

P. WEIDELT

"Die Maximaltiefe einer Leitfähigkeitsanomalie für ideale Leiter"

1. Einleitung

Ein besonderes Interesse hat in jüngster Zeit die Frage gefunden, wie sich aus einem unvollständigen Datensatz geophysikalisch relevante Größen ableiten lassen, die der Gesamtheit der mit den Daten verträglichen Modelle gemeinsam sind, möglicherweise unter Hinzunahme von a priori-Annahmen über das Modell (z.B. Parker, 1975; Sabatier, 1977; Rietsch, 1978; Barcilon, 1979). Eine besondere Bedeutung hat die Untersuchung von oberen Schranken von Minimalwerten (bzw. unteren Schranken von Maximalwerten) eines speziellen Modellparameters eingenommen. Soll etwa ein Datensatz durch einen Störkörper im Untergrund interpretiert werden, dann läßt sich jedem verträglichen Modell eine Minimaltiefe (= Tiefe der Oberkante) zuordnen. Gelingt es, das Modell mit der größten Tiefe der Oberkante zu finden, so ist eine gemeinsame Eigenschaft aller verträglichen Modelle gefunden worden, derart daß die Tiefe ihrer Oberkante nicht größer ist als diese obere Schranke.

Hier soll das allereinfachste Problem der elektromagnetischen Induktion behandelt werden, in dem das Modell zweidimensional ist und nur aus Nichtleitern und idealen Leitern besteht, so daß die Methoden der konformen Abbildung Anwendung finden können.

Einen Querschnitt in der (y,z)-Ebene (z positiv nach unten) durch das allgemeinste betrachtete Modell zeigt Fig. 1. Für ein quasihomogenes induzierendes Magnetfeld mißt man im Punkt p an der Erdoberfläche die Magnetfeldkomponenten $H_y(p)$ und $H_z(p)$. Das Modell besteht aus einem ideal-

leitenden Substratum mit unduzierter Grenzfläche C_1 , die für $y \rightarrow \pm \infty$ gegen die Grenzwerte ψ_2 über dem tiefsten Punkt $z=A$ der Grenzfläche streben möge, so daß

$$H_y(y \rightarrow \pm \infty) = H_n.$$

Außerdem darf ein

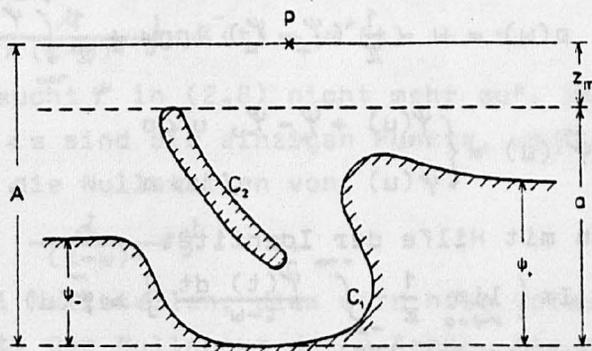


Fig.1: Das Modell

zweiter ganz im Endlichen gelegener Leiter mit dem Rand C_2 vorhanden sein. Die Tiefe zur Oberkante der Leiter sei z_m , so daß $a = A - z_m$ der Tiefenbereich der irregulären Leitfähigkeitsverteilung

ist.

Behandelt wird das folgende Problem: Vorgegeben seien die beiden normalisierten Feldkomponenten

$$h_y := H_y(p) / H_n, \quad h_z := H_z(p) / H_n$$

sowie die Tiefe A. Bestimme die Form der Leiter C_1 und C_2 so, daß die Tiefe z_m der Oberkante maximal wird.

Die Wahl eines zweifach zusammenhängenden Leiters ist erforderlich, da eine undulierte Grenzfläche allein nicht ausreicht, um Extremalmodelle für alle möglichen Werte von h_y und h_z zu konstruieren. Der Kürze wegen beschränkt sich die folgende Darstellung auf C_1 und streift nur die mit der Einführung von C_2 verbundenen Probleme.

2. Extremalmodell für einfach zusammenhängenden Leiter

Es seien

$$p := y + i(A-z) \quad \text{und} \quad w := u + iv$$

zwei komplexe Variable und $p(w)$ sei die konforme Abbildung, die die Linie $v=0$ in C_1 und den Halbraum $v>0$ in den Nichtleiter oberhalb von C_1 abbildet, normalisiert durch

$$p'(w) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad |w| \rightarrow \infty, \quad v > 0 \quad (2.1)$$

Die Grenzfläche C_1 hat die Parameterdarstellung

$$p(u) = y(u) + i\psi(u), \quad 0 \leq \psi(u) \leq a, \quad -\infty \leq u \leq +\infty \quad (2.2)$$

mit

$$\psi(u) := A - z(u), \quad a := A - z_m \quad (2.3)$$

Die Funktion $\psi(u)$ mit $\psi(\pm\infty) = \psi_{\pm}$ ist der Randwert des Imaginärteils der in $v>0$ analytischen Funktion $p(w)$. Deshalb gilt

$$p(w) = w - \frac{1}{\pi} (\psi_+ - \psi_-) \log w + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}(t) dt}{t-w} \quad (2.4)$$

mit

$$\tilde{\psi}(u) = \begin{cases} \psi(u) + \psi_+ - \psi_-, & u < 0 \\ \psi(u) & , \quad u > 0 \end{cases}$$

wie sich mit Hilfe der Identität

$$\text{Im} \left\{ \lim_{\nu \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}(t) dt}{t-w} \right\} = \tilde{\psi}(u)$$

leicht nachprüfen läßt.

In der w -Ebene ist das Magnetfeld homogen mit dem komplexen normalisierten Potential $g(w) = w$. In der p -Ebene beobachtet man deshalb das Magnetfeld

$$h(p) = h_y + i h_z = g'(w) \cdot w'(p) = 1 / p'(w), \quad (2.5)$$

so daß aus (2.4) folgt

$$\frac{1}{h} = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t) dt}{(t-w)^2} \quad (2.6)$$

In der ursprünglichen Formulierung der Aufgabe in der Einleitung sollte $z_m = A - a$ bei festen A durch Minimierung von a maximiert werden. Dies ist äquivalent der Maximierung von A bei festem a . Es stellt sich somit die folgende Aufgabe:

Gegeben ist das normalisierte komplexe Magnetfeld h sowie a . Bestimme $\psi(u)$ mit $0 \leq \psi \leq a$ und w so, daß $A = \text{Im } p(w)$ unter der Bedingung (2.6) maximal wird. Dabei soll $p(w)$ für $v > 0$ eine ein-eindeutige Abbildung vermitteln; ferner muß $\psi(u)$ an allen Punkten, die nicht nach $p = \infty$ abgebildet werden, stetig sein.

Das Problem der bedingten Maximierung wird durch Lagrangesche Multiplikatoren (e.g. Luenberger, 1969) gelöst. Die Lagrangefunktion (für die Minimierung von $-A$) lautet

$$L := \text{Im} \left\{ -p(w) + \lambda [p'(w) - 1/h] \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} \mu^-(t) \psi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^+(t) \cdot [\psi(t) - a] dt \quad (2.7)$$

Der komplexe Multiplikator $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ berücksichtigt die Nebenbedingungen (2.6) in Gleichungsform und die nicht-negativen Multiplikatoren $\mu^-(t)$ und $\mu^+(t)$ sorgen für die Erfüllung der Ungleichungen $-\psi \leq 0$ bzw. $\psi - a \leq 0$. Dabei ist $\mu^{\pm}(t)$ überall dort positiv, wo die Ungleichungen bindend sind, d.h. mit dem = erfüllt werden und $\mu^{\pm}(t)$ verschwindet dort, wo das < gilt. Die Existenz eines Extremums erfordert das Verschwinden der ersten Variation von L bezüglich ψ , d.h.

$$\text{Im} \left\{ -\frac{1}{\pi(t-w)} + \frac{\lambda}{\pi(t-w)^2} \right\} \mu^-(t) + \mu^+(t) = 0. \quad (2.8)$$

Da (2.7) linear in ψ ist, taucht ψ in (2.8) nicht mehr auf. Wegen $\mu^- = 0$ für $\psi > 0$ und $\mu^+ = 0$ für $\psi < a$ sind die einzigen Punkte, wo ψ weder 0 noch a ist, gegeben durch die Nullstellen von

$$\text{Im} \left\{ -\frac{1}{t-w} + \frac{\lambda}{(t-w)^2} \right\} = 0. \quad (2.9)$$

Für $|\lambda| > v$ existieren zwei Nullstellen; dies wird hier vorausgesetzt und später verifiziert. Der Nullpunkt der u -Achse, der noch frei verfügbar war, wird dadurch festgelegt, daß die Nullstellen in die Punkte $t = \pm \alpha$, $\alpha > 0$, gelegt werden. Deshalb gilt bei einem Extremalmodell entweder

$$A) \psi(t) = \begin{cases} 0, & |t| < \alpha \\ a, & |t| > \alpha \end{cases} \quad \text{oder} \quad B) \psi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \alpha \\ 0, & |t| > \alpha \end{cases} \quad (2.10a,b)$$

Diese beiden Fälle werden unten im einzelnen diskutiert.

Nachdem der Modelltyp feststeht, sind noch die Modellparameter w und α zu bestimmen. Im Extremum verschwinden die partiellen Ableitungen von

$$L = \text{Im} \{ -p(w) + \lambda [p'(w) - 1/h] \}$$

nach u, v und α (L ist gegenüber (2.7) verkürzt, da die Ungleichungen durch (2.10) automatisch erfüllt werden.)

Für eine analytische Funktion $f(w)$ gilt

$$\partial_u \text{Im} f(w) = \text{Im} f'(w), \quad \partial_v \text{Im} f(w) = \text{Re} f'(w),$$

wobei $\partial_u := \partial / \partial u$, etc., so daß die ersten beiden Bedingungen mit

$$-p' + \lambda p'' = 0, \quad \lambda = p' / p'' \quad (2.11)$$

äquivalent sind. Die dritte Bedingung liefert dann

$$\text{Im} \{ -\partial_\alpha p + (p'/p'') \partial_\alpha p' \} = 0. \quad (2.12)$$

Fall A:

Gl. (2.4) ergibt in Verbindung mit (2.10a)

$$p(w) = w + \frac{a}{\pi} \log \left(\frac{\alpha + w}{\alpha - w} \right), \quad (2.13)$$

so daß sich die Extremumbedingung (2.12) auf

$$\pi(|w|^2 - \alpha^2) - 2\alpha a = 0 \quad (2.14)$$

reduziert. Die Auflösung der drei reellen Gleichungen (2.14) und (2.5), d.h. $h=1/p'$, nach u, v und α ergibt dann

$$u = \frac{a}{\pi} \frac{h}{h_y - 1} \cdot \tan \beta, \quad v = \frac{a}{\pi} \tan \beta, \quad \alpha = \frac{a}{\pi} \frac{2h_y - 1}{1 - h_y}, \quad (2.15a-c)$$

wobei

$$\tan^2 \beta = \frac{2h_y - 1}{(h_y - 1)^2 + h_y^2}, \quad (2.16)$$

so daß

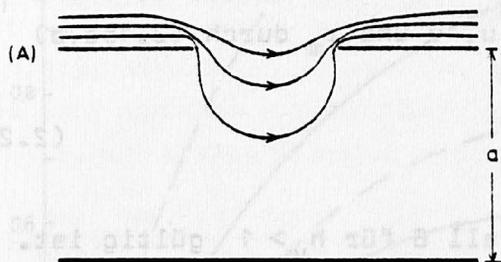
$$A = \text{Im} p(w) = \frac{a}{\pi} (\pi - \beta + \tan \beta) \\ z_m = A - a = A \left(1 - \frac{\pi}{\pi - \beta + \tan \beta} \right) \quad (2.17)$$

Für die interne Konsistenz der bisherigen Gleichungen läßt sich aus (2.11), (2.13) und (2.15) ableiten, daß $|\lambda| = v \sec \beta$ und daß somit

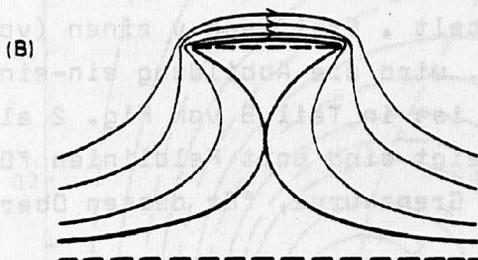
die Bedingung $|\lambda| > v$ für zwei reelle Nullstellen von (2.9) erfüllt ist.

Die Gleichungen (2.17) und (2.16) geben eine Teilantwort auf das gestellte Problem. Der Vorzeichenwechsel des Parameters α in (2.15c) begrenzt die Anwendbarkeit von (2.17) auf $0.5 \leq h_y \leq 1$, da α als positiv vorausgesetzt worden war. Das Extremalmodell und einige Feldlinien sind im Teil A von Fig. 2 dargestellt worden.

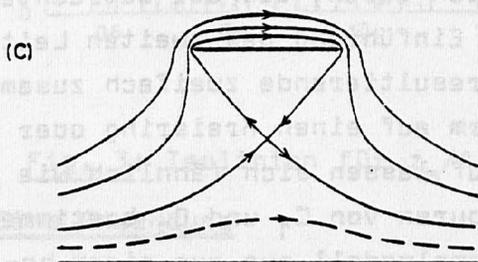
Fig. 2:



(A) Extremalmodell für $h_y < 1$



(B) Näherung für das Extremalmodell für $h_y > 1$ durch einen einfach zusammenhängenden Leiter



(C) Tatsächliches Extremalmodell für $h_y > 1$

Es besteht aus zwei horizontalen Halbebenen in der Tiefe $z=z_m$ mit einem Zwischenraum von der Breite

$$l = \frac{2a}{\pi} \left\{ \frac{2\sigma}{1-\sigma^2} + \log \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right\}, \quad \sigma := (2h_y - 1)^{1/2}$$

und einer horizontalen Ebene in der Tiefe $z=A$.

In den beiden Grenzfällen gilt:

$$\begin{aligned} 1/a &\rightarrow 0 & \text{für } h_y &\rightarrow 0.5 + 0, \\ 1/a &\rightarrow \infty & \text{für } h_y &\rightarrow 1 - 0. \end{aligned}$$

Im letzten Fall strebt für $h_y > 0$ die rechte Kante gegen $y = +\infty$

und für $h_z < 0$ die linke Kante gegen $y = -\infty$. Wenn $h_y > 1$ ist, ändert sich der Modelltyp (s.u.).

Fall B:

Gl. (2.4) liefert in Verbindung mit (2.10b)

$$p(w) = w + \frac{a}{\pi} \log \frac{w-\alpha}{w+\alpha} \quad (2.18)$$

Die Extremumbedingung (2.12) lautet dann

$$\pi(|w|^2 - \alpha^2) + 2\alpha a = 0 \quad (2.19)$$

Die drei Gleichungen (2.19) und (2.5) bestimmen wieder u , v und α . Dabei zeigt sich, daß die Parameter u , v und z_m durch (2.15a,b) und (2.17) gegeben sind. Dagegen ist

$$\alpha = \frac{a}{\pi} \frac{2h_y - 1}{h_y - 1} \quad (2.20)$$

Diese Beziehung läßt vermuten, daß Fall B für $h_y > 1$ gültig ist. Eine Analyse von (2.18) zeigt jedoch, daß $p(w)$ für kleines v keine ein-eindeutige Abbildung vermittelt. Erst wenn v einen (von α abhängigen) Grenzwert überschreitet, wird die Abbildung ein-eindeutig. Die Grenzkurve in der p -Ebene ist in Teil B von Fig. 2 als dicke Linie dargestellt. Außerdem gezeigt sind dort Feldlinien für einen idealen Leiter von der Form der Grenzkurve, für dessen Oberkante jedoch $\psi > a$ ist.

Der Fehlschlag für $h_y > 1$ liegt natürlich daran, daß die betrachtete Modellklasse zu klein ist, so daß die Einführung des zweiten Leiters C_2 erforderlich wird (s. Fig.1). Der resultierende zweifach zusammenhängende Bereich läßt sich dann konform auf einen Kreisring oder ein Periodenparallelogramm abbilden. Darauf lassen sich (ähnlich wie im einfach zusammenhängenden Fall) die Spuren von C_1 und C_2 bestimmen. Wie zu erwarten war, besteht das Extremalmodell nun aus einem horizontalen Streifen in der Höhe a über einer ideal-leitenden Platte, Teil C von Fig.2. Außerhalb der Bereiche mit schwachen Magnetfeldern stimmen die Felder von (B) und (C) gut überein. Deshalb ist (2.17) auch für $h_y > 1$ eine gute Näherung:

h_y	$ h_z $	nach (2.17)	exakt
2.0	1.0	0.0973	0.1027
2.0	0.5	0.1494	0.1534
2.0	0.0	0.1790	0.1822
1.5	1.0	0.1036	0.1057
1.5	0.5	0.2213	0.2225
1.5	0.0	0.3371	0.3376

Wie es ein muß, sind die z_m/A -Werte der erweiterten Modellklasse

systematisch größer als für C_1 allein.

Fig. 3 gibt z_m/A für h_y und h_z . Wenn nur h_y gegeben ist, wählt man den z_m/A -Wert für $h_z = 0$; wenn nur h_z bekannt ist, muß der bei Variation von h_y resultierende maximale z_m/A -Wert genommen werden (kurz gestrichelte Linie).

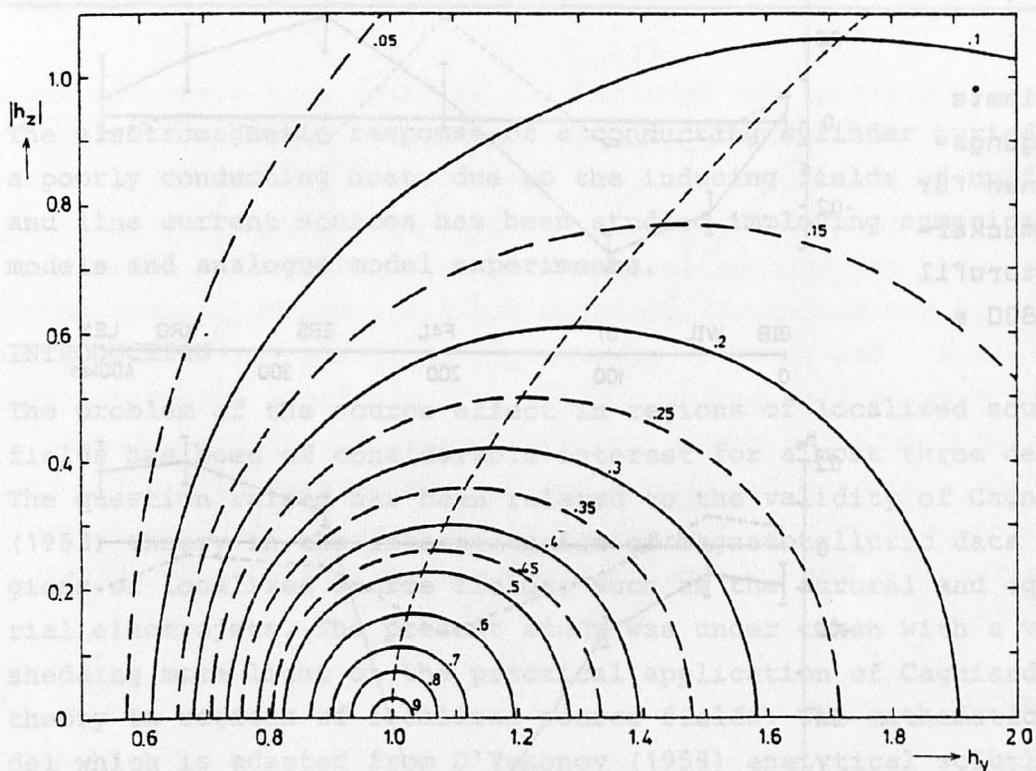


Fig. 3: Isolinien für z_m/A (Kurvenparameter)

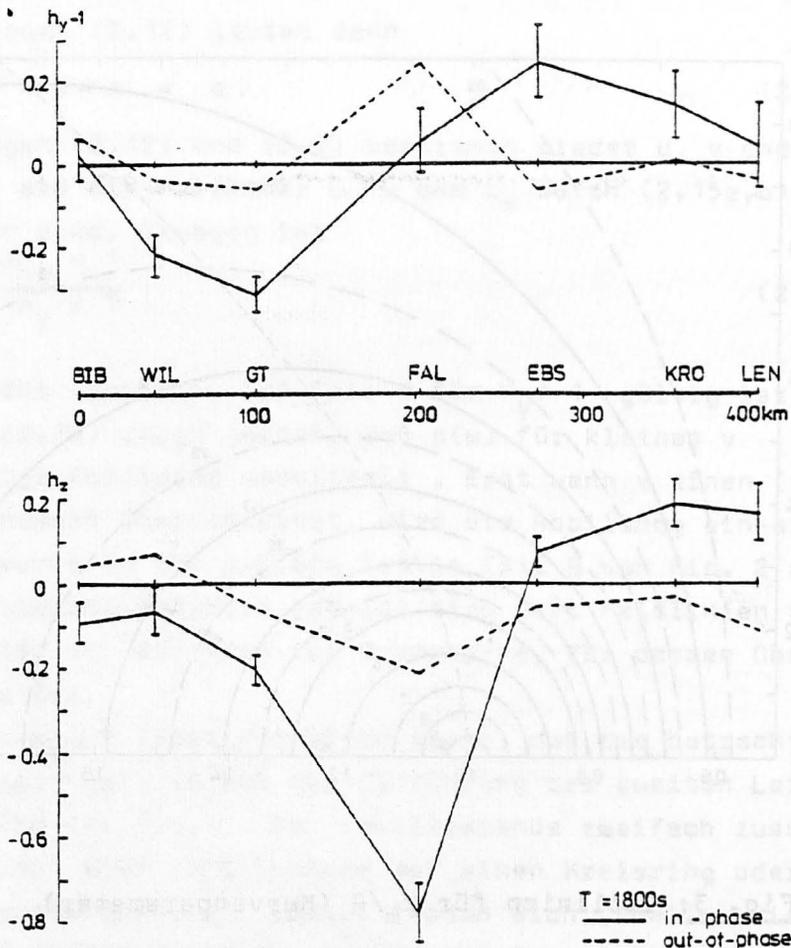
3. Eine Anwendung

Fig. 4 zeigt die in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Schmucker neu bestimmten Übertragungsfunktionen für das Ostprofil über die norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie für $T = 1800$ s (Weidelt, 1978). Für die Interpretation durch ideale Leiter muß natürlich die 90° -Phase vernachlässigt werden. Fig. 3 kann auf jeden Punkt des Profils angewandt werden; von geophysikalischem Interesse ist jedoch nur der kleinste resultierende z_m/A -Wert. Unter Berücksichtigung der Fehler liefert die Station FAL (Fallersleben)

$$z_m = (0.12 \pm 0.03) \text{ A .}$$

Identifiziert man A mit dem Schwerpunkt des induzierten normalen Stromsystems, der für $T = 1800$ s etwa in 200 km Tiefe liegt, so folgt, daß die Oberkante der Anomalie nicht tiefer als (24 ± 6) km liegen kann.

Fig. 4:
Neubestimmte Übertragungsfunktionen für das Schmucker-sche Ostprofil für $T=1800$ s:



Literatur:

Barcilon, V.: Ideal solution of an inverse normal mode problem with finite spectral data. Geophys. J. R. astr. Soc., März 1979.
Luenberger, D. G.: Optimization by vector space methods, Wiley, New York 1969.
Parker, R. L.: The theory of ideal bodies for gravity interpretation. Geophys. J. R. astr. Soc., 42, 315-334, 1975.
Rietsch, E.: Extreme models from the maximum entropy formulation of inverse problems. J. Geophys., 44, 273-275, 1978.
Sabatier, P. C.: Positivity constraints in linear inverse problems. Geophys. J. R. astr. Soc., 48, 415-442, 443-469, 1977.
Weidelt, P.: Konstruktion und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in E-Polarisation. Habilitationsschrift, Math.-Nat. Fak., Univ. Göttingen, 1978.