U. SCHMUCKER

Diskussionsbeitrag zu "Über die Unterschiede zwischen verschiedenen Definitionen der Induktionspfeile"

Induktionspfeile sollen einen linearen Zusammenhang zwischen anomalen Z-Variationen und Variationen der Horizontalkomponenten H und D graphisch darstellen. Für das Folgende ist es gleichgültig, ob hierzu H und D am Beobachtungsort oder H_n und D_n eines regionalen Normalfeldes genommen werden, da die anomalen Anteile in H und D gleichfalls linear von H_n und D_n abhängen.

Lineare Zusammenhänge werden im Zeitbereich durch Faltungen mit einer reelen Impulsantwortfunktion R(t) ausgedrückt, im Frequenzbereich durch Multiplikation mit einer komplexen Übertragungsfuktion $c(\omega)$; t ist die Zeit und ω die Kreisfrequenz. Dabei gilt $R(t)=0$ für $t<0$, und eine FOURIER-Transformation von R(t) ergibt $c(\omega)$. Es seien $\tilde{Z}(\omega)$, $\tilde{H}(\omega)$, $\tilde{D}(\omega)$ die komplexen FOURIER-Transformierten der Variationen Z(t), H(t), D(t) in einem gewählten Zeitintervall. Die lineare Beziehung von Z zu H und D sei in der Form

$$Z(t) = R_H(t) * H(t) + R_D(t) * D(t) + \delta Z(t) \quad (1)$$

$$\tilde{Z}(\omega) = c_H(\omega) \cdot \tilde{H}(\omega) + c_D(\omega) \cdot \tilde{D}(\omega) + \delta \tilde{Z}(t) \quad (2)$$

geschrieben, wobei δZ und $\delta\tilde{Z}$ jeweils nicht-korrelierte Rauschanteile ausdrücken. Man bestimmt die Übertragungsfunktionen in Gl. (2) durch eine Ausgleichsrechnung, indem man $|\delta\tilde{Z}|^2$ im Mittel über benachbarte Frequenzen oder verschiedene Intervalle minimiert. Eine entsprechende Bestimmung der Impulsantwortfunktionen ist schwieriger. Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen kann man aber auch eine einfache Auswertung im Zeitbereich vornehmen:

Fall 1. Die Übertragungsfunktionen c_H und c_D seien frequenzunabhängige, reele Konstanten a und b. Dieser Fall "phasengleicher" anomaler Z-Variationen betrifft Anomalien, die durch eine dünne Deckschicht variabler integrierter Leitfähigkeit über einem Nichtleiter oder durch einen idealen Leiter in variabler Tiefe unter einer nichtleitenden Deckschicht verursacht werden.

Die Impulsantwortfunktionen R_H und R_D sind mit a und b multiplizierte Deltafunktionen. Die Faltung einer beliebigen Funktion f(t) mit der Deltafunktion $\delta(t-t_o)$ ergibt $f(t_o)$, d.h. Gl.(1) reduziert sich zu

$$Z(t_o) = a\,H(t_o) + b\,D(t_o) + \delta Z(t_o), \tag{3}$$

woraus sich a und b durch eine Ausgleichsrechnung über alle Zeitpunkte t_o gewinnen lassen.

Fall 2. Die Variationen seien etwa nach einer numerischen Bandpaßfilterung nahezu harmonische Zeitfunktionen der Frequenz ω_o und der Periode $T=2\pi/\omega_o$:

$$Z(t) = Z_o \cos\omega_o t, \quad H(t) = H_o \cos(\omega_o t + \delta_H), \quad D(t) = D_o \cos(\omega_o t + \delta_D).$$

Ihre FOURIER-Transformierten sind Deltafunktionen $\delta(\omega\pm\omega_o)$, d.h. $c_H(\omega_o)$ und $c_D(\omega_o)$ werden allein die Beziehungen zwischen Z,H und D bestimmen. Mit

$$u = \mathrm{Re}\{c(\omega_o)\} = \int_0^\infty R(t)\cos\omega_o t\,dt, \quad v = \mathrm{Im}\{c(\omega_o)\} = \int_0^\infty R(t)\sin\omega_o t\,dt$$

ergibt die Auswertung des Faltungsintegrals

$$H(t) * R_H(t) = H_o \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\cdot\cos(\omega_o[t_o-t]+\delta_H)\,dt$$
$$= u\,H_o \cos(\omega_o t + \delta_H) - v\,H_o \sin(\omega_o t + \delta_H)$$

und Gl.(1) lautet nunmehr

$$Z(t) = u_H\,H(t) + u_D\,D(t) + v_H\,H(t+\tfrac{T}{4}) + v_D\,D(t+\tfrac{T}{4}). \tag{4}$$

Indem man die mit $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ multiplizierten Glieder auf beiden Seiten gleichsetzt, erhält man zwei Gleichungen, die Gl.(2) getrennt geschrieben für Real- und Imaginärteile entsprechen.

Durch eine zusätzliche Annahme läßt sich nun die Abhängigkeit von H und D zum phasenverschobenen Zeitpunkt (t+T/4) eliminieren, ohne daß von reelen Übertragungsfunktionen wie im Fall 1 ausgegangen zu werden braucht. Es genügt vielmehr vorauszusetzen, daß die Phasenwinkel der Übertragungsfunktionen c_H und c_D gleich sind:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = v_H/u_H = v_D/u_D. \tag{5}$$

Diese Voraussetzung erfüllen 2-dimensionale Anomalien, denn nur wenn Gl.(5) gilt läßt sich eine Richtung angeben, für die das anomale Z nur von der Projektion von H und D auf diese Richtung abhängt.

Gl.(4) für die Zeitpunkte t=O und t=T/4 lautet

$$Z(0) = u_H H(0) + u_D D(0) + v_H H(T/4) + v_D D(T/4)$$

$$Z(T/4) = 0 = -v_H H(0) - v_D D(0) + u_H H(T/4) + u_D D(T/4).$$

Wird nun die erste Gleichung mit $\cos\phi = u_H/|c_H| = u_D/|c_D|$, die zweite Gleichung mit $\sin\phi = v_H/|c_H| = v_D/|c_D|$ multipliziert und die Differenz gebildet, so ergibt sich in

$$\cos\varphi \; Z(0) = |c_H| \cdot H(0) + |c_D| \cdot D(0)$$

die von WIESE eingeführte Beziehung

$$Z(0) = A \cdot H(0) + B \cdot D(0) \tag{6}$$

mit

$$A = |c_H| / \cos\varphi \quad \text{und} \quad B = |c_D| / \cos\varphi .$$

Der Richtungswinkel α des WIESE-Induktionspfeils ist definiert durch $\tan\alpha = B/A = |c_D|/|c_H|$. Dieser Winkel erweist sich also als unabhängig vom Phasenwinkel ϕ der Übertragungsfunktionen. Werden entsprechende Induktionspfeile aus den Real- und Imagniärteilen von c_H und c_D gebildet, wie sie aus Gl.(2) oder Gl.(4) abgeleitet wurden, so ergeben sich ihre Richtungswinkel α_u und α_v aus $\tan\alpha_u = u_D/u_H$ und $\tan\alpha_v = v_D/v_H$. Unter der Voraussetzung von Gl.(5) ist aber

$$u_D / u_H = v_D / v_H = |c_D| / |c_H| ,$$

d.h. die aus den Gl.(2) und (6) abgeleiteten Richtungen der Induktionspfeile sind gleich, und zwar sind sie senkrecht zum Streichen der 2-dimensionalen Anomalie. Dies gilt auch für einen aus dem Verhältnis b/a nach Gl.(3) bestimmten Induktionspfeil, hier allerdings mit der Einschränkung, daß der Phasenwinkel ϕ Null ist.

Insgesamt hat sich ergeben, daß sowohl die WIESE-Beziehung Gl.(6) als auch Gl.(3) Sonderfälle der allgemeinen linearen Beziehung (1) darstellen. Gl.(6) bezieht sich auf den Fall harmonischer Variationen und beliebige 2-dimensionale Leitfähigkeitsmodelle, Gl.(3) auf beliebige Variationen und spezielle 2- oder 3-dimensionale Leitfähigkeitsmodelle, die keine Phasenverschiebung des anomalen inneren Anteils gegenüber dem Normalfeld bewirken.

Abschließend seien Gründe genannt, aus denen formal richtig bestimmte Übertragungsfunktionen und damit auch die aus ihnen abgeleiteten Induktionspfeile zeitabhängig sein können, d.h. je nach Lokalzeit oder magnetischem Störungsgrad verschieden ausfallen.

Eine scheinbare Zeitabhängigkeit entsteht, wenn der normale Anteil in Z nicht vollständig von den beobachteten Z-Variationen abgezogen worden ist. Dieser Normalanteil in Z wird durch die Inhomogenität des äusseren induzierenden Feldes (im Verhältnis zur Eindringtiefe) bestimmt, kann also von Effekt zu Effekt variieren und so die statistische Bestimmung der Übertragungsfunktionen verfälschen.

Eine wirkliche Zeitabhängigkeit kommt dagegen dadurch zustande, daß der anomale Anteil der Variationen selbst bis zu einem gewissen Grade durch die räumliche Struktur des induzierenden Feldes beeinflußt wird. In Peru beispielsweise sehen anomale Z-Variationen von Nachteffekten ganz anders aus als solche von Tageffekten. Während der Nacht ist das induzierende Feld in Äquatornähe äußerst homogen, am Tage jedoch wegen des äquatorialen Jets sehr inhomogen.

Überhaupt lassen sich die hier vorausgesetzten linearen Beziehungen zwischen anomalen und normalen Feldanteilen nur dann theoretisch begründen, wenn die räumliche Struktur des induzierenden Feldes im Analyseintervall zeitlich konstant ist. Dies trifft auf das Feld des äquatorialen Jets zu, auf Felder von polaren Jets im allgemeinen nicht. Beruht das induzierende Feld auf einer sich fortbewegenden Quelle, so muß wie etwa beim Sq-Gang der Raum-Zeit-faktor die Form $\exp\{i(\omega t+\underline{k}\cdot\underline{r})\}$besitzen. Die Übertragungsfunktionen des anomalen inneren Anteils sind dann nicht nur von ω und k abhängig, sondern auch von der Richtung von k. Die Küsten-Anomalie des Sq-Gangs beispielweise sieht an den Ostküsten von Kontinenten anders aus als an Westküsten, da sich in einem Fall das induzierende Stromsystem vom Meer auf Land zu bewegt, im anderen Fall aber vom Land aufs Meer.