

E. MUNDRY, Hannover

"Einfluß des Skin-Effektes bei Schaltvorgängen in der Gleichstrom-
Geoelektrik"

Einleitung

Bei Großauslagen mit z.B. einer Schlumberger-Anordnung kann sich der Einstellvorgang für die Sondenspannung bei stufenförmigem Einschaltverlauf des Elektrodenstromes über einen gut registrierbaren Zeitraum erstrecken, womit im Prinzip zusätzliche Informationen über den Untergrund gewonnen werden können.

In Fig.1 ist für die Südafrika-Sondierung mit einer Elektrodenentfernung $L=1250$ km die prozentuale Abweichung der Sondenspannung gegen ihren statischen Endwert als Funktion der Zeit t nach dem Einschalten des Stromes I dargestellt. Die theoretische Behandlung geschieht durch die Bestimmung des elektrischen Feldes eines horizontalen elektrischen Dipols der Kreisfrequenz ω an der Erdoberfläche $z=0$, Berechnung des Einschaltverhaltens eines solchen Dipols mittels der inversen Fouriertransformation und anschließende Integration über das Kabel, um das Einschaltverhalten für eine Schlumberger-Anordnung zu erhalten. Die Untersuchung wird zunächst für einen homogenen Halbraum mit dem spezifischen Widerstand ρ (Leitfähigkeit $\sigma=1/\rho$) durchgeführt.

Der harmonische horizontale elektrische Dipol

Im folgenden sei überall der Zeitfaktor $\exp(-i\omega t)$ abgespalten. Die Maxwell'schen Gleichungen für die elektrische Feldstärke \underline{E} und die magnetische Feldstärke \underline{H} bzw. die magnetische Induktion $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ ($\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am) nehmen bei Vernachlässigung der Verschiebungsströme im quellenfreien Raum die Form

$$\text{rot } \underline{E} - i\omega \underline{B} = 0, \quad \text{rot } \underline{H} - \sigma \underline{E} = 0, \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{div } \underline{B} = 0, \quad \text{div } \underline{E} = 0, \quad (3) \quad (4)$$

an. Um (3) zu erfüllen, wird ein Vektorpotential \underline{A} mit

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad (5)$$

angesetzt, das der Gleichung

$$\Delta \underline{A} - k^2 \underline{A} = 0 \quad \text{mit } k^2 = -i\omega \mu_0 \sigma \quad (6) \quad (7)$$

genügen muß. Für \underline{E} gilt dann unter Beachtung der Lorentz-Konvention:

$$\underline{E} = i\omega \underline{A} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{grad div } \underline{A} \quad (8)$$

Nach SOMMERFELD (1947) ist für einen horizontalen elektrischen Dipol mit dem Moment $I \cdot dx$ im Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems mit Orientierung in x-Richtung der Ansatz

$$\underline{A} = (A_x, 0, A_z) \quad (9)$$

mit
$$A_x = \frac{I dx \mu_0}{4\pi} \int_0^\infty X(z, \lambda) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda \quad (10)$$

$$A_z = \frac{I dx \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty Z(z, \lambda) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda \quad (11)$$

erforderlich, wobei $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ den radialen Abstand und J_0 die Besselfunktion erster Art, nullter Ordnung darstellt. Für X und Z gelten:

$$X'' - n^2 X = 0, \quad Z'' - n^2 Z = 0 \quad \text{mit } n^2 = \lambda^2 + k^2 \quad (12) \quad (13)$$

Für den homogenen Halbraum und die Randbedingungen an der Erdoberfläche ergeben sich die Lösungen

$$X = \frac{2\lambda}{\lambda+n} e^{-nz}, \quad Z = -\frac{2}{\lambda+n} e^{-nz} \quad (14) \quad (15)$$

Mit Hilfe der Integrale

$$P(r, z) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{n} e^{-nz} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{-kR}}{R} \quad (16)$$

$$Q(r, z) = \int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-nz} J_0(\lambda r) d\lambda = I_0 \left[\frac{k}{2}(R-z) \right] \cdot K_0 \left[\frac{k}{2}(R+z) \right] \quad (17)$$

wobei $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ und I_0, K_0 die entsprechenden modifizierten Besselfunktionen bedeuten, erhält man folgende Ausdrücke (STEFANESCU 1942):

$$A_x = \frac{I dx \mu_0}{2\pi k^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} - k^2 \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \quad (18)$$

$$A_z = -\frac{I dx \mu_0}{2\pi k^2} \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \right) \quad (19)$$

insbesondere ergibt sich für die \underline{E} -Komponente parallel zum Dipol für $z=0$:

$$E_x(\omega) = -\frac{I dx}{2\pi \sigma r^3} \left[\frac{3x}{r^2} - 2 + (1+kr) e^{-kr} \right] \quad (z=0) \quad (20)$$

Der Einschaltvorgang bei einer Schlumberger-Anordnung

Um das zeitliche Verhalten für einen horizontalen elektrischen Dipol im Falle eines sprungförmigen Elektrodenstromes zu erhalten, wird die inverse Fouriertransformation

$$\mathcal{F}^{-1}\{E_x(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} d\omega \quad (21)$$

gebildet. Wegen

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-kr}\} = 1 - \text{erf}(u) \quad \text{mit } u = \frac{r}{2} \left(\frac{\mu_0 \sigma}{t}\right)^{1/2} \quad (22)$$

mit der Fehlerfunktion

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi$$

wird insgesamt mit der entsprechenden Ableitung nach r:

$$\mathcal{F}^{-1}\{E_x(\omega)\} = -\frac{I dx}{2\pi \sigma r^3} \left[\frac{3x^2}{r^2} - 1 + \text{erf } u - \frac{2}{\sqrt{\pi}} u \cdot e^{-u^2} \right] \quad (23)$$

Bei einer geradlinigen Kabelführung bei $y=0$ zwischen den Elektroden A ($\xi=x_A$) und B ($\xi=x_B$) ergibt sich durch Integration von (23) nach WAIT (1960):

$$\bar{E}_x(t) = -\frac{I}{2\pi \sigma} \left[\frac{\xi - x}{[y^2 + (\xi - x)^2]^{3/2}} + \Phi(\xi - x) \right]_{\xi=x_A}^{\xi=x_B} \quad (24)$$

mit

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi}{y^2 \sqrt{y^2 + \xi^2}} \text{erf}(\beta \sqrt{y^2 + \xi^2}) - \frac{1}{y^2} e^{-\beta^2 y^2} \text{erf}(\beta \xi) \quad (24a)$$

und $\beta = (\mu_0 \sigma / 4t)^{1/2}$

Für eine Schlumberger-Anordnung wird $x_A = -L/2$ und $x_B = +L/2$ gesetzt und nach der l'Hospitalschen Regel der Grenzübergang $y \rightarrow 0$ ausgeführt. Man erhält für die elektrische Feldstärke \bar{E}_x im Vergleich zu ihrem statischen Wert

$$\bar{E}_x^{(0)} = \frac{I}{\pi \sigma (L/2)^2} \quad (25)$$

die Abweichung

$$g(\tau) \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\bar{E}_x - \bar{E}_x^{(0)}}{\bar{E}_x^{(0)}} = \frac{e^{-1/4\tau}}{2\sqrt{\pi}\tau} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (26)$$

mit $\tau = t / \sigma \mu_0 (L/2)^2$ (27)

Diese Funktion ist in Fig.1 dargestellt. Es gelten folgende asymptotische Näherungen:

$g(\tau) \rightarrow 1/4 \tau$ für $\tau \rightarrow 0$; $g(\tau) \rightarrow 1/6 \sqrt{\pi \tau}$ für $\tau \rightarrow \infty$ (28)

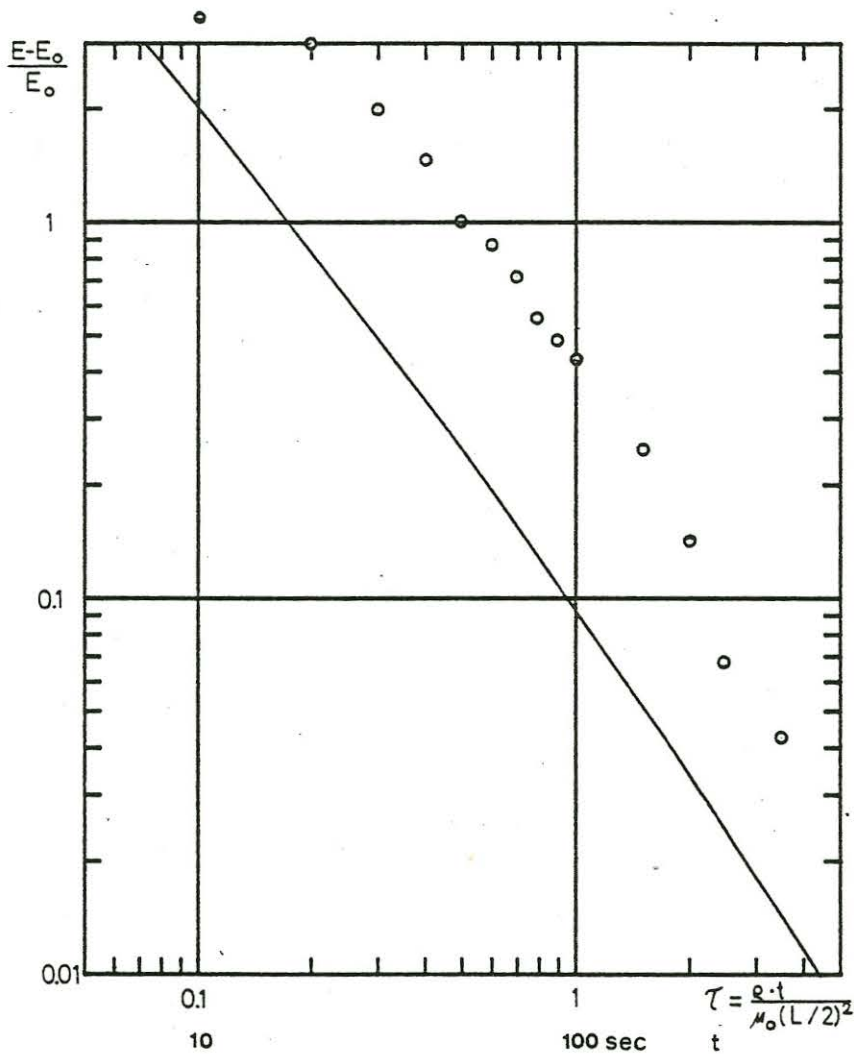


Fig.1: Relative Abweichung des elektrischen Feldes E vom statischen Wert E_0 in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Einschalten des Stromes für die Süd-Afrika-Großauslage mit dem Elektrodenabstand $L=1250$ km bei einer Schlumberger-Anordnung nach WORZYK 1978 (o) sowie theoretische relative Abweichung des elektrischen Feldes E gegen den statischen Wert E_0 bei einer Schlumberger-Elektroden-Anordnung (Elektrodenabstand L) in Abhängigkeit vom Parameter τ für einen homogenen Halbraum mit dem spezifischen Widerstand ρ (—) nach Formel (26).

Für eine Abweichung von 3% vom statischen Wert -- $g(\mathcal{Z})=0,03$ -- ist $\mathcal{Z}_{0,03} \approx 2,1$ oder

$$t_{0,03} \approx 2,64 \cdot 10^{-6} (L/2)^2 / \rho \quad (29)$$

Z.B. ist für $L = 1250 \text{ km} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\rho = 2000 \text{ Ohm.m}$ die Zeit $t_{0,03} \approx 516 \text{ sec}$.

Aussagen für die Süd-Afrika-Messung

Der Vergleich des Einstellvorgangs der Sondenspannung für die Süd-Afrika-Messung mit $L = 1250 \text{ km}$ (Fig.1) mit der theoretischen Einstellkurve für einen homogenen Halbraum (ebenfalls Fig.1) gestattet die Bestimmung eines scheinbaren spezifischen Widerstandes ρ_a für verschiedene Zeiten t , indem aus dem zugehörigen \mathcal{Z} -Wert der spezifische Widerstand nach (27) als ρ_a -Wert errechnet wird.

Die Zeit t kann in eine entsprechende "Beeinflussungstiefe" Z_t vermittelt der Funktion

$$E(z,t) = E_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho t}} \right) \right] \quad (30)$$

umgerechnet werden, die das elektrische Feld (z.B. E_x) nach dem "Einschalten" des Feldes $E = E_0$ an der Halbraumgrenze $z = 0$ ($t \geq 0$) angibt. Die Abweichung von E_0 um den e -ten Teil ist dann durch

$$\frac{z_t}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho t}} = \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \approx 0,3385 \text{ oder } z_t \approx 603,9 \sqrt{\rho t} \quad (31)$$

gegeben. Da dieser Wert nur um etwa 20% von der Skintiefe

$$z_s = \sqrt{\frac{\rho T}{\mu_0 \pi}} \approx 503,3 \sqrt{\rho T} \quad (32)$$

für eine harmonische Welle mit der Periode T abweicht, wird die Umrechnung von t auf eine Bezugstiefe mit der geläufigeren Formel (32) mit $t = T$, $\rho = \rho_a$ vorgenommen.

In Fig.2 ist das Ergebnis für die erwähnte Südafrika-Kurve zusammen mit der Dar Zarrouk-Kurve $\rho^* = \rho^*(z^*)$ für das aus der Gleichstrom-Geoelektrik folgende Modell

Spez. Widerstand	10^5	10^4	50	$8 \cdot 10^3$	50 Ωm
Tiefe	0	4	24	42	162 km

(BLOHM, WORZYK, SCRIBA 1977) dargestellt. Es ist möglich, daß das Minimum dieser Kurve der aus der Zeitabhängigkeit gewonnenen ρ_a -

Kurve der gut leitenden Zwischenschicht in ca. 30 km Tiefe entspricht.

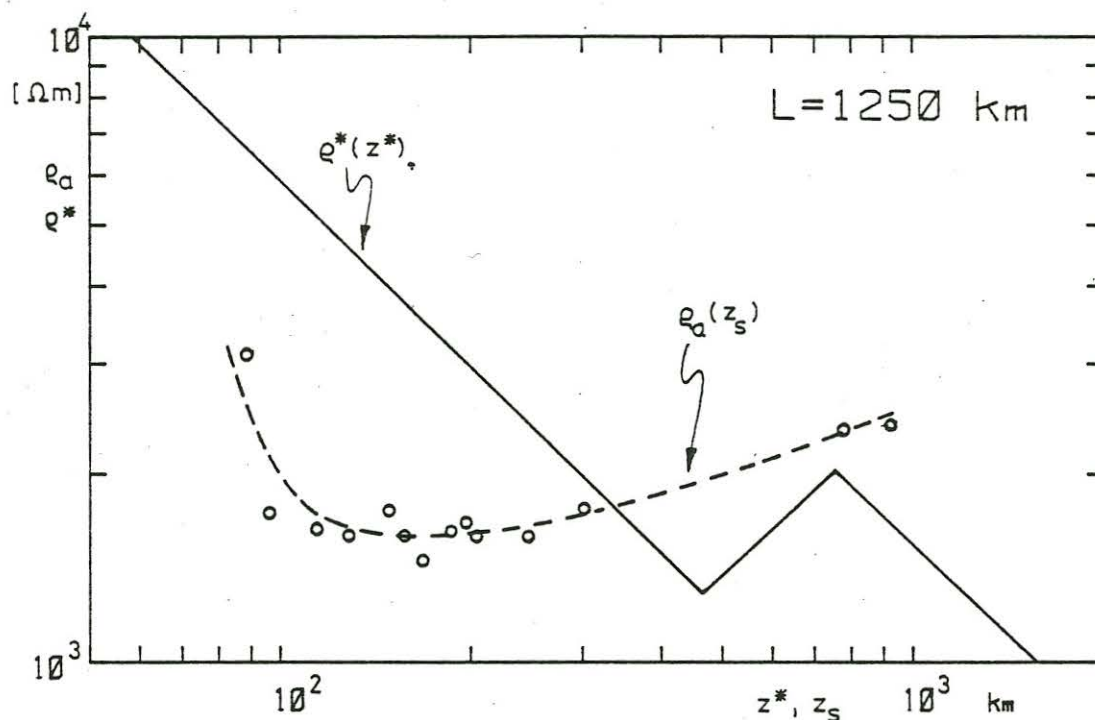


Fig.2: Durch Vergleich der Daten von Fig.1 mit der theoretischen Kurve für einen homogenen Halbraum (ebenfalls Fig.1) abgeleitete scheinbare spezifische Widerstände ρ_a als Funktion der Skintiefe (Periode $T =$ seit dem Stromeschalten verfllossene Zeit t) (o bzw. -----) sowie Dar Zarrouk-Kurve $\rho^*(z^*)$ für das im Text angegebene Widerstandsmodell (—) nach BLOHM, WORZYK und SCRIBA (1977).

Der mittlere spezifische Widerstand ρ^* und die Mächtigkeit z^* sind so definiert, daß der aus dem Modell stammende integrierte Widerstand und die integrierte Leitfähigkeit bis zu einer vorgegebenen Tiefe z mit den Werten einer homogenen Schicht (Widerstand ρ^* und Mächtigkeit z^*) übereinstimmen.

Grundlagen für den n-Schicht-Fall

Prinzipiell könnte eine entsprechende Berechnung des Einschaltvorgangs für den n-Schicht-Fall nach den von VANYAN (1967) für den horizontalen elektrischen Dipol angegebenen Formeln erfolgen, was insgesamt beim Übergang in den Zeitbereich für eine Schlumberger-Anordnung zu einer 3-fachen numerischen Integration führen würde.

Für einen n-fach horizontalen geschichteten Halbraum mit den Schichtmächtigkeiten $h_i (i=1, \dots, n-1)$ und den zugehörigen spezi-

fischen Widerständen Q_i ($i=1, \dots, n$) lassen sich für einen horizontalen harmonischen elektrischen Dipol die Funktionen X und Z bzw. Z' (zur Bildung von $\text{div } \underline{A}$) für die Erdoberfläche $z=0$ rekursiv berechnen, wobei hier die einzelnen Rekursionsglieder mittels tanh-Funktionen ausgedrückt werden:

$$X(0, \lambda) = \frac{2\lambda}{\lambda + n_1 R^*} \quad (33a)$$

$$Z'(0, \lambda) = \frac{2n_1}{\lambda} \left(\frac{1}{\bar{R}^*} - \frac{n_1}{\lambda + n_1 / R^*} \right) \quad (33b)$$

mit
$$n_i^2 = \lambda^2 + k_i^2, \quad k_i^2 = -i\omega\mu_0\sigma_i$$

und der Rekursionsformel:

$$R_n = 1$$

$$R_i = \frac{\frac{n_i}{n_i + 1} a_i R_{i+1} + \tanh(n_i h_i)}{1 + \frac{n_i}{n_i + 1} a_i R_{i+1} \cdot \tanh(n_i h_i)} \quad (i = n-1, \dots, 1) \quad (34)$$

Hierbei liefert $a_i = 1$ die Funktion $R^* = R_1$ und $a_i = Q_i / Q_{i+1}$ die Funktion $\bar{R}^* = R_1$.

Aus (8), (10) und (11) ergibt sich damit das elektrische Feld eines harmonischen Dipols im n -Schicht-Fall; die inverse Fouriertransformation und Integration über das Kabel liefert dann das Einschaltverhalten für eine Schlumberger-Anordnung.

Literatur:

BLOHM, E.-K., WORZYK, P. und SCRIBA, H.: Geoelectrical Deep Soundings in Southern Africa Using the Cabora Bassa Power Line. - J. Geophys., 43, 665-679, 1977

SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 6, 2. Aufl., Wiesbaden, 1947

STEFANESCU, S.S.: Das elektromagnetische Normalfeld des waagerechten Niederfrequenzdipols. - Beitr. Z. Angew. Geophys., 9, 201-233, 1942

VANYAN, L.L.: The Electromagnetic Field of a Harmonic Dipole Grounded at the Surface of a Multilayered Anisotropic Medium. - Bull. (Izv.) Acad. Sci. USSR, ser. geophys., no. 8, 740-741, 1963

WAIT, J.R.: Propagation of Electromagnetic Pulses in a Homogeneous Conducting Earth. - Appl. Scient. Res., sect. B, 8, 213-253, 1960

... die Funktionen einer ...
... die Funktionen einer ...
... die Funktionen einer ...