

G. FISCHER

"Ein eindimensionales analytisches magnetotellurisches Umkehrverfahren"

I. Prinzip

- 1) Die Struktur besteht aus endlich vielen Schichten mit endlicher Dicke h_k und wohldefiniertem konstanten spezifischen Widerstand ρ_k (siehe Fig. 1).
- 2) Bei der Periode T wird nur bis zu einer maximalen Tiefe H sondiert. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass bei der Periode T die Struktur in Tiefen grösser wie H auf die Messdaten keinen Einfluss hat.

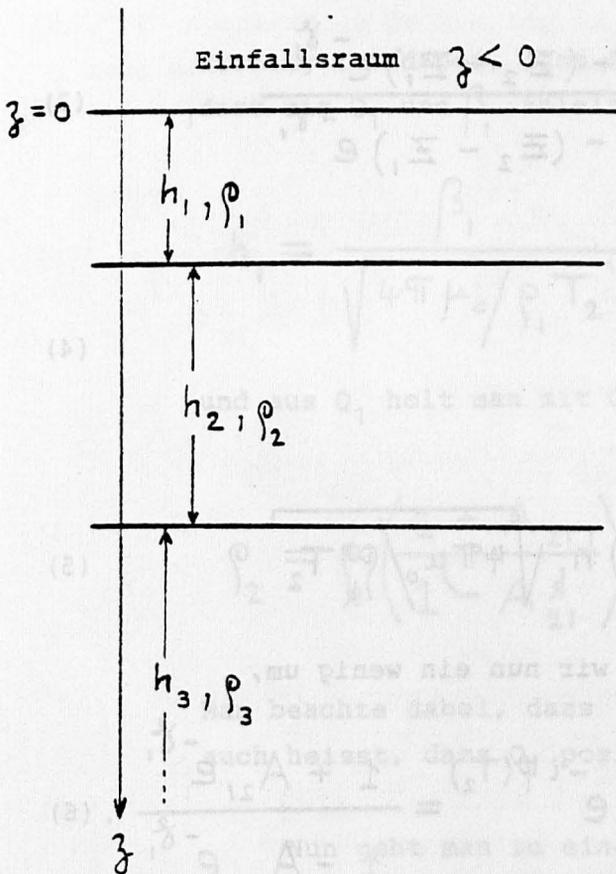


Fig. 1

Wir fangen also die Umkehr bei den kürzesten zur Verfügung stehenden Perioden an. Diese erlauben nur Aussagen über die höchsten Schichten. Das Fortschreiten zu längeren Perioden ist deshalb auch ein Fortschreiten zu grösseren Tiefen, oder ein Fortschreiten nach unten. Zu Beginn nehmen wir an, dass wir den spez. Widerstand ρ_1 der obersten Schicht schon kennen, z.B. aus einer Analyse der Messdaten bei den kürzesten Perioden $T \ll T_1$. Bei der etwas längeren Periode T_2 seien die Messdaten durch den scheinbaren spez. Widerstand $\rho_a(T_2)$ und der Phase $\varphi(T_2)$ gegeben, die der Oberflächenimpedanz $Z(T_2)$ entsprechen:

$$\left. \begin{aligned} Z(T_2) &= \sqrt{i 2\pi \mu_0 \rho_a(T_2) / T_2} \exp \{-i \varphi(T_2)\} \\ &= \sqrt{2\pi \mu_0 \rho_a(T_2) / T_2} \exp \{\Psi(T_2)\} . \end{aligned} \right\} (1)$$

Die Phase $\varphi(T_2)$ mit welcher wir arbeiten unterscheidet sich also von der Phase $\Psi(T_2)$, die in der Magnetotellurik oft verwendung findet,

$$\Psi(T) = \pi/4 - \varphi(T) \quad (2)$$

Wir nehmen nun an, dass bei der Periode T_2 die Impedanz $Z(T_2)$ nur von der ersten und zweiten Schicht bestimmt wird, dass also

$$Z(T_2) = Z_1 \frac{Z_2 + Z_1 + (Z_2 - Z_1) e^{-\gamma_1}}{Z_2 + Z_1 - (Z_2 - Z_1) e^{-\gamma_1}} \quad (3)$$

wo

$$Z_k = \sqrt{i 2\pi \mu_0 \rho_k / T_2} \quad (4)$$

und

$$\gamma_k = (1+i) \beta_k = (1+i) h_k \sqrt{4\pi \mu_0 / \rho_k T_2} \quad (5)$$

Die Gleichung (3) formen wir nun ein wenig um,

$$P_1(T_2) = \frac{Z(T_2)}{Z_1(T_2)} = \sqrt{\frac{\rho_a(T_2)}{\rho_1}} e^{-i \varphi(T_2)} = \frac{1 + A_{21} e^{-\gamma_1}}{1 - A_{21} e^{-\gamma_1}} \quad (6)$$

Wir haben somit definiert,

$$A_{(k+1)k} = \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} = \frac{\sqrt{\rho_{k+1}} - \sqrt{\rho_k}}{\sqrt{\rho_{k+1}} + \sqrt{\rho_k}} \quad (7)$$

wobei

$$A_{(k+1)k} \text{ reell ist, und } |A_{(k+1)k}| \leq 1 \quad (8)$$

Aus der rechten Seite vom Gl. (6) folgt leicht

$$A_{21} e^{-\gamma_1} = A_{21} e^{-\beta_1} e^{-i\beta_1} = \frac{P_1(T_2) - 1}{P_1(T_2) + 1} = Q_1 e^{-i\beta_1} \quad (9)$$

Wichtig ist dabei, dass $P_1(T_2)$ bekannt ist, was auch heisst, dass wir Q_1 und β_1 ableiten können. Aus β_1 leitet sich h_1 ab

$$h_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{4\pi \mu_0 / \rho_1 T_2}} \quad (10)$$

und aus Q_1 holt man mit Gl. (7) auch

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{1 + A_{21}}{1 - A_{21}} \right)^2 = \rho_1 \left(\frac{1 + Q_1 e^{\beta_1}}{1 - Q_1 e^{\beta_1}} \right)^2 \quad (11)$$

Man beachte dabei, dass $\beta_1 > 0$ gewählt werden muss, was auch heisst, dass Q_1 positiv oder negativ sein kann.

Nun geht man zu einer etwas längeren Periode über und nimmt an, dass die Impedanz jetzt von einer dritten, tieferliegenden Schicht, beeinflusst wird. Wie wirkt sich das aus? Es hat zur Folge, dass in Gl. (3) jetzt Z_2 nicht mehr die Impedanz

einer unendlich dicken Schicht mit spez. Widerstand ρ_2 darstellt, sondern Z_2 muss durch einen komplizierteren Ausdruck ersetzt werden, der besagt, dass wenn man an der Trennfläche zwischen Medien 1 und 2 nach unten schaut man nun zwei Schichten sieht. Die obere mit den Parametern ρ_2 und h_2 , die untere unendlich dick und dem spez. Widerstand ρ_3 . Wir formen also Gl. (3) um und explizitieren das modifizierte Z_2 :

$$"Z_2" = Z_1 \frac{Z_1(1+e^{-\gamma_1}) - Z_1(1-e^{-\gamma_1})}{Z_1(1+e^{-\gamma_1}) - Z_1(1-e^{-\gamma_1})} = Z_2 P_2, \quad (12)$$

wo jetzt $T = T_2$ zu setzen ist.

Was in der Mitte oder ganz rechts im Ausdruck (12) steht ist vollständig bekannt. Links aber müssen wir anstatt " Z_2 " den Ausdruck für ein Zwei-Schichtensystem hinschreiben, und zwar analog mit Gl. (3),

$$"Z_2" = Z_2 \frac{Z_3 + Z_2 + (Z_3 - Z_2)e^{-\gamma_2}}{Z_3 + Z_2 - (Z_3 - Z_2)e^{-\gamma_2}} = Z_2 \frac{1 + A_{32}e^{-\gamma_2}}{1 - A_{32}e^{-\gamma_2}}. \quad (13)$$

Aus Gln. (12) und (13) folgt wiederum

$$P_2(T_2) = \frac{1 + A_{32}e^{-\gamma_2(T_2)}}{1 - A_{32}e^{-\gamma_2(T_2)}} \quad (14)$$

und weiter

$$A_{32}e^{-\gamma_2} = A_{32}e^{-\beta_2}e^{-i\beta_2} = \frac{P_2(T_2) - 1}{P_2(T_2) + 1} = Q_2 e^{-i\beta_2}. \quad (15)$$

Woraus sich h_2 und ρ_3 leicht ableiten lassen.

Das Verfahren lässt sich wie eben beschrieben weiterführen. Als rekursives Verfahren kann es wie folgt geschrieben werden:

$$P_j(\tau_{j+1}) = \frac{z_{j-1} \cdot P_{j-1}(1 + e^{-\delta_{j-1}}) - (1 - e^{-\delta_{j-1}})}{z_j \cdot (1 + e^{-\delta_{j-1}}) - P_{j-1}(1 - e^{-\delta_{j-1}})}, \quad (16)$$

$$P_i(\tau_{j+1}) = \frac{z(\tau_{j+1})}{z_i(\tau_{j+1})}, \quad (17)$$

$$Q_j = \pm \left| \frac{P_j(\tau_{j+1}) - 1}{P_j(\tau_{j+1}) + 1} \right| \quad \begin{array}{l} \text{die Vorzeichen Wahl muss} \\ \text{im Zusammenhang mit Gl.} \\ (19) \text{ getroffen werden,} \end{array} \quad (18)$$

$$\beta_j = \arg \left\{ \frac{P_j(\tau_{j+1}) - 1}{P_j(\tau_{j+1}) + 1} \right\} > 0, \quad (19)$$

$$A_{(j+1)j} = Q_j e^{\beta_j}, \quad (20)$$

$$h_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{4\pi\mu_0/\rho_j \tau_{j+1}}}, \quad (21)$$

$$\rho_{j+1} = \rho_j \left(\frac{1 + A_{(j+1)j}}{1 - A_{(j+1)j}} \right)^2 \quad (22)$$

II. Stabilisierende Eingriffe in das Umkehrverfahren

Wie wir soeben gesehen haben, wird mit jeder neuen Periode T_{j+1} aus den Messdaten $\rho_a(T_{j+1})$ und $\varphi(T_{j+1})$ im Prinzip eine neue Schicht eingeführt. In den meisten Fällen sind aber diese Messparameter in gutem Einklang mit der schon gewonnenen Struktur. Das wird dann der Fall sein wenn die scheinbare Eindringtiefe $\delta_a(T_{j+1})$ kleiner ist als die Tiefe der nächsten Trennfläche, also wenn

$$\delta_a(T_{j+1}) = \left[\frac{\rho_a(T_{j+1}) T_{j+1}}{\pi \mu_0} \right]^{1/2} < H_j = \sum_{k=1}^j h_k \quad (23)$$

Wenn dies zutrifft, so werden die Messdaten dieser Periode nicht ausgewertet. Man sucht sich eine längere Periode wo die Ungleichung (23) nicht mehr gilt. Erst dann werden die Messdaten mittels einer neuen Schicht erklärt. Man beachte, dass diese Einschränkung auch die maximal zu erforschende Tiefe beschränkt, denn dieses $\delta_a(T_{j+1})$ ist sehr ähnlich zu dem z^* .

Ist $|Q_j e^{+\beta_j}|$ klein, jedoch immer mit positivem β_j , so ergibt sich eine neue Schicht mit einem ρ_{j+1} das nur wenig verschieden ist von ρ_j , welches aber bedeutungsvoll sein kann. In der Tat, wie das zweite Beispiel es zeigt, ist unser Verfahren in der Lage Strukturen zu erforschen wo solche ähnliche Schichtenpaare vorkommen.

III. Kompatibilität der Ausgangsdaten

Unser Verfahren ist analytisch und hat meistens gut funktioniert wenn man es auf synthetische Daten anwendet. Es versagte aber wenn es auf reelle Felddaten angewendet wurde. Natürlich mussten solche reellen Felddaten zuerst mit einem Glättungsverfahren in ein-eindeutige Funktionen $\rho_a(T)$ und $\varphi(T)$ umgewandelt werden, wie das von einem analytischen Verfahren verlangt wird. Das Versagen hatte mit der Glättung nichts direktes zu tun, denn es wurde beobachtet, dass in solchen Fällen das Verfahren zwar weiterhin eine wohldefinierte Struktur liefert, diese Struktur jedoch nicht wieder die Ausgangsdaten $\rho_a(T)$ und $\varphi(T)$ besitzt. Es schien also als wären diese Ausgangsdaten nicht kompatibel. Was man damit meint, ist dass die geglätteten Ausgangsdaten mit einer 1-D Struktur nicht im Einklang stehen.

Wie das von Weidelt (1972) schon gezeigt wurde, sind für 1-D Strukturen $\rho_a(T)$ und $\varphi(T)$ nicht unabhängig. Weidelt hat gezeigt, dass wenn $\rho_a(T)$ für alle Frequenzen bekannt ist, man $\varphi(T)$ für alle Frequenzen ausrechnen kann, mittels folgendem Integral:

$$\varphi(T^*) = - \frac{T^*}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d(\ln T) \frac{T \ln P(T)}{T^{*2} - T^2} \quad (24)$$

wobei das Symbol p den Hauptwert des Integrals bedeutet und

$$P(T) = \rho_a(T) / \rho_1 \quad (25)$$

ρ_1 ist ein willkürlicher konstanter Referenzwert. Da wir aber den spez. Widerstand der ersten Schicht kennen müssen um das Inversionsverfahren in den Weg zu leiten, werden wir annehmen, dass ρ_1 diesen spez. Widerstand der obersten Schicht bedeutet.

Wir konnten dann zeigen (Fischer und Schnegg 1980), dass im Hauptachsensystem die obige Dispersionsrelation auch für die beiden Impedanzen von 2-D Strukturen gilt. Auch ableiten konnten wir die Inverse Relation, die es erlaubt aus einer bekannten Phase den für 1-D, oder 2-D Strukturen im Hauptachsensystem, zugehörigen spez. Widerstand zu berechnen:

$$\ln P(T^*) = \frac{4 T^{*2}}{\pi} \rho \int_{-\infty}^{+\infty} d(\ln T) \frac{\varphi(T)}{T^{*2} - T^2} \quad (26)$$

Will man eine 1-D Inversion vornehmen, so muss man zuerst überprüfen, ob die Ausgangsdaten den Dispersionsrelationen (24) und (26) genügen. Eine Veranschaulichung wie das gemacht werden kann geben wir als Beispiel im folgenden Abschnitt.

IV. Beispiele

IV.1. Synthetisches COPROD Modell von Jones

Jones gibt uns einen Satz von ρ_a und φ Werten bei den Perioden $T = 10, 25, 40, 63, 100, \dots, 10\ 000$ Sekunden. Das Ausgangsmodell war uns damals unbekannt.

Aus ρ_a und φ bei 10 und 25 Sek. leiten wir zunächst ein Zwei-Schichtensystem ab, mit $\rho_1 = 494 \Omega m$, $h_1 = 22.45$ km und $\rho_2 = 62.1 \Omega m$. Wir wählen dann $\rho_1 = 500 \Omega m$ und leiten die Inversion in die Wege. Anstatt der Bedingung $\delta_a \geq H_j$ verlangen

wir aber $\beta_j < 1$. Das bedeutet, dass die halbe Eindringtiefe in die nächste Schicht, die Dicke dieser Schicht übertreffen muss, denn aus Gln. (21) und (23) sieht man gleich, dass

$$\beta_j = 2 h_j / \delta_j \quad (27)$$

Diese Bedingung ist ähnlich, aber nicht equivalent, zur Bedingung (23). Die Inversion liefert dann

Schicht Nr. k	ρ_k ($\Omega \cdot m$)	h_k (km)	H_j (km)
1	500	22.3	22.3
2	63.8	24.3	46.5
3 } 4 }	619	50.8	97.3
5 } 6 }	717	506	603
	0.64	4	607
	0.82	∞	∞

Auf Grund dieses Resultates haben wir folgendes Ausgangsmodell vorgeschlagen:

1	500	22	22
2	60	24	46
3	700	560	606
4	1	∞	∞

während Jones vom folgenden Modell ausging:

1	500	22	22
2	70	28	50
3	750	550	600
4	1	∞	∞

IV.2. Eigenes Modell

Schicht Nr. k	ρ_k (Ωm)	h_k (km)	H_j (km)
1	450	0.1	0.1
2	50	0.4	0.5
3	28	3.0	3.5
4	45	7.0	10.5
5	10^4	∞	∞

Die Inversion mit Bedingung (23) liefert (siehe auch Fig. 2):

Schicht Nr k	ρ_k (Ωm)	h_k (km)	H_j (km)
1	450	0.100	0.100
2	50	0.373	0.473
3	28	2.92	3.39
4	39	6.03	9.42
5	5063	44.3	53.7
6	9650	∞	∞

Wir sehen wie gut das Verfahren in der Lage ist die drei ähnlichen Schichten 2, 3, 4 zu wiedergeben.

IV.3. Felddaten im COPROD Test von Jones

Es handelt sich hier um die Daten der Station NEW von Jones und Hutton (1979). Diese Daten sind recht verstreut. Die zwei kürzesten und die sechs längsten Perioden werden nicht berücksichtigt, denn sie sind nicht so gut ermittelt worden. Unser Verfahren wurde wie folgt angewendet:

- 1) Durch die ρ_a Daten wird ein passendes Polynom 4. Grades in gelegt.
- 2) Bei zwei kurzen und zwei langen Perioden im Messbereich werden ρ_a -Werte selektionniert. Bei einer dieser Perioden

P. WEIDELT

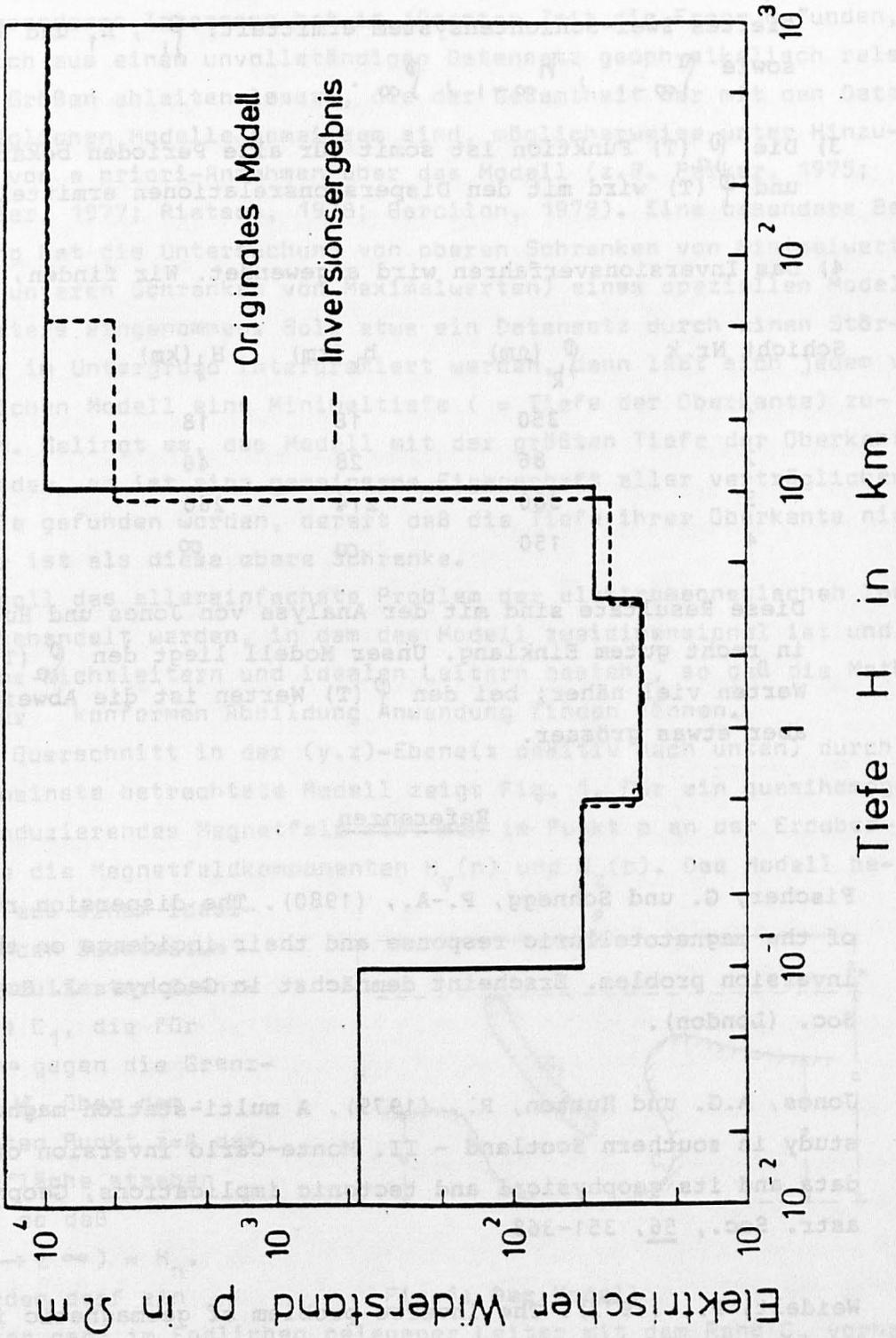


Fig. 2

wird auch ein mit den Ausgangsdaten im Einklang stehender φ -Wert gewählt. Aus diesen Daten wird ein oberstes und ein tiefstes Zwei-Schichtensystem ermittelt: ρ_1 , h_1 und ρ_2 , sowie $\rho_{\infty-1}$, $h_{\infty-1}$, ρ_{∞} .

3) Die $\rho_a(T)$ Funktion ist somit für alle Perioden bekannt und $\varphi(T)$ wird mit den Dispersionsrelationen ermittelt.

4) Das Inversionsverfahren wird angewendet. Wir finden, mit $\beta_j < 1$:

Schicht Nr. k	ρ_k (Ωm)	h_k (km)	H_j (km)
1	350	18	18
2	86	28	46
3	380	214	260
4	150	∞	∞

Diese Resultate sind mit der Analyse von Jones und Hutton (1979) in recht gutem Einklang. Unser Modell liegt den $\rho_a(T)$ Werten viel näher; bei den $\varphi(T)$ Werten ist die Abweichung aber etwas grösser.

Referenzen

Fischer, G. und Schnegg, P.-A., (1980). The dispersion relations of the magnetotelluric response and their incidence on the inversion problem. Erscheint demnächst in Geophys. J. Roy. astr. Soc. (London).

Jones, A.G. und Hutton, R., (1979). A multi-station magnetotelluric study in southern Scotland - II. Monte-Carlo inversion of the data and its geophysical and tectonic implications, Geophys. J. R. astr. Soc., 56, 351-368.

Weidelt, P., (1972). The inverse problem of geomagnetic induction, Z. Geophys. 38, 257-289.