J. MEYER

"Über die Unterschiede zwischen verschiedenen Definitionen der Induktionspfeile"

These: Die aus der komplexen Übertragungsfunktion der Vertikalkomponente erdmagnetischer Variationen abgeleiteten "komplexen Induktionspfeile" sind Kenngrößen für die "beste Schwingungsebene" des magnetischen Feldvektors bzw., bei einer einzelnen Störung, für die magnetische Feldellipse. Sie entsprechen (im Reellen) dem vektographischen Induktionspfeil von UNTIEDT und nicht dem WIESE-Pfeil. Bei endlicher Leifähigkeit und damit im Allgemeinfall ist ihre Richtung zwar nicht unbeeinflußt durch Lage bzw. Streichrichtung einer Leitfähigkeitsanomalie, daneben aber schon allein durch Einfluß des äußeren, induzierenden Feldes innerhalb des gesamten Winkelbereichs variierbar (z.B. als "local time dependence of geomagnetic induction arrows").

Begründung

Bei der Ableitung geomagnetischer Induktionspfeile wird üblicherweise ausgegangen von einer linearen Beziehung zwischen den Komponenten des erdmagnetischen Variationsfeldes (Vertikalkomponente H_V, Nordkomponente H_N, Ostkomponente H_E) in der Form

$$H_V = a \cdot H_N + b \cdot H_E \quad . \qquad (1)$$

Jede solche Beziehung ist analytisch die Gleichung einer Ebene im Raum. Dabei gibt es verschiedene Ebenen, entsprechend verschiedenen linearen Beziehungen. WIESE hat gezeigt, daß sich die betreffende Ebene (WIESE-Ebene) entlang der Streichrichtung einer 2-dimensionalen Leitfähigkeitsanomalie erstreckt, wenn man die Komponenten aus verschiedenen Störungen zu jeweils der gleichen Phase ($t=t_o$) miteinander verknüpft:

$$H_V(t_o) = a_w \cdot H_N(t_o) + b_w \cdot H_E(t_o) \quad . \qquad (2)$$

Aus den Koeffizienten a_w, b_w der WIESE-Beziehung läßt sich demnach der Streichrichtungswinkel α_w (bezogen auf ein festes Nord-Ost-System) eindeutig bestimmen und durch einen Induktionspfeil (WIESE-Pfeil) kennzeichnen:

$$\mathrm{tg}\ \alpha_w = \frac{b_w}{a_w} \quad . \qquad (3)$$

Für t_o wird zumeist der Zeitpunkt des Maximums der Vertikalkomponente H_V gewählt, weil dieser am einfachsten bestimmbar ist. Prinzipiell kann man jedoch auch eine beliebige andere (feste) Phase nehmen. Die den verschiedenen linearen Beziehungen der Form (2) entsprechenden Ebenen haben sämtlich das gleiche Streichen, mit lediglich unterschiedlicher Neigung gegenüber der Horizontalen. Daraus folgt, daß die Streichrichtung einer 2D-Anomalie letztlich auch bestimmt werden kann - wenngleich mit erhöhtem statistischen Fehler - aus der Regressionsebene für Störungsvektoren aus vielen verschiedenen Störungen, ungeachtet der Phase (Verfahren von PARKINSON).

Eine gänzliche andere lineare Beziehung ist die anfangs von UNTIEDT benutzte Gleichung zwischen den zeitlich veränderlichen Variationskomponenten einzelner Störungen:

$$H_V(t) = a_v \cdot H_N(t) + b_v \cdot H_E(t) . \qquad (4)$$

Sie beschreibt die <u>Variationsebene</u> der betreffenden Störung, die von der WIESE- bzw. PARKINSON-Ebene sorgfältig unterschieden werden muß. Die Variationsebene ist im allgemeinen, d. h. bei endlicher Leifähigkeit, zwar auch nicht völlig unbeeinflußt von der Ausrichtung einer Leitfähigkeitsanomalie. Ihr Streichen ist aber trotzdem schon allein durch das äußere, induzierende Feld (Richtung, Polarisation, Frequenz) innerhalb des gesamten Winkelbereichs variierbar, so daß hieraus keine eindeutigen Schlüsse über die Untergrundstruktur gezogen werden können. Das gleiche gilt für einen formal aus den Koeffizienten der Gl. (4) abgeleiteten "Induktionspfeil" (vektographischer Induktionspfeil oder UNTIEDT-Pfeil) in Richtung α_v:

$$\mathrm{tg}\ \alpha_v = \frac{b_v}{a_v} , \qquad (5)$$

wobei α_v die Richtung derjenigen Horizontalkomponente ist, die mit $H_V(t)$ in Phase schwingt.

Die modernere Form der Bestimmung von Induktionspfeilen geht aus von einer <u>komplexen</u> linearen Beziehung (SCHMUCKER-Beziehung), genauer von der Definitionsgleichung der komplexen Übertragungskoeffizienten $\mathcal{C}_N, \mathcal{C}_E$ für die Vertikalkomponente:

$$\mathcal{H}_V = \mathcal{C}_N \cdot \mathcal{H}_N + \mathcal{C}_E \cdot \mathcal{H}_E \quad . \qquad (6)$$

(Komplexe Größen werden hier durch Fettdruck gekennzeichnet; $\boldsymbol{H}_v, \boldsymbol{H}_N, \boldsymbol{H}_E$ sind bei sinusförmiger Zeitfunktion komplexe Amplituden). Die äußerliche Ähnlichkeit der komplexen Beziehung (6) mit der WIESE-Beziehung (2) - links steht in beiden Fällen die Amplitude der Vertikalkomponente : reell bzw. komplex; und die Zeit t als Variable ist explizit in beiden Beziehungen nicht enthalten - ließ erhoffen, aus den Koeffizienten $\boldsymbol{c}_N$ und $\boldsymbol{c}_E$ wiederum Aussagen zu gewinnen über eine Vorzugsrichtung der Leitfähigkeitsstruktur im Untergrund. Demgemäß werden in Analogie zum WIESE-Pfeil nunmehr zwei getrennte Induktionspfeile ("komplexe Induktionspfeile") definiert, je einer aus den Real- bzw. Imaginärteilen von $\boldsymbol{c}_N$ und $\boldsymbol{c}_E$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{c}_N &= c_{Nu} + i \cdot c_{Nv} , \\ \boldsymbol{c}_E &= c_{Eu} + i \cdot c_{Ev} . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

<u>Wenn</u> den "komplexen Induktionspfeilen" eine reale Bedeutung für die Untergrundstruktur zukäme, dann sollten beide Pfeile zumindest in ihrer Richtung übereinstimmen, wobei die Richtungswinkel α^{Re} und α^{Im} unabhängig voneinander bestimmt werden aus:

$$tg\,\alpha^{Re} = \frac{c_{Eu}}{c_{Nu}} \quad \text{bzw.} \quad tg\,\alpha^{Im} = \frac{c_{Ev}}{c_{Nv}} \qquad (8)$$

(Realpfeil oder $0°$- Pfeil) (Imaginärpfeil oder $90°$- Pfeil)

Der Beobachtungsbefund, daß nichtsdestoweniger eine Richtungsübereinstimmung zwischen den "komplexen Induktionspfeilen" eher die Ausnahme als die Regel ist und sich überdies für beide Pfeile eine zeitliche Veränderlichkeit ("local time dependence of geomagnetic induction arrows") andeutet, wirft ganz allgemein die Frage auf nach der tatsächlichen physikalischen Bedeutung der "komplexen Induktionspfeile". In der Tat läßt sich zeigen, daß die lineare Beziehung (6), aus der diese Pfeile abgeleitet werden, in Wirklichkeit gar nicht der WIESE-Beziehung (2), sondern vielmehr der UNTIEDT-Beziehung (4) entspricht, mit allen sich daraus ergebenden Konsequenzen.

In einem Spezialfall ist dies unmittelbar einzusehen. Überträgt man nämlich die UNTIEDT-Beziehung (4) ins Komplexe, so erhält man (für eine harmonische Erregung) unter Fortlassung des Zeitfaktors

$e^{i\omega t}$ eine Beziehung zwischen den komplexen Amplituden mit reellen Koeffizienten:

$$\mathbf{H}_V = a_v \cdot \mathbf{H}_N + b_v \cdot \mathbf{H}_E \quad . \tag{9}$$

Es ist evident, daß diese komplexe UNTIEDT-Beziehung im Falle reeller Übertragungskoeffizienten $\mathbf{c}_N$, $\mathbf{c}_E$ mit der SCHMUCKER-Beziehung identisch ist.

Um die physikalische Bedeutung der SCHMUCKER-Beziehung mit komplexen Koeffizienten aufzuzeigen, wird Gl. (6) (nach Hinzufügung des zugehörigen Zeitfaktors $e^{i\omega t}$) vom komplexen Rechenraum in den reellen Raum der Physik übertragen:

$$\mathbf{H}_V\, e^{i\omega t} = \mathbf{c}_N \cdot \mathbf{H}_N\, e^{i\omega t} + \mathbf{c}_E \cdot \mathbf{H}_E\, e^{i\omega t} \quad . \tag{10}$$

Für eine sinusförmige Zeitabhängigkeit ist die reelle Form der Imaginärteil (reelle Amplituden durch oberen Index max oder O gekennzeichnet):

$$H_V^{max} \sin(\omega t + \psi_V) = c_{Nu} \cdot H_N^{o} \sin(\omega t + \psi_N) + c_{Eu} \cdot H_E^{o} \sin(\omega t + \psi_E) +$$

$$+ c_{Nv} \cdot H_N^{o} \cos(\omega t + \psi_N) + c_{Ev} \cdot H_E^{o} \cos(\omega t + \psi_E) \, . \tag{11}$$

Gefragt wird nun nach der Richtung derjenigen Horizontalkomponente $H_\alpha(t)$, die mit der Vertikalkomponente $H_V(t)$ in Phase schwingt ($\psi_V = \psi_\alpha$). Zur Beantwortung werden beide einander proportional gesetzt, wobei der Proportionalitätsfaktor H_V^{max}/H_α^{max} die unterschiedlichen Amplituden berücksichtigt:

$$H_V^{max} \sin(\omega t + \psi_V) = \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}} \cdot H_\alpha^{o} \sin(\omega t + \psi_\alpha) \, . \tag{12}$$

$H_\alpha(t)$ selbst wird zu jedem Zeitpunkt bestimmt durch die Projektionen der Komponenten $H_N(t)$ und $H_E(t)$ auf die Richtung α (gemessen von der Ostachse, positiv gegen Norden). Damit erhält man aus (12):

$$H_V^{max} \sin(\omega t + \psi_V) = \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\, H_N^{o} \sin(\omega t + \psi_N) \cdot \cos\alpha + \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\, H_E^{o} \sin(\omega t + \psi_E) \cdot \sin\alpha . \tag{13}$$

Ein Vergleich der rechten Seiten von (11) und (13) zeigt, daß sich α (hier als α^{0° bezeichnet) berechnet allein aus den Realteilen c_{Nu} und c_{Eu} der komplexen Übertragungskoeffizienten $\mathbf{c}_N$ und $\mathbf{c}_E$, unabhängig von deren Imaginärteilen:

$$\mathrm{tg}\,\alpha^{0^\circ} = \frac{c_{Eu}}{c_{Nu}} = \mathrm{tg}\,\alpha^{Re} . \tag{14}$$

Dies bedeutet, daß die Richtung α^{0° zugleich die Richtung des Realpfeiles ist. Der Realpfeil gibt also wieder die Richtung derjenigen Horizontalkomponente an, die mit $H_V(t)$ in Phase schwingt. Er entspricht damit im Prinzip dem früheren UNTIEDT-Pfeil. Die prinzipielle Identität beider kommt besonders deutlich zum Ausdruck, wenn man auch die UNTIEDT-Beziehung (4) für eine sinusförmige Zeitfunktion formuliert, die Koeffizienten ohne Bedeutungswandel umbenennt ($a_\nu \equiv c_{Nu}$; $b_\nu \equiv c_{Eu}$) und die Gleichung sodann mit der reellen Form (11) der SCHMUCKER-Beziehung vergleicht:

$$H_V^{max}\sin(\omega t + \psi_V) = c_{Nu}\cdot H_N^{O}\sin(\omega t + \psi_N) + c_{Eu}\cdot H_E^{O}\sin(\omega t + \psi_E). \tag{4a}$$

In derselben Weise wie oben kann man nun auch nach der Richtung derjenigen Horizontalkomponente fragen, die gegenüber $H_V(t)$ um 90° phasenverschoben schwingt ($\psi_V = \psi_\alpha + 90^\circ$). Anstelle von Gl. (12), (13) erhält man dann

$$\begin{aligned} H_V^{max}\sin(\omega t+\psi_V) &= \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\cdot H_\alpha^{O}\sin(\omega t+\psi_\alpha+90^\circ) = \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\cdot H_\alpha^{O}\cos(\omega t+\psi_\alpha) \\ &= \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\cdot H_N^{O}\cos(\omega t+\psi_N)\cdot\cos\alpha + \frac{H_V^{max}}{H_\alpha^{max}}\, H_E^{O}\cos(\omega t+\psi_E)\cdot\sin\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Ein Vergleich mit der reellen Form (11) der SCHMUCKER-Beziehung zeigt, daß sich in diesem Falle α (jetzt als α^{90° bezeichnet) allein aus den <u>Imaginärteilen</u> c_{Nv} und c_{Ev} der komplexen Übertragungskoeffizienten $\boldsymbol{c}_N$ und $\boldsymbol{c}_E$ berechnet, unabhängig von deren Realteilen:

$$\mathrm{tg}\,\alpha^{90^\circ} = \frac{c_{Ev}}{c_{Nv}} = \mathrm{tg}\,\alpha^{Im} . \tag{16}$$

Dies bedeutet, daß die Richtung α^{90° zugleich die Richtung des Imaginärpfeiles ist. Der Imaginärpfeil gibt demnach die Richtung derjenigen Horizontalkomponente an, die gegenüber $H_V(t)$ mit 90° Phasenverschiebung schwingt. Realpfeil und Imaginärpfeil stellen konjugierte Schwingungskomponenten des Horizontalfeldes dar, d.h. sie sind konjugierte Durchmesser der magnetischen Feldellipse. Aus beiden zusammen läßt sich das Horizontalvektogramm konstruieren, aber keine unmittelbare Aussage gewinnen über die Leitfähigkeitsstruktur im Untergrund.

Man kann hier am Beispiel einer sinusförmigen Zeitfunktion durchgeführten Betrachtungen natürlich auch für eine cosinusförmige Erregung anstellen. Man braucht dazu nur überall sin ωt durch cos ωt und cos ωt durch -sin ωt zu ersetzen (einschließlich eventueller Phasenwinkel). Die Aussage über die "komplexen Induktionspfeile" bleibt davon unberührt, so daß man in einer von der speziellen Zeitfunktion unabhängigen Formulierung sagen kann: Es gilt sowohl

$$H_V(t) = \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Re}}^{max}} H_{\alpha^{Re}}(t) \quad \text{als auch } H_V(t) = \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Im}}^{max}} H_{\alpha^{Im}}(t + \pi/_{2\omega}) . \tag{17}$$

Man kann diese beiden Gleichungen formal miteinander verknüpfen:

$$H_V(t) = \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Re}}^{max}} H_{\alpha^{Re}}(t) + \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Im}}^{max}} H_{\alpha^{Im}}(t + \pi/_{2\omega}) \tag{18a}$$

bzw. in komplexer Form:

$$\mathbf{H_V} = \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Re}}^{max}} \mathbf{H_{\alpha^{Re}}} + i \frac{H_V^{max}}{H_{\alpha^{Im}}^{max}} \mathbf{H_{\alpha^{Im}}} , \tag{18b}$$

wenn man die rechte Seite nicht als algebraische Summe versteht, sondern als zwei voneinander unabhängige Korrelationen: $H_V(t)$ schwingt sowohl in Phase mit der Horizontalkomponente in Richtung von α^{Re} als auch um 90° phasenverschoben gegenüber der Horizontalkomponente in Richtung von α^{Im}.

Die Bestimmung der komplexen Übertragungskoeffizienten $\mathbf{c_N}$ und $\mathbf{c_E}$ durch Ausgleichsrechnung aus einer Anzahl verschiedener Störungen stellt keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit dieses Ergebnisses dar. Man hat lediglich zu beachten, daß sich die obigen Aussagen in diesem Falle nicht auf den Schwingungsablauf einer Einzelstörung beziehen, sondern auf das mittlere Verhalten aller. Der im statistischen Sinne "besten" komplexen SCHMUCKER-Beziehung entspricht eine gleichermaßen "beste", d.h. im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate gemittelte Schwingungsebene. Da aber jede einzelne Schwingungsebene wesentlich beeinflußt wird durch die Parameter des äußeren, induzierenden Feldes, so gilt dies auch für die ermittelte "beste Schwingungsebene".