

H. SCRIBA, Zürich

"Berechnung des elektrischen Feldes in dreidimensionalen Widerstandsstrukturen"

Bei der geoelektrischen Prospektion mit künstlichen Quellen besteht das Dilemma, dass man wegen der punktförmigen Anregung es immer mit dreidimensionalen Feldern zu tun hat. Man kann daher nicht auf zweidimensionale Approximationen, wie z.B. in der Magnetotellurik, zurückgreifen, es sei denn, man setzt Linienquellen voraus, was jedoch von der Praxis her gesehen äusserst unrealistisch ist. Dieses Dilemma hat zur Folge, dass man fast ausschliesslich auf eine eindimensionale Auswertung zurückgreifen muss, denn diese Reduktion um zwei Dimensionen ist unter der Voraussetzung einer horizontalen Schichtung möglich.

Wenn man sich aber die geologischen Verhältnisse ansieht, so ist diese Eindimensionalität in den seltensten Fällen gegeben. Bei kurzen Auslagen kann man sich relativ einfach helfen, indem man die Profile auf geeignete Weise den geologischen Strukturen anpasst. Dies ist jedoch bei sehr langen Auslagen nicht mehr möglich, weil man dann aus logistischen Gründen auf die Verwendung bestehender Leitungen angewiesen ist, und die einzelnen Erderpunkte zwangsweise in der Nähe dieser Leitungen liegen. Die Cabora-Bassa Leitung, beispielsweise, verläuft in einem grossen Bogen südlich der rhodesisch-moçambiquanischen Grenze und überquert dabei die verschiedensten geologischen Einheiten (BLOHM et al. 1977).

Die Methode der finiten Differenzen

Die Methode der finiten Differenzen ist nicht neu und wird auf verschiedenen Gebieten erfolgreich angewendet (vgl. JONES & PASCOE 1971, MUFTI 1976). Leider beschränken sich diese Arbeiten auf zweidimensionale Probleme. Will man dreidimensional rechnen, so ergeben sich sehr bald Probleme mit dem beschränkten Speicherplatz im Computer. Dies lässt sich jedoch unter Verwendung sog. indexsequentieller Files lösen, so dass man nur diejenige Information im Zentralspeicher benötigt, die man gerade zum Rechnen verwendet (s.u.).

Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung elektrischer Gleichfelder. Wenn man auch aus technischen Gründen i.a. Rechteckströme verwendet, so kann man jedoch Gleichspannungsverhältnisse voraussetzen, falls die Perioden gross genug sind, dass Ausbreitungseffekte vernachlässigbar sind (vgl. SCRIBA 1973). Im inhomogenen isotropen Medium lautet die Differentialgleichung für das elektrische Potential V :

$$\nabla \left[\epsilon(x_k) \cdot \nabla V(x_k) \right] + \frac{\partial Q(x_k)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

wobei Q = Ladungsdichte

x_k = Ortskoordinaten, $k = 1, 2, 3$

Durch Diskretisierung des Kontinuums in kleine Elemente $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ geht die Differentialgleichung in ein System von Differenzgleichungen über. Nach zweimaliger Anwendung der zentralen Differenzenapproximation erhalten wir somit für den Punkt (i, j, k) die lineare Gleichung (vgl. Fig. 1)

$$\begin{aligned} & - C_P \cdot V_{i,j,k} + C_O \cdot V_{i-1,j,k} + C_U \cdot V_{i+1,j,k} \\ & + C_W \cdot V_{i,j-1,k} + C_E \cdot V_{i,j+1,k} + C_N \cdot V_{i,j,k-1} \quad (2) \\ & + C_S \cdot V_{i,j,k+1} + q_{i,j,k} = 0 \end{aligned}$$

wobei

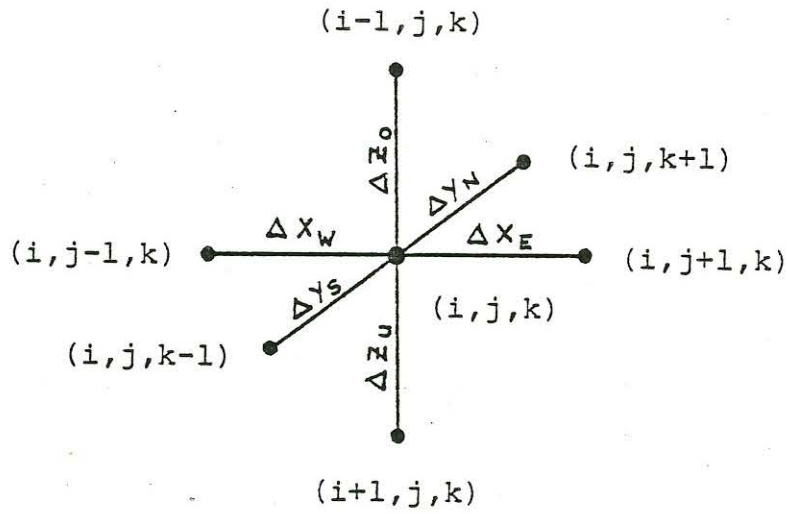
$$C_O = \frac{2 \cdot \epsilon(x_j, y_k, z_i - \Delta z_O / 2)}{\Delta z_O (\Delta z_O + \Delta z_U)}$$

⋮

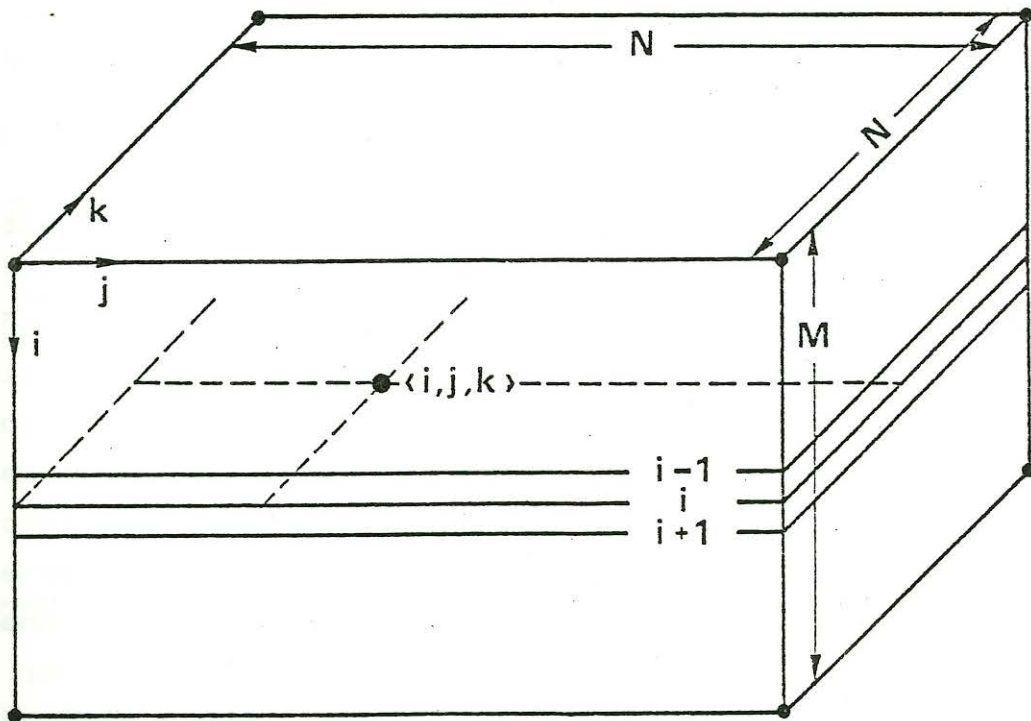
$$C_P = C_W + C_E + C_S + C_N + C_O + C_U$$

$$q_{i,j,k} = \frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t}, \quad x = x(j), \quad y = y(k), \quad z = z(i)$$

Die Gleichung (2) lässt sich am bequemsten iterativ lösen. Nehmen wir an, die m -te Näherung sei berechnet worden. Dann ergibt sich für die $(m+1)$ -te Näherung, wenn wir entlang den Indizes i, j, k in positivem Sinn fortschreiten:



Figur 1: Der Punkt (i, j, k) mit seinen Nachbarpunkten und den dazugehörigen Wegdifferenzen



Figur 2: Netzwerk aus $N^2 \cdot M$ Punkten zur Berechnung des Potentials

$$V_{i,j,k}^{(m+1)} = \left[C_O \cdot V_{i-1,j,k}^{(m+1)} + C_U \cdot V_{i+1,j,k}^{(m)} + C_W \cdot V_{i,j-1,k}^{(m+1)} + C_E \cdot V_{i,j+1,k}^{(m)} + C_N \cdot V_{i,j,k-1}^{(m+1)} + C_S \cdot V_{i,j,k+1}^{(m)} + q_{i,j,k} \right] / C_P \quad (3)$$

(Gauss-Seidel- Gleichung)

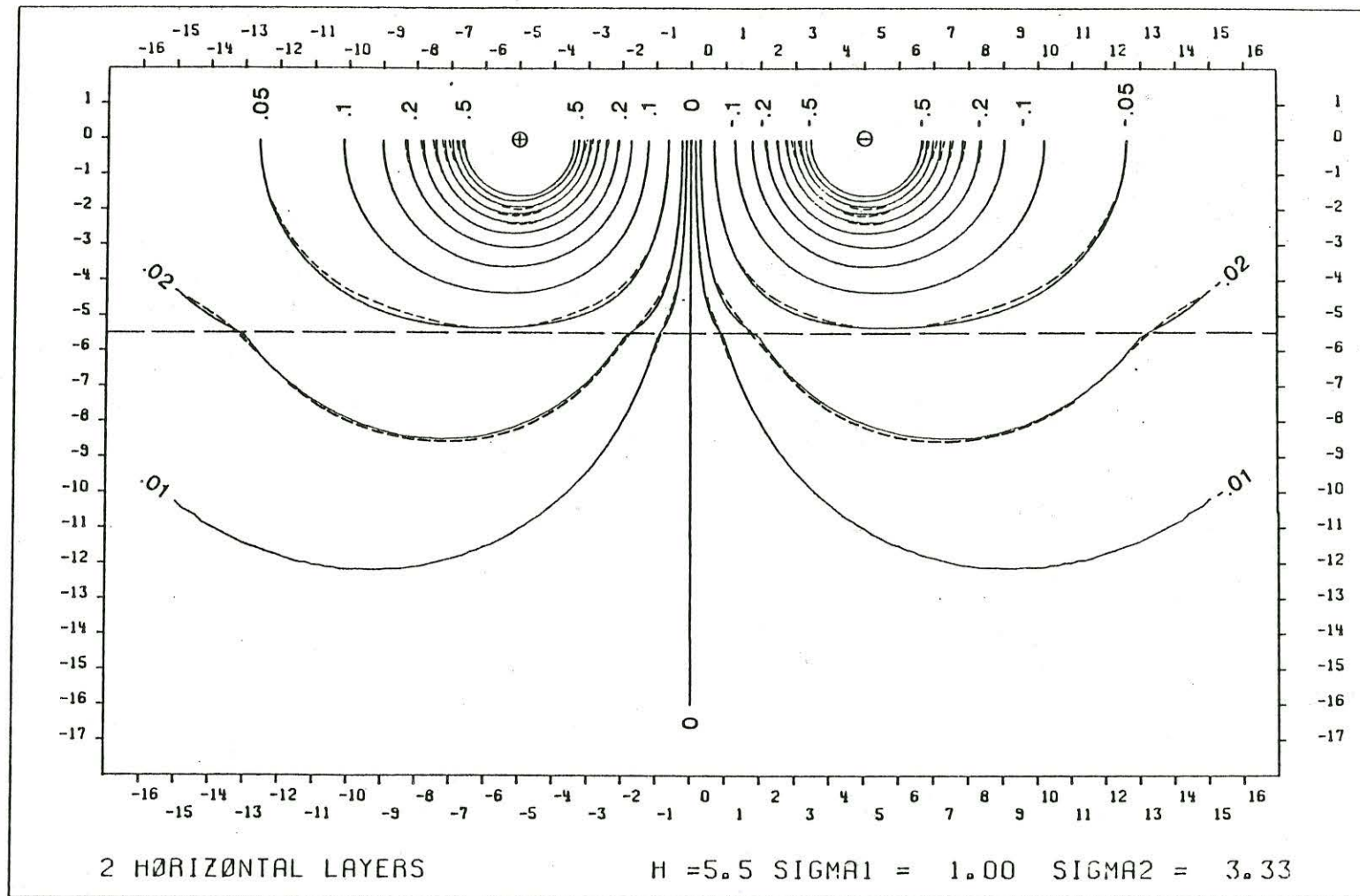
Die Konvergenzgeschwindigkeit eines solchen Näherungsverfahrens ist jedoch unbefriedigend. Diese lässt sich beträchtlich erhöhen durch Verwendung der Methode der Ueberrelaxation (vgl. FADDEJEW & FADDEJEW 1970). Durch Einführung eines Relaxationsparameters ω wird bei der Berechnung der (m+1)-ten Näherung auch $V_{i,j,k}^{(m)}$ berücksichtigt:

$$V_{i,j,k}^{(m+1)} = V_{i,j,k}^{(m)} + \omega / C_P \cdot \left[- C_P \cdot V_{i,j,k}^{(m)} + C_O \cdot V_{i-1,j,k}^{(m+1)} + C_U \cdot V_{i+1,j,k}^{(m)} + C_W \cdot V_{i,j-1,k}^{(m+1)} + C_E \cdot V_{i,j+1,k}^{(m)} + C_N \cdot V_{i,j,k-1}^{(m+1)} + C_S \cdot V_{i,j,k+1}^{(m)} + q_{i,j,k} \right] \quad (4)$$

Der Parameter ω liegt bei Ueberrelaxation zwischen 1 und 2.

Das Rechenprogramm

Für das in Fig.2 Dargestellte Netzwerk aus $N^2 \cdot M$ Elementen ergibt sich ein Speicherbedarf von insgesamt $7 \cdot N^2 \cdot M$ Plätzen (Potential V + 6 Koeffizienten C_i). Wählen wir z.B. $N = 31$ und $M = 16$, was für ein einfaches Problem genügt, so ergeben sich 107'632 Speicherplätze. Bewegt man sich in der Ebene $i = \text{const.}$, so genügen jedoch die beiden Ebenen $i-1$ und $i+1$ zur Berechnung von (4). Falls man die übrigen Elemente anderweitig abspeichert, so genügen also $9 N^2$ Plätze (3·Potential V + 6 Koeffizienten C_i). Für unser Beispiel ergeben sich somit 8'649 Plätze. Die Abspeicherung und der Aufruf der übrigen Elemente geschieht über indexsequentielle Disk-Files. Das Programm wurde in FORTRAN IV geschrieben. Für das angegebene Netz ergibt sich auf der CDC 6500 ein Speicherbedarf von insgesamt weniger als 60'000₈.



Figur 3: Vertikalschnitt durch die Potentialverteilung bei einem horizontalen Zweischichtenfall. Ausgezogene Linien: herkömmlich berechnete Isolinien, gestrichelte Linien: Näherung mit finiten Differenzen

Zur Berechnung der Randwerte des Potentials hat sich folgende Methode am besten bewährt: Man vergrößert den gewählten Raster um den Faktor 5 und berechnet die Potentialverteilung, indem man als Randwerte das Potential im homogenen Halbraum einsetzt. Dann reduziert man den Raster auf den ursprünglichen Wert und verwendet die vorher berechneten Werte als neue Randwerte.

Als Beispiel zeigt Fig.3 einen Vertikalschnitt durch die Potentialverteilung bei einem horizontalen Zweischichtenfall. Dargestellt sind die Isolinien des Potentials: die ausgezogenen Linien wurden auf herkömmliche Weise berechnet, die gestrichelten mit finiten Differenzen. Werte zwischen den Gitterpunkten wurden mit einer Polynom-Approximation interpoliert. Die Abweichung der FD-Kurven ist trotz des groben Rasters recht klein. Die Rechenzeit auf der CDC 6500 betrug ca. 100 Sekunden.

Andere Beispiele müssen aus Platzmangel hier leider wegfallen. Eine weitere ausführlichere Veröffentlichung ist jedoch beabsichtigt.

Literatur

Blohm, E.K., P. Worzyk and H. Scriba: Geoelectrical deep soundings in southern Africa using the Cabora Bassa power line -- preliminary results. J.Geophys., 43, 665-679, 1977.

Faddejew, D.K., und W.N. Faddejewa: Numerische Methoden der linearen Algebra. R.Oldenbourg, München 1970.

Jones, F.W., and L.J. Pascoe: A general computer program to determine the perturbation of alternating electric currents in a two-dimensional model of a region of uniform conductivity with an embedded inhomogeneity. Geophys.J.R.astr.Soc., 24, 3-30, 1971.

Mufti, I.R.: Finite-difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. Geophysics, 41, 62-78, 1976.

Scriba, H.: Geoelektrische Widerstandsmessung mit tieffrequenten Rechteckströmen. Dissertation Nr.5180, ETH Zürich, 1973.