

P. WEIDELT, W. MÜLLER, W. LOSECKE, K. KNÖDEL

"Die Bostick-Transformation"

1. Theorie

Die Bostick-Transformation ist eine robuste Methode zur Berechnung einer ersten Näherung der wahren Widerstandsverteilung $\rho(z)$ aus dem scheinbaren Widerstand $\rho_s(T)$. Sie stellt eine Alternative zu $\rho^* - z^*$ dar, insbesondere wenn keine zuverlässige Phaseninformation zur Verfügung steht.

Ist $m(T) := d \log \rho_s(T) / d \log T$ die Steigung einer Sondierungskurve $\rho_s(T)$ in doppelt-logarithmischer Darstellung, so ist bei horizontaler Schichtung $|m(T)| \leq 1$. Die beiden Grenzmodelle sind:

a) idealer Leiter in der Tiefe $z = h$:

$$\rho_s(T) = 2\pi\mu_0 h^2 f T, \quad m(T) = -1 \quad (1)$$

b) dünne Schicht mit dem Leitwert τ an der Oberfläche $z=0$:

$$\rho_s(T) = T / (2\pi\mu_0 \tau^2), \quad m(T) = +1. \quad (2)$$

Ist nun eine Sondierungskurve $\rho_s(T)$ vorgegeben, so läßt sich jedem Wertepaar (T, ρ_s) durch (1) und (2) formal eindeutig ein Wertepaar (τ, h) zuordnen. Graphisch anschaulich geschieht dies durch Einführung eines um $-\pi/4$ gegen $(\log T, \log \rho_s)$ gedrehten rechtwinkligen Koordinatensystems $(\log \tau^2, \log h^2)$, s. Fig. 1. Wegen $|m(T)| \leq 1$ ist $d \log h^2 / d \log \tau^2 \geq 0$.

Die Grundidee von Bostick besteht darin, τ als integrierte Leitfähigkeit bis zur Tiefe h für eine Näherung $\tilde{\rho}(z)$ an die wahre Widerstandsverteilung $\rho(z)$ aufzufassen:

$$\tau = \int_0^h \frac{dz}{\tilde{\rho}(z)},$$

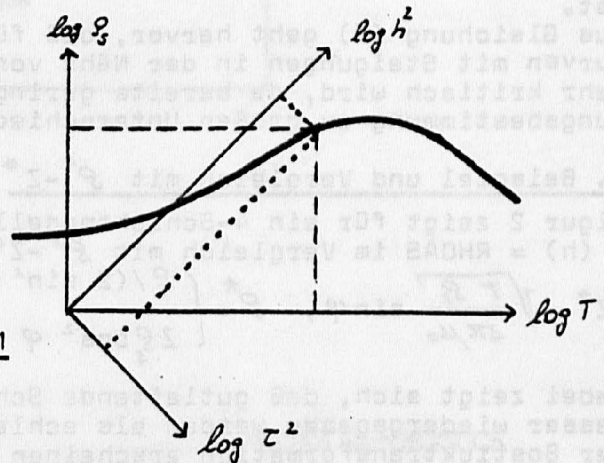


Fig. 1

oder

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(h) &= \frac{dh}{d\tau} = \frac{h}{\tau} \left(\frac{2 dh}{h} \right) / \left(\frac{2 d\tau}{\tau} \right) = \rho_s \frac{d \log h^2}{d \log \tau^2} = \\ &= \rho_s \frac{d \log T + d \log \rho_s}{d \log T - d \log \rho_s} = \rho_s \frac{1+m}{1-m}. \end{aligned}$$

Im dritten Schritt wurde benutzt, daß wegen (1) und (2) gilt: $\rho_s = h/\tau$. Unter Benutzung von (1) lautet somit die Transformation

$$h = \sqrt{\frac{T \rho_s(T)}{2\pi\mu_0}}, \quad \tilde{\rho}(h) = \rho_s(T) \frac{1+m(T)}{1-m(T)} \quad (3)$$

Ist φ mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ die Phasendifferenz zwischen E und H, so ist näherungsweise $\varphi \approx (1-m) \cdot \pi/4$ und deshalb auch

$$\tilde{\rho}(h) \approx \rho_s(T) \cdot \left(\frac{\pi}{2\varphi(T)} - 1 \right) \quad (4)$$

Wenn sich jedoch $m(T)$ zuverlässig bestimmen läßt, ist (3) der Vorzug zu geben.

Durch eine Umkehrung der hier beschriebenen Transformation ist es auch möglich, zu einer vorgegebenen wahren Widerstandsverteilung $\rho(z)$ auf einfache Weise eine Approximation für $\rho_s(T)$ zu gewinnen.

2. Numerische Bestimmung von $m(T)$

Die Berechnung von $m(T)$ bereitet Schwierigkeiten für verrauschte experimentelle Daten. Bewährt hat sich hier die glättende Spline-Interpolation (Sauer & Szabó, 1967), bei der die interpolierende Splinekurve nicht durch die N gemessenen Punkte (τ_i, ρ_{s_i}) , $i=1, \dots, N$, gelegt wird, sondern durch die benachbarten Punkte $(\tau_i, \hat{\rho}_{s_i})$ verläuft, wobei die Größe

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_{s_i} - \hat{\rho}_{s_i}}{\Delta \rho_{s_i}} \right)^2$$

mit $\Delta \rho_{s_i}$ als Standardabweichung von ρ_{s_i} einen vorgegebenen Grenzwert g nicht überschreiten soll. Die Kontrollvariable g steuert die Glätte des interpolierenden Splines und wird durch Versuche bestimmt, so daß g zwar klein, die interpolierende Kurve aber nicht zu rauh ist.

Aus Gleichung (3) geht hervor, daß für Abschnitte in den $\rho_s(T)$ -Kurven mit Steigungen in der Nähe von $+1$, die Bestimmung für $\tilde{\rho}(h)$ sehr kritisch wird, da bereits geringe Unsicherheiten in der Steigungsbestimmung zu großen Unterschieden in $\tilde{\rho}(h)$ führen.

3. Beispiel und Vergleich mit ρ^*-Z^*

Figur 2 zeigt für ein 4-Schichtmodell die Bostick-Transformation $\tilde{\rho}(h) = \text{RHOAS}$ im Vergleich mit ρ^*-Z^* mit

$$Z^* = \sqrt{\frac{T \rho_s}{2\pi \mu_0}} \sin \varphi, \quad \rho^* = \begin{cases} \rho_s / (2 \sin^2 \varphi), & \varphi \leq \pi/4, \\ 2 \rho_s \cos^2 \varphi, & \varphi \geq \pi/4. \end{cases}$$

Dabei zeigt sich, daß gutleitende Schichten von beiden Verfahren besser wiedergegeben werden als schlechte Leiter. Die Extremwerte der Bosticktransformation erscheinen etwas ausgeprägter als bei ρ^*-Z^* ; dadurch wird der Widerstandsverlauf besser erkennbar. Da Z^* und h durch $Z^* = h \sin \varphi$ verknüpft sind, ist die zu einer Periode T gehörende Tiefe h bei der Bostick-Transformation größer als Z^* .

Im vorliegenden Beispiel wird der Widerstands-Tiefen-Verlauf in 1. Näherung gut wiedergegeben. Man muß aber beachten, daß es zahlreiche Fälle gibt, bei denen die Widerstands-Tiefen-Funktion durch diese Näherungsverfahren nicht richtig wiedergegeben wird (z.B. bei gutleitfähiger Deckschicht).

Literatur:

SAUER, R. und I. SZABÓ: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Bd. 3, Stuttgart 1967.

BOSTICK, F. X., Jr.: A Simple Almost Exact Method of MT Analysis, Workshop on Electrical Methods in Geothermal Exploration U.S. Geological Survey, Contract No. 14080001-8-359, 1977.

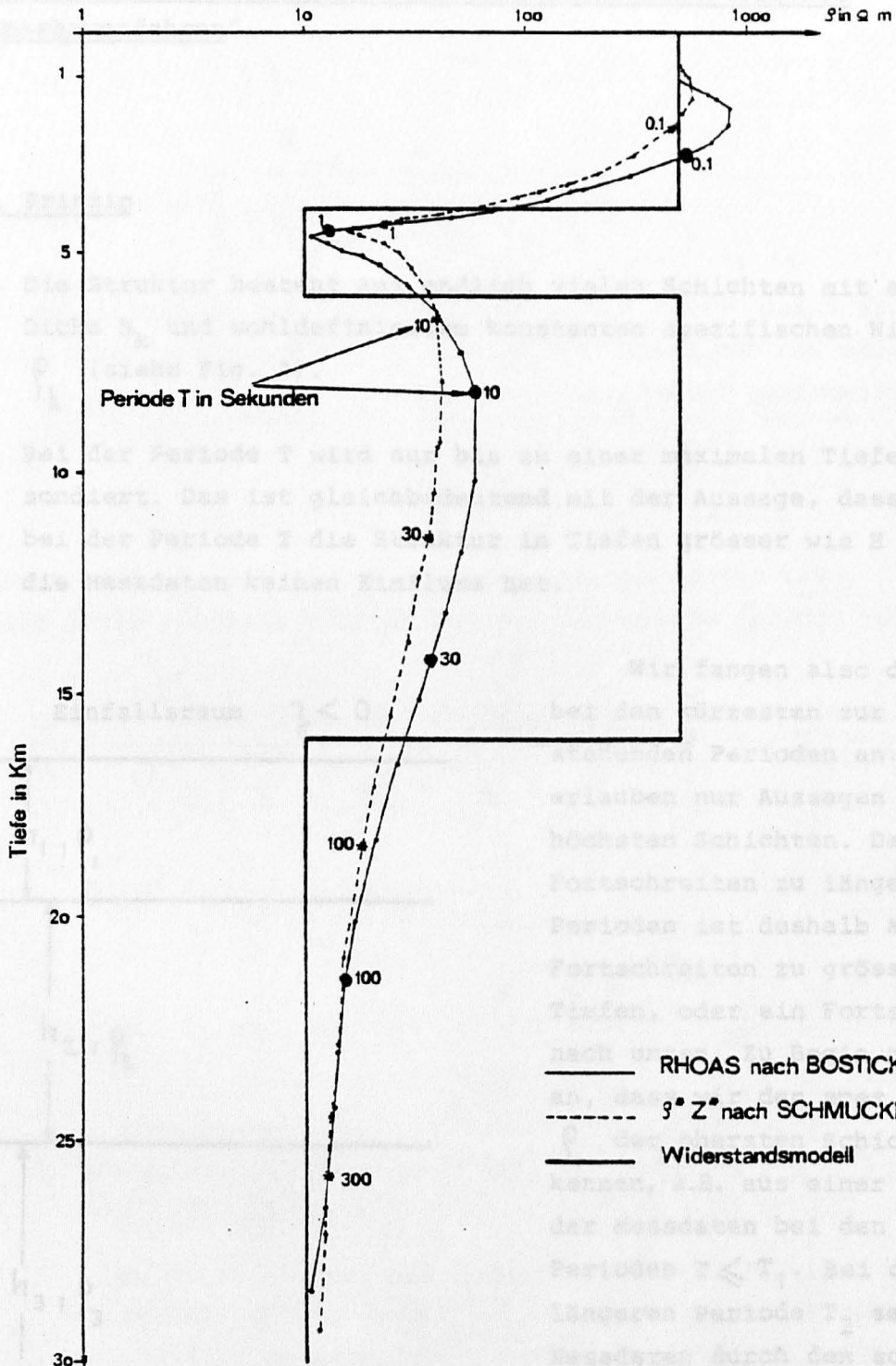


Fig.2

Die Funktion $f(x)$ ist durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ gegeben. Die Ableitung $f'(x)$ ist $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Die Tangente an den Punkt $P(1, 1)$ hat die Gleichung $y - 1 = -2(x - 1)$, d.h. $y = -2x + 3$. Die Normale an P hat die Gleichung $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, d.h. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

Die Tangente an den Punkt $P(1, 1)$ ist $y = -2x + 3$. Die Normale an P ist $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Die Tangente an den Punkt $Q(2, \frac{1}{4})$ ist $y - \frac{1}{4} = -\frac{2}{8}(x - 2)$, d.h. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$. Die Normale an Q ist $y - \frac{1}{4} = \frac{2}{1}(x - 2)$, d.h. $y = 2x - \frac{7}{4}$.

Die Tangente an den Punkt $R(3, \frac{1}{9})$ ist $y - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}(x - 3)$, d.h. $y = -\frac{2}{27}x + \frac{2}{9}$. Die Normale an R ist $y - \frac{1}{9} = \frac{27}{2}(x - 3)$, d.h. $y = \frac{27}{2}x - \frac{80}{9}$.

Die Tangente an den Punkt $S(4, \frac{1}{16})$ ist $y - \frac{1}{16} = -\frac{2}{64}(x - 4)$, d.h. $y = -\frac{1}{32}x + \frac{5}{8}$. Die Normale an S ist $y - \frac{1}{16} = \frac{32}{1}(x - 4)$, d.h. $y = 32x - \frac{63}{4}$.

Die Tangente an den Punkt $T(5, \frac{1}{25})$ ist $y - \frac{1}{25} = -\frac{2}{125}(x - 5)$, d.h. $y = -\frac{2}{125}x + \frac{2}{25}$. Die Normale an T ist $y - \frac{1}{25} = \frac{125}{2}(x - 5)$, d.h. $y = \frac{125}{2}x - \frac{312}{5}$.

Die Tangente an den Punkt $U(6, \frac{1}{36})$ ist $y - \frac{1}{36} = -\frac{2}{216}(x - 6)$, d.h. $y = -\frac{1}{108}x + \frac{1}{6}$. Die Normale an U ist $y - \frac{1}{36} = \frac{108}{1}(x - 6)$, d.h. $y = 108x - \frac{355}{3}$.

Die Tangente an den Punkt $V(7, \frac{1}{49})$ ist $y - \frac{1}{49} = -\frac{2}{343}(x - 7)$, d.h. $y = -\frac{2}{343}x + \frac{2}{49}$. Die Normale an V ist $y - \frac{1}{49} = \frac{343}{2}(x - 7)$, d.h. $y = \frac{343}{2}x - \frac{2401}{14}$.

Die Tangente an den Punkt $W(8, \frac{1}{64})$ ist $y - \frac{1}{64} = -\frac{2}{512}(x - 8)$, d.h. $y = -\frac{1}{256}x + \frac{3}{32}$. Die Normale an W ist $y - \frac{1}{64} = \frac{256}{1}(x - 8)$, d.h. $y = 256x - \frac{16383}{64}$.

Die Tangente an den Punkt $X(9, \frac{1}{81})$ ist $y - \frac{1}{81} = -\frac{2}{729}(x - 9)$, d.h. $y = -\frac{2}{729}x + \frac{2}{81}$. Die Normale an X ist $y - \frac{1}{81} = \frac{729}{2}(x - 9)$, d.h. $y = \frac{729}{2}x - \frac{6560}{9}$.

Die Tangente an den Punkt $Y(10, \frac{1}{100})$ ist $y - \frac{1}{100} = -\frac{2}{1000}(x - 10)$, d.h. $y = -\frac{1}{500}x + \frac{1}{10}$. Die Normale an Y ist $y - \frac{1}{100} = \frac{500}{1}(x - 10)$, d.h. $y = 500x - \frac{499}{100}$.