

U. SCHMUCKER, Göttingen

"Eindimensionale Interpretation logarithmischer Sondierungsdaten mit zusätzlicher Anpassung der Tiefen von Schichtgrenzen"

1. Einleitung

Die hier betrachtete eindimensionale Interpretation besteht darin, zu vorgegebenen Werten ("Daten") $y_n \pm \delta y_n$ ($n=1,2,\dots,N$) einer elektromagnetischen Sondierungskurve $y(f)$ eine passende Widerstandsverteilung $\rho(z)$ zu finden. Dabei bezeichnet y_n einen Schätzwert von $y(f)$ für die Frequenz f_n mit dem rms Fehler δy_n . Die gesuchte Widerstandsverteilung soll durch Schätzwerte $x_m \pm \delta x_m$ ($m=1,2,\dots,M$) der Modellparameter beschrieben werden. Es geht nun darum, y_n und x_m so zu formulieren, daß sie über einen linearen, modellunabhängigen Datenkern g_{nm} miteinander verbunden werden:

$$y_n = \sum_m g_{nm} x_m + \Delta y_n \quad (1)$$

Lösungen von (1) in der Form

$$x_m = \sum_n h_{mn} y_n \quad (2)$$

mit

$$\delta x_m^2 = \sum_n h_{mn}^2 \delta y_n^2$$

als Varianz der Schätzwerte x_m können z.B. durch Minimierung der quadratischen Anpassungsfehler $[\Delta y_n]^2$ nach der GAUSSschen Methode der kleinsten Quadrate gewonnen werden. Es ist jedoch nicht die Absicht dieses Beitrags, solche Methoden zu beschreiben. Vielmehr soll dargestellt werden, in welcher Weise das nicht-lineare eindimensionale Induktionsproblem am zweckmäßigsten im Sinne der Gl. (1) linearisiert werden kann, und zwar nach Möglichkeit ohne den Gebrauch partieller Ableitungen zur Berechnung von Verbesserungen für ein gewähltes Ausgangsmodell.

+.) [] bedeutet Summierung über n (oder m)

Wie eine solche Linearisierung bezüglich des Schichtwiderstandes als Modellparameter erreicht werden kann, ist im Protokollband zum Grafrath-Kolloquium (SCHMUCKER, 1974) beschrieben worden. Wesentlich war dabei die Einführung der "logarithmischen Impedanz"

$$\Psi(f, z) = 2 \ln \{ Z(f, z) / Z_0(f, z) \} ; \quad (3)$$

$Z(f, z)$ ist die komplexe Impedanz des Feldes in Abhängigkeit der Frequenz f und der Tiefe z . Sie wird in der Definition von Ψ bezogen auf die Impedanz

$$Z_0(f, z) = \sqrt{i \omega \mu_0 \rho(z)} \quad (4)$$

eines homogenen Halbraums mit dem Widerstand $\rho(z)$.

Die gesuchte Widerstandsverteilung $\rho(z)$ wurde nun durch ein geschichtetes Modell in der Weise wiedergegeben, daß die Schichtdicken d_m in einem konstanten Verhältnis zur jeweiligen Skintiefe $\sqrt{2\rho/\omega\mu_0}$ standen, daß also

$$d_m / \sqrt{\rho_m} = d_0 / \sqrt{\rho_0} = \text{const.} \quad (5)$$

für $m = 1, 2, \dots, M-1$ galt; ρ_m ist der Widerstand in der m 'ten Schicht und ρ_M der Widerstand des homogenen Halbraums unter $(M-1)$ Schichten. Im folgenden wird die Konstante d_0 als Schichtparameter bezeichnet; ρ_0 ist eine Maßstabskonstante, also z.B. $\rho_0 = 1 \Omega\text{m}$.

Im Abschnitt 2 wird noch einmal dargestellt, wie man aus den logarithmischen Impedanzen an der Erdoberfläche $z = 0$ die Schichtwiderstände ableiten kann. Gemäß der Bedingung Gl. (5) werden durch sie auch die Tiefen der Schichtgrenzen,

$$z_m = \sum_{m'=1}^m d_{m'} = d_0 \sum_{m'=1}^m \sqrt{\rho_{m'} / \rho_0} \quad (6)$$

festgelegt ($m = 1, 2, \dots, M-1$), wobei z_m die Tiefe der unteren Begrenzung der m 'ten Schicht angibt (Abb. 1).

In gewissen Fällen wird ein in dieser Weise in Schichten unterteiltes Modell der zu erwartenden "wahren" Tiefenverteilung $\rho(z)$ bei begrenzter Zahl von Schichten nicht entsprechen können, wenn sich zum Beispiel $\rho(z)$ sprunghaft ändert, wie etwa an stratigraphischen Grenzen oder Diskordanzen im Deckgebirge.

Um solchen Fällen Rechnung zu tragen, hat LARSEN (1975) die Ansätze (5) und (6) durch Gewichte w_m so erweitert, daß

die Schichtgrenzen des resultierenden Widerstandsmodells in bestimmten Tiefen liegen:

$$d_m = w_m d_0 \sqrt{\rho_m / \rho_0} ; \quad z_m = d_0 \sum_1^m w_{m'} \sqrt{\rho_{m'} / \rho_0}$$

In diesem Beitrag wird ein neuer Algorithmus vorgestellt, in dem das eindimensionale Induktionsproblem bei vorgegebenen Schichtwiderständen bezüglich der Tiefen der Schichtgrenzen in einem reduzierten Tiefenmaßstab $\hat{z}(z) = \int_0^z \sqrt{\rho_0 / \rho(z')} dz'$ linearisiert wird. Modellparameter der auf diesem U-Algorithmus aufbauenden Interpretation ist also die reduzierte Tiefe

$$\hat{z}_m = \sum_1^m d_{m'} \sqrt{\rho_0 / \rho_{m'}} = d_0 \sum_1^m w_{m'}$$

für (M-1) Schichtgrenzen.

In Abschnitt 3 wird zunächst gezeigt, daß eine Linearisierung bezüglich der Schichtdicken nicht zu einem genügend modellunabhängigen Datenkern führt. In Abschnitt 4 wird der neue Algorithmus zur Bestimmung der reduzierten Tiefen \hat{z}_m abgeleitet, wobei sich der Gebrauch partieller Ableitungen nicht umgehen läßt. Sie erweisen sich jedoch als näherungsweise nur von der Tiefe \hat{z}_m einer Schicht abhängig. In Abschnitt 5 werden dann der Ψ -Algorithmus aus Abschnitt 2 und der U-Algorithmus aus Abschnitt 4 vereinigt, um verbesserte Schichtwiderstände und Schichtgrenztiefen gemeinsam aus den Anpassungsfehlern eines Ausgangsmodells zu bestimmen.

2. Ψ -Algorithmus

Es sei $Z(f, z) = E_x / H_y$ die Impedanz eines harmonisch oszillierenden elektromagnetischen Feldes, das in einem geschichteten Leiter in Richtung der z-Achse nach unten diffundiert (Abb.1). Das Feld habe verschwindend kleine Gra-

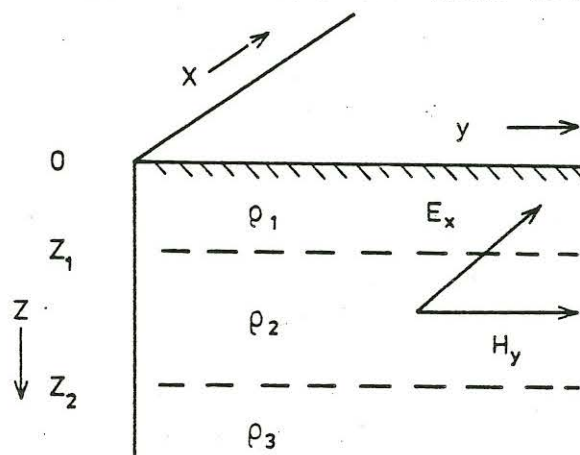


Abb.1

dienten in x- und y-Richtung; es soll keine Vertikalkomponente des elektrischen Feldes besitzen. Bezeichnet Z_m^+ die Impedanz an der unteren Grenze der m'ten Schicht und Z_m^- die Impedanz an der oberen Grenze der gleichen Schicht, gelten folgende Beziehungen ($m = 1, 2, \dots, M-1$):

$$Z_m^+ = Z_{m+1}^- \quad (7)$$

$$Z_m^- = Z_0 (Z_m^+ + Z_0 \tanh \alpha_m) / (Z_0 + Z_m^+ \tanh \alpha_m) \quad (8)$$

mit

$$\alpha_m = \sqrt{i\omega\mu_0/\rho_m} d_m \quad \text{und} \quad Z_0 = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_m}.$$

Gl. (7) folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten an Schichtgrenzen, Gl. (9) aus der Diffusionsgleichung für das elektromagnetische Feld (vgl. SCHMUCKER, 1970, S. 61 ff.). Die Impedanz an der oberen Begrenzung des Halbraums ($d_M = \infty$, ρ_M endlich) ist

$$Z_M^- = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_M}.$$

Für die in Gl. (3) eingeführte logarithmische Impedanz ergeben sich aus (7) und (8) analoge Beziehungen:

$$\Psi_m^+ = \Psi_{m+1}^- + \ln(\rho_{m+1}/\rho_m) \quad (9)$$

$$\Psi_m^- = \gamma_m \Psi_m^+, \quad \gamma_m = \frac{\tanh^{-1}\{U_m^+ e^{-2\alpha_m}\}}{\tanh^{-1}\{U_m^+\}} \quad (10)$$

mit

$$U = \tanh\{\Psi/4\} = (Z - Z_0)/(Z + Z_0). \quad (11)$$

Man verifiziert (10) am einfachsten, indem man Gl. (24) in Verbindung mit Gl. (11) benutzt.

Für $m = M$ gilt $\Psi_M^- = 0$. In der aus der logarithmischen Impedanz abgeleiteten Größe U_m^+ wird gewissermaßen die "Reflektivität" der Grenzflächen ausgedrückt, also das komplexe Verhältnis des "reflektierten" zu dem "transmittierten" Feldanteil. Bei nicht zu großen Widerstandskontrasten ist der Betrag der Reflektivität klein, d.h. $|U_m^+| \ll 1$ und statt (10) kann näherungsweise

$$\gamma_m = e^{-2\alpha_m} + O[(U_m^+)^2] \quad (12)$$

geschrieben werden, wie einer Reihenentwicklung der inversen hyperbolischen Tangensfunktionen unmittelbar zu entnehmen ist.

Führt man durch die Definition

$$x(z) = \ln [\beta(z)/\beta_0], \quad x_m = \ln (\beta_m/\beta_0) \quad (13)$$

eine der logarithmischen Impedanz entsprechende logarithmische Widerstandsverteilung ein, lassen sich die Gl. (9) und (10) zusammenfassen zur Rekursionsformel des Ψ -Algorithmus:

$$\Psi_m^- = \gamma_m (\Psi_{m+1}^- + x_{m+2} - x_m). \quad (14)$$

Wendet man sie auf den Oberflächenwert Ψ_1^- an, so ergibt sich ein dem linearen Ansatz Gl. (1) entsprechender Zusammenhang zwischen Beobachtungsdaten y_n und Modellparametern x_m :

$$y_n = \Psi_n^- + x_n = \sum_m g_{nm} x_m \quad (15)$$

($n = 1, 2, \dots, N$) mit dem "Datenkern"

$$g_{nm} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_{m-1} (1 - \gamma_m).$$

Der Index n soll ausdrücken, daß die logarithmische Impedanz Ψ_1^- für die n 'te Frequenz (f_n) gemeint ist.

Die durch Gl. (15) definierten Daten lassen sich in einfacher Form auf dem CAGNIARDschen scheinbaren spezifischen Widerstand ρ_{an} und die Phase ϕ_n der Impedanz für die Frequenz f_n zurückführen. Setzt man die Definition $\rho_a = |Z|^2/\omega\mu_0$ und $\phi = \arg \{Z\}$ für $z = 0$ in (3) ein, so erhält man

$$y_n = \Psi(f_n, 0) + \ln \{ \beta(0)/\beta_0 \} = \ln \{ \rho_{an}/\beta_0 \} + 2i(\varphi_n - \frac{\pi}{4}). \quad (16)$$

Der Datenkern g_{nm} in Gl. (15) ist dann im Sinne der Näherung Gl. (12) modellunabhängig, wenn die Zusatzbedingung Gl. (5) erfüllt ist. Sie ergibt wegen

$$\gamma_m \approx \exp \{ -2K_0 d_0 \} \quad \text{mit} \quad K_0^2 = i\omega_n \mu_0 / \beta_0 \quad (17)$$

einen näherungsweise nur von der Frequenz und dem Schichtparameter d_0 abhängigen Datenkern. Die Lösung der Gl. (15) muß iterativ erfolgen. Nach der ersten, mit der Näherung Gl. (17) erfolgten Rechnung werden nach Gl. (10) zu dem erhaltenen Modell exakt passende Datenkerne gewonnen und mit ihnen die Rechnung wiederholt.

Erfahrungsgemäß konvergiert die Lösung nach wenigen Iterationen, wenn sie für den gewählten Schichtparameter d_0 überhaupt konvergiert. Durch Probieren wird dieser so festgelegt, daß sich für eine vorgegebene Zahl von Schichten der kleinstmögliche Anpassungsfehler $[\Delta x_m^2]$ ergibt.

3. Φ -Algorithmus

Zur Linearisierung des Induktionsproblems, wenn die Schichtdicken d_m die gesuchten Modellparameter sind, bietet sich zunächst ein von LIPSKAYA eingeführter Algorithmus an:

Es sei:
$$\Phi = \tanh^{-1} \{ \Sigma / Z_0 \} = -\frac{1}{2} \ln \{ -U \} \quad (18)$$

Dann lauten für Φ_m die aus den Gl. (7) und (8) abgeleiteten Beziehungen

$$\Phi_m^+ = \tanh^{-1} \left\{ \sqrt{\beta_{m+1} / \beta_m} \tanh(\Phi_{m+1}^-) \right\} \quad (19)$$

$$\Phi_m^- = \Phi_m^+ + \alpha_m \quad (20)$$

Schreibt man sie für $m = 1, 2, \dots, M-1$ in der Form

$$\Phi_m^+ = \gamma_m' \Phi_{m+1}^-$$

$$\Phi_m^- = \Phi_m^+ + K_m d_m$$

mit $K_m^2 = i\omega\mu_0 / \rho_m$, so erhält man eine zu Gl. (14) analoge Rekursionsformel

$$\Phi_m^- = \gamma_m' \Phi_{m+1}^- + K_m d_m \quad (21)$$

Sie ergibt für das lineare Gleichungssystem

$$\gamma_n' = \Phi_1^- - \gamma_1' \gamma_2' \dots \gamma_{M-1}' \tanh^{-1} \sqrt{\beta_M / \beta_{M-1}} = \sum_1^{M-1} g_{nm}' d_m \quad (22)$$

den Datenkern

$$g_{nm}' = \gamma_1' \gamma_2' \dots \gamma_{m-1}' K_m$$

Dieser Datenkern ist jedoch auch nicht näherungsweise unabhängig formulierbar von den Schichtdicken d_m . Eine Lösung von Gl. (22) würde also durch alle Parameter des Ausgangsmodells bestimmt werden. Damit scheidet der Φ -Algorithmus zur Berechnung der Schichtdicken aus.

4. U-Algorithmus

Die in Abschnitt 3 gestellte Aufgabe läßt sich anscheinend nur mit Hilfe partieller Ableitungen lösen. Dies kann entweder durch Differentiation der Datenkerne des Ψ -Algorithmus bezüglich der Schichtdicken geschehen oder aber durch eine Differentiation in der noch abzuleitenden Rekursionsformel für U_m (vgl. Gl. 11). Für U_m gelten nach (9) und (20)

$$U_m^+ = \tanh \left\{ \frac{1}{4} \ln(\beta_{m+1} / \beta_m) + \tanh^{-1}(U_{m+1}^-) \right\} \quad (23)$$

$$U_m^- = U_m^+ e^{-2\alpha_m} \quad (24)$$

wenn man die Beziehung

$$U = -e^{-2\Phi} \quad (25)$$

zwischen Φ und U in Gl. (20) einsetzt.

Gl. (23) sei in der Form (23a)

$$U_m^+ = U_{m+1}^- + \delta_m$$

geschrieben, wobei sich für nicht zu große Widerstandskontraste die modellfreie Näherung

$$\delta_m \approx \frac{1}{4} \ln(\beta_{m+1} / \beta_m) \quad (26)$$

ergibt. Die Rekursionsformel des U-Algorithmus lautet mit diesen Bezeichnungen

$$U_m^- = (U_{m+1}^- + \delta_m) e^{-2\alpha_m} \quad (27)$$

mit $U_M^- = 0$, woraus sich der Oberflächenwert von U für $z = 0$

$$U_1^- = \sum_1^{M-1} \left\{ \delta_m e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)} \right\}$$

ableiten läßt.

Als Modellparameter bietet sich offensichtlich die reduzierte Tiefe der Schichtgrenzen,

$$\hat{z}_m = \sum_{m'=2}^m d \sqrt{\beta_0 / \beta_{m'}} = d_0 \sum_1^m w_m \quad (28)$$

an, da dann gerade gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = -2K_0 \hat{z}_m$$

und somit

$$U_1^- = \sum_1^{M-1} \delta_m e^{-2K_0 \hat{z}_m}$$

Da δ_m fast nur von den logarithmischen Widerstandsverhältnissen abhängt, ergibt Differentiation nach \hat{z}_m in guter Näherung

$$\partial U_1^- / \partial \hat{z}_m = -2K_0 \delta_m e^{-2K_0 \hat{z}_m}$$

Nunmehr werden für ein gewähltes Ausgangsmodell synthetische Werte für U_1^- berechnet. Ihr Anpassungsfehler für die n 'te Frequenz sei Δu_n . Sie sollen durch Verbesserungen $\Delta \hat{z}_m$ der reduzierten Schichttiefen in linearer Näherung beseitigt werden. Das lineare Gleichungssystem zur Berechnung dieser Verbesserungen aus den Anpassungsfehlern lautet

$$\Delta u_n = \sum_1^{M-1} g_{nm}'' \Delta \hat{z}_m = -2K_0 \sum_1^{M-1} \delta_m e^{-2K_0 \hat{z}_m} \Delta \hat{z}_m \quad (29)$$

mit einem fast nur von der jeweiligen reduzierten Schichtgrenzentiefe \hat{z}_m abhängigem Datenkern g_{nm}'' .

5. Kombiniertes Ψ und U-Algorithmus

Nach dem in Abschnitt 2 beschriebenen Verfahren soll ein Ausgangsmodell gefunden worden sein, daß durch Verbesserungen der logarithmischen Widerstandsverteilung $x_m = \ln(\rho_m/\rho_0)$ und der reduzierten Tiefen $\hat{z}_m = d_0 \sum_1^m w_m$, noch genauer an vorgegebene Daten angepaßt werden soll. Der Anpassungsfehler für y_n sei $\Delta y_n^{(1)}$, derjenige für U_1^- sei $\Delta u_n^{(1)}$. Durch Differentiation nach y_n erhält man

$$dU_1^-/dy = \frac{d}{dy} \left\{ \tanh \left(\frac{1}{4} [\gamma_m - x_m] \right) \right\} = [1 - (U_1^-)^2] / 4,$$

so daß für kleine Anpassungsfehler

$$\Delta u_n = \frac{1}{4} \{ 1 - (U_1^-)^2 \} \Delta \gamma_m$$

gesetzt werden darf.

Für Verbesserungen von x_m gewinnt man den zugehörigen Datenkern durch Differentiation von Gl. (15) nach x_m , für jene von \hat{z}_m ist bereits Gl. (29) abgeleitet worden. Insgesamt lautet das zu lösende System linearer Gleichungen

$$\Delta y_n^{(1)} = \sum_1^M g_{nm} \Delta x_m - \frac{8K_0}{1 - (U_1^-)^2} \sum_1^{m-1} g''_{nm} \Delta \hat{z}_m + \Delta y_n^{(2)}$$

($n = 1, 2, \dots, N$). Die $(2M-1)$ Verbesserungen der Modellparameter x_m und \hat{z}_m werden daraus nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Minimierung von $[|\Delta y_n^{(2)}|^2]$ gewonnen. Ist $(2M-1)$ in der Größenordnung von N , ist eine Stabilisierung der Lösung z.B. nach MARQUARDT erforderlich (MÜLLER, 1974; Gl. 9).

Literatur

LARSEN, J.C.: Low frequency (0.1-6.0 cpd) electromagnetic study of deep mantle electrical conductivity beneath the Hawaiian islands. Geophys. J. 43, 17, 1975.

MÜLLER, W.: Horizontalschichtinterpretationen mit Hilfe des "Umkehrverfahrens" von D.W. Marquardt. In: Protokoll über das Kolloquium "Erdmagnetische Tiefensondierung" in Grafrath/Bayern (Hrsg. A. Berkold), 462-465, Institut für Geophysik Univ. München, 1974.

SCHMUCKER, U.: Erdmagnetische Tiefensondierung mit langperiodischen Variationen. Ibd., 323-342, Institut für Geophysik Univ. München, 1974.