig beseitigen, indem man bei der Berechnung von E_x zusätzlich den Gradienten dB_z/dy nach Gl.(35) berücksichtigt.

Eine andere Anwendung betrifft Modellrechnungen für lateral-inhomogene Halbräume, wenn die Diffusionsgleichung nach der Methode finiter Differenzen numerisch gelöst werden soll. Dabei ist man bestrebt, den Bereich der numerischen Lösung möglichst klein zu halten und etwa an den vertikalen Begrenzungen des Modellraums Impedanz-Randbedingungen einzuführen, die das Abklingen der anomalen Felder außerhalb dieser Begrenzungen gewährleisten. Diese Bedingungen wur-

den bisher entsprechend Gl.(3) für homogene Halbräume angesetzt. Es könnte sein, daß die Verwendung der erweiterten Beziehungen (35) die Randbedingungen entscheidend verbessert. Ich habe dies aber noch nicht ausprobiert.

Literatur:

Dmitriev, V.I. und M.N. Berdichevsky: The fundamental model of magnetotelluric sounding, Proc. IEEE 67, 1034-1044, 1979.

Schmucker, U.: Introduction to induction anomalies, J. Geomagn. Geoelectr., 22, 8-33, 1970.

Schmucker, U.: Neue Rechenmethoden zur Tiefensondierung. In: P. Weidelt (Herausgeb.), Protokoll Kolloquium Erdmagnetische Tiefensondierung in Rothenherge/Westfalen, Institut für Geophysik, Göttingen, 1971.

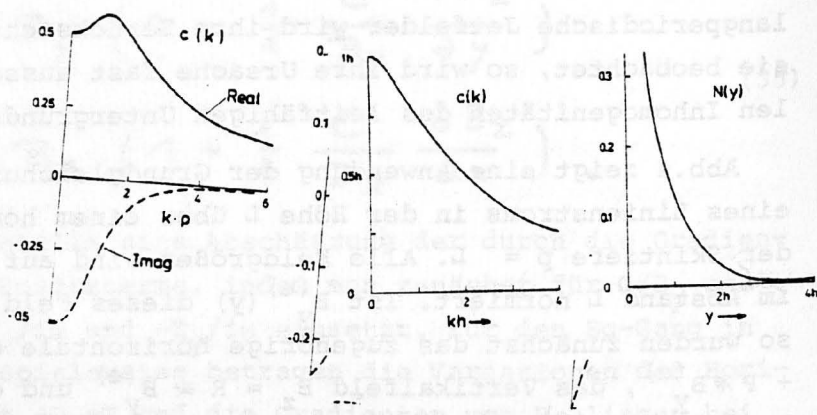


Abb.1 Homogener Halbraum

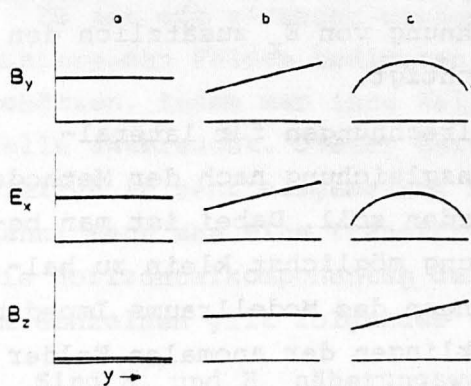


Abb.3

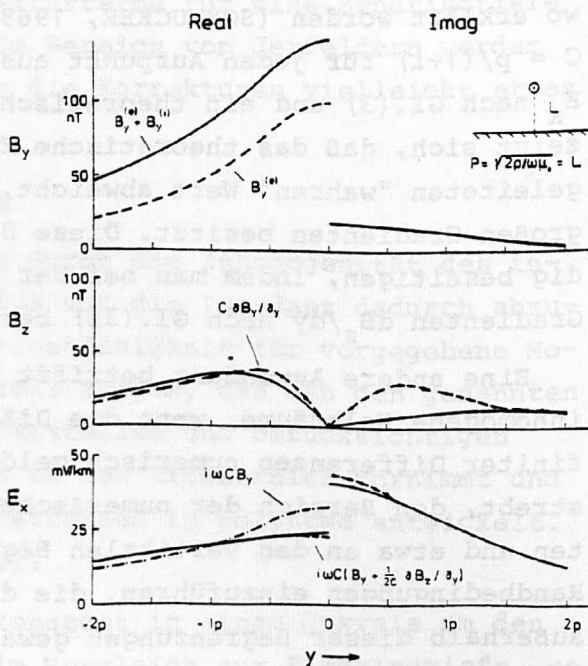


Abb.4