

cand. phys. H.-E. NAGEL, Braunschweig

"Digitale Filter zur Auswertung gemessener Zeitfunktionen im Rahmen der Erdmagnetischen Tiefensondierung"

Dienstag, den 4. 3. 1969

Aus Variographenregistrierungen, die SCHMUCKER 1957 bis 1959 in Norddeutschland aufgenommen hat, ist ein Teil eines magnetischen Sturms für die Station Westerholte im Abstand  $\Delta t=3$  min digitalisiert worden. Mit digitalen Filtern sind Perioden von  $T=18$  min bis  $T=108$  min herausgefiltert worden und die komplexen Übertragungskoeffizienten zwischen Z und H und D berechnet worden.

Die Übertragungsfunktion zwischen dem anomalem Störfeldanteil  $\vec{F}_a$  und dem normalen Störfeldanteil  $\vec{F}_n$  wird linear angesetzt mit:

$$\vec{F}_a(\omega, t) = ((\theta(\omega))) \vec{F}_n(\omega, t) + \delta\vec{F}(\omega, t),$$

und nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung soll gefordert werden:

$$\int_t \delta^2 \vec{F}(\omega, t) = \text{Min}$$

Die Übertragungsmatrix schreibt sich explizit:

$$((\theta(\omega))) = \begin{matrix} h_h & h_d & h_z \\ d_h & d_d & d_z \\ z_h & z_d & z_z \end{matrix}$$

(Die Koeffizienten  $h_h$  usw. sind frequenzabhängig, exakt:  $h_h(\omega)$ ). Damit ergibt sich z.B. für die anomale Z-Störung:

$$Z_a(\omega, t) = z_h H_n(\omega, t) + z_d D_n(\omega, t) + z_z Z_n(\omega, t) + \delta Z(\omega, t).$$

Setzt man voraus, daß sich der innere und äußere Anteil des normalen Z gerade aufheben und setzt  $\delta H(\omega, t) = 0 = \delta D(\omega, t)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} H &= H_n + H_a = (1+h_h) H_n + h_d D_n, \\ D &= D_n + D_a = d_h H_n + (1+d_d) D_n, \\ Z &= Z_a = z_h H_n + z_d D_n + \delta Z. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem führt auf folgende lineare Beziehung zwischen den gemessenen Störgrößen H, D und Z, dabei sind alle H, D und Z Funktionen von  $\omega$  und t:

$$Z = z_h^{**} H - z_d^{**} D + \delta Z \quad \text{mit}$$

$$z_h^{**} = \frac{z_h + d_d z_h - d_h z_d}{1 + h_h + d_d + h_h d_d - h_d d_h}$$

$$z_d^{**} = \frac{z_d + h_h z_d - h_d z_h}{1 + h_h + d_d + h_h d_d - h_d d_h}$$

Die Größen  $z_h^{**}$  und  $z_d^{**}$  sollen bestimmt werden für den phasentreuen und um  $90^\circ$  phasenverschobenen Anteil von H und D.

Hat man einen phasentreuen Filteroperator  $W_\kappa^{(n)}$  und einen Filteroperator  $U_\kappa^{(n)}$ , nach dessen Anwendung die Phase der gefilterten Funktion um  $90^\circ$  nacheilt, so kann man folgende zwei Gleichungen aufstellen (Da die Frequenz in den Filteroperatoren enthalten ist, sind die z... auch frequenzabhängig)

$$W_\kappa^{(n)} Z(t) = z_{wvh} W_\kappa^{(n)} H(t) + z_{wuh} U_\kappa^{(n)} H(t) + z_{wvd} W_\kappa^{(n)} D(t) + z_{wud} U_\kappa^{(n)} D(t) + \delta_w Z(t),$$

$$U_\kappa^{(n)} Z(t) = z_{uwh} W_\kappa^{(n)} H(t) + z_{uuh} U_\kappa^{(n)} H(t) + z_{uud} W_\kappa^{(n)} D(t) + z_{uud} U_\kappa^{(n)} D(t) + \delta_u Z(t);$$

n gibt die Anzahl der Werte an, über die gefiltert wird,  $\kappa$  um welche Oberwelle es sich handelt, und zwar für die Grundwelle ( $T = n \cdot \Delta t$ ) ist  $\kappa = 1$ , d.h. für die 1. Oberwelle ist  $\kappa = 2$ .  $\kappa = 0$  heißt, daß es sich um ein gleitendes Mittel über n Werte handelt. Folgende Beziehung gilt zwischen den Koeffizienten:

$$z_h^{**} = \begin{cases} z_{wvh} = z_{uuh} \\ z_{wuh} = -z_{uwh} \end{cases}, \quad z_d^{**} = \begin{cases} z_{wvd} = z_{uud} \\ z_{wud} = -z_{uud} \end{cases}.$$

Dabei bezieht sich der erste Index auf die Art des Filters, das auf Z angewandt wurde, der zweite auf die Art des Filters für H oder D. Man erhält also 2 Gleichungen für 4 Unbekannte; in diesem Fall sollen aber beide Gleichungen für sich gelöst werden, um den Einfluß der Filter besser zu erkennen. Durch partielle Abteilung nach den zu bestimmenden Übertragungskoeff-

fizienten erhält man je 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten (Normalgleichungen).

Der Fehler für die Koeffizienten wurde bestimmt nach der Formel:

$$m_{zwwh} = \sqrt{\frac{\sum \delta_w^2 Z}{N-4}} \sqrt{\frac{U \det(z_{wwh})}{\text{Det}}}$$

Dabei ist Det die Determinante des Normalgleichungssystems und Udet die Unterdeterminante zu dem entsprechenden Hauptdiagonalelement:

$$\text{Det} = \begin{pmatrix} [\text{WHWH}] & [\text{WHUH}] & [\text{WHWD}] & [\text{WHUD}] \\ [\text{UHWH}] & [\text{UHUH}] & [\text{UHWD}] & [\text{UHUD}] \\ [\text{WDWH}] & [\text{WDUH}] & [\text{WDWD}] & [\text{WDUD}] \\ [\text{UDWH}] & [\text{UDUH}] & [\text{UDWD}] & [\text{UDUD}] \end{pmatrix};$$

z.B. Udet ( $z_{wwh}$ ) ist also die Unterdeterminante zu  $[\text{WHWH}]$ .

Die Filteroperatoren  $W_{\kappa}^{(n)}$  und  $U_{\kappa}^{(n)}$  bestehen aus Verschiebungsoperatoren  $V^{\mu}$ , multipliziert mit cos bzw. - sin Gewichtungskoeffizienten:

$$\begin{cases} W_{\kappa}^{(n)} \\ U_{\kappa}^{(n)} \end{cases} \zeta = \frac{a}{n} \sum_{\mu} \begin{cases} \cos \\ -\sin \end{cases} \left( \frac{2\pi}{n} \kappa \mu \right) \} V^{\mu} \zeta$$

mit  $a=1$  für  $\kappa=0$  und  $\kappa=\frac{n}{2}$   
und  $a=2$  sonst;  
für gerades  $n$  ist  $\mu = -\frac{n}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{n}{2}$ ,  
mit  $\frac{1}{2} h_{\pm \frac{n}{2}}(\kappa)$ ;

für ungerades  $n$  ist  $\mu = -\frac{n-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{n-1}{2}$

Abb. 1 zeigt nun die Anwendung eines  $W_1^{(12)}$ - und  $U_1^{(12)}$ -Filters auf eine im 3-Min.-Abstand digitalisierte Registrierung. Dabei zeigt sich, daß weder die Phase immer um  $90^\circ$  nachläuft noch bei Amplituden- und Frequenzinhalt der Kurven übereinstimmt. Durch Berechnung der Filterdurchlaßfunktionen läßt sich leicht der Grund dafür erkennen.

Die Durchlaßfunktion lautet:

$$d_{\kappa}^{(n)}(v) = \frac{a}{n} \sum_{\mu} h_{\kappa}(\mu) e^{i \frac{2\pi}{n} v \mu}$$

mit

$$e^{i \frac{2\pi}{n} \nu \mu} = \cos \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right),$$

und wegen

$$\sum_{\mu} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \kappa \mu \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) = 0 \quad (\text{das Gleiche gilt, wenn } \kappa \text{ und } \nu \text{ vertauscht werden})$$

bleibt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( d_{\kappa}^{(n)}(\nu) \right) &= \frac{a}{n} \sum_{\mu} \cos \left( \frac{2\pi}{n} \kappa \mu \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) \\ &= d_{\kappa}^{(n)}(\nu) = \frac{a}{n} \sum_{\mu} h_{\mu}^{(\kappa)} \cos \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( d_{\kappa}^{(n)}(\nu) \right) &= \frac{-ia}{n} \sum_{\mu} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \kappa \mu \right) \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) \\ i \triangleq d_{-\kappa}^{(n)}(\nu) &= \frac{a}{n} \sum_{\mu} h_{\mu}^{(-\kappa)} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{n} \nu \mu \right) \end{aligned}$$

Für  $a$ ,  $\mu$  und  $h_{\mu}^{(\kappa)}$  gelten die bei den Filtern angegebenen Bedingungen.

Die Abb. 2 zeigt oben die Durchlaßfunktionen  $d_1^{(12)}(\nu)$  und  $d_{-1}^{(12)}(\nu)$ , aufgetragen bis zur Nyquistfrequenz. Man erkennt die starken Unterschiede der Durchlaßfunktionen der Filter, die in Abb. 1 verwendet wurden. In Abb. 2 entspricht für  $\Delta t = 3 \text{ min}$

die Frequenz  $\nu = 1$  der Periode  $T = 36 \text{ min}$ ,  
 die Frequenz  $\nu = 2$  der Periode  $T = 18 \text{ min}$   
 und die Frequenz  $\nu = 0.5$  der Periode  $T = 72 \text{ min}$ .

An der Originalregistrierung der Abbildung 1 sieht man, daß Perioden von ca. 1 h darin enthalten sind, das entspricht einem  $\nu$  von etwa 0.5. In diesem Bereich unterscheiden sich die  $d(\nu)$  um ca. 0.4; also lassen sich die Unterschiede der gefilterten Kurven auf die unterschiedliche Form der Frequenzbänder zurückführen, deren Werte nur für die ganzzahligen  $\nu$  bei der Auswahl der Filter vorgegeben werden. Da die Filter die sehr schöne Eigenschaft der Phasenkonstanz für alle Frequenzen haben, d.h.  $0^\circ$  oder  $90^\circ$ , lohnt sich der Aufwand der Anpassung zweier Filter mit  $90^\circ$  Phasenunterschied.

Die erste Möglichkeit dazu zeigt Abb. 2 in der Mitte mit den Durchlaßfunktionen für die zweifache Anwendung der Filter  $W_1^{(12)}$  und  $U_1^{(12)}$ :  $W_1^{(12)}W_1^{(12)}$ ,  $W_1^{(12)}U_1^{(12)}=U_1^{(12)}W_1^{(12)}$  und  $U_1^{(12)}U_1^{(12)}$ . Das erste und letzte haben gegen das mittlere Filter jeweils  $90^\circ$  Phasendifferenz. Die Differenz der Durchlaßfunktionen ist in Abb. 2 unten aufgetragen; außerdem ist noch die Differenz zwischen dem WU-Filter und der Kombination (C) aus dem ersten und letzten Filter aufgetragen. Die Kombination (C) wird angesetzt mit  $\frac{WW - UU}{2}$ .

Nachteil der zweifachen Anwendung: Es gehen am Anfang und Ende des zu filternden Intervalls doppelt so viele Werte der ursprünglichen Funktion verloren (je  $n$  Werte) wie bei der einfachen Anwendung (nur je  $\frac{n}{2}$  Werte). Eine andere Möglichkeit der Anpassung ist, zu größeren  $\kappa$ -Werten überzugehen. Abb. 3 zeigt dafür ein Beispiel für den Fall, daß der Digitalisierungsabstand nicht verringert wird. D.h. für  $\Delta t = 3$  min ist  $d_1^{(6)}(1) = d_2^{(12)}(2) = d_4^{(24)}(4) = d_8^{(48)}(8)$  die durchgehende Amplitude für eine Periode von 18 min. An den übereinandergezeichneten Durchlaßfunktionen sieht man, daß die gewünschten Hauptbänder mit steigendem  $n$  schmaler werden und die Seitenbänder durch steigende Anzahl unübersichtlicher und größer werden als bei der doppelten Anwendung (beim doppelt angewandten Filter mit  $n = 12$  verliert man am Anfang und Ende des Intervalls genau so viele Werte wie beim einfachen Filter mit  $n = 24$ ). Allerdings zeigen - leider nur im Hauptband - die Filter mit  $\kappa = \pm \frac{n}{4}$  sehr gute Übereinstimmung. Aber auch in diesem Fall kann der Unterschied in den niederfrequenten Seitenbändern wegen der häufig viel größeren Amplituden der langperiodischen Vorgänge die Filterkombination unbrauchbar machen.

Abb. 5 zeigt oben eine Originalregistrierung und darunter die mit der Kombination (C) gefilterten Werte. Diese Ausgangsfunktionen sind noch mit verschiedenen Filtern bearbeitet worden. Dazu zeigt Abb. 6 eine Anzahl von Übertragungskoeffizienten mit den dazugehörigen Fehlern. z.B.: Das unterste Kreuz  $h_0^{(2)}(12)$  auf der linken Seite ist die Darstellung der Koeffizienten  $z_{uuh}$  und  $-z_{uwh}$ , die aus folgender Gleichung berechnet wurden:

$$W_0^{(2)}U_2^{(12)}Z = z_{uwh}W_0^{(2)}W_2^{(12)}H + z_{uuh}W_0^{(2)}U_2^{(12)}H + \dots$$

Der mittlere Fehler  $m_{zuuh}$  ist dabei nach links und rechts und der Fehler  $m_{zuwh}$  nach oben und unten aufgetragen.

Wegen der anfangs beschriebenen Beziehung zwischen den Koeffizienten müßten eigentlich die  $z_{w...}$  und entsprechenden  $z_{u...}$  übereinanderfallen; das ist in den seltensten Fällen gegeben, aber am dichtesten liegen sie für die (C)-Kombinationen beieinander, die im übrigen auch die kleinsten Fehler aufweisen. (Noch etwas bessere Anpassungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man für das phasentreue Filter  $a \cdot WW - b \cdot UU$  schreibt und nicht  $a$  und  $b$  beide = 0.5 setzt, sondern noch etwas variiert.)

Wenn man das W- und U-Filter einmal programmiert hat, ist es keine Schwierigkeit das Filterprogramm mehrfach anzuwenden. Deshalb ist die etwas kompliziert erscheinende (C)-Kombination für Computerbetrieb ohne weiteres zu rechtfertigen. Das weitere Ziel der Arbeit ist der Nachweis, daß die Übertragungskoeffizienten nur orts- und frequenzabhängig sind und die Zeit oder Amplitude der Störungen in die Koeffizienten nicht eingeht.

#### Literatur:

KERTZ, W.: Filterverfahren in der Geophysik. Gerlands Beitr. Geophys., 75, 1-33, 1965.

19<sup>00</sup>                      20<sup>00</sup>                      21<sup>00</sup>                      22<sup>00</sup>                      23<sup>00</sup> 11

Station Westerholte 16. Sept. 1958  
H-Komponente

- Originalregistrierung
- W-Filter
- U-Filter

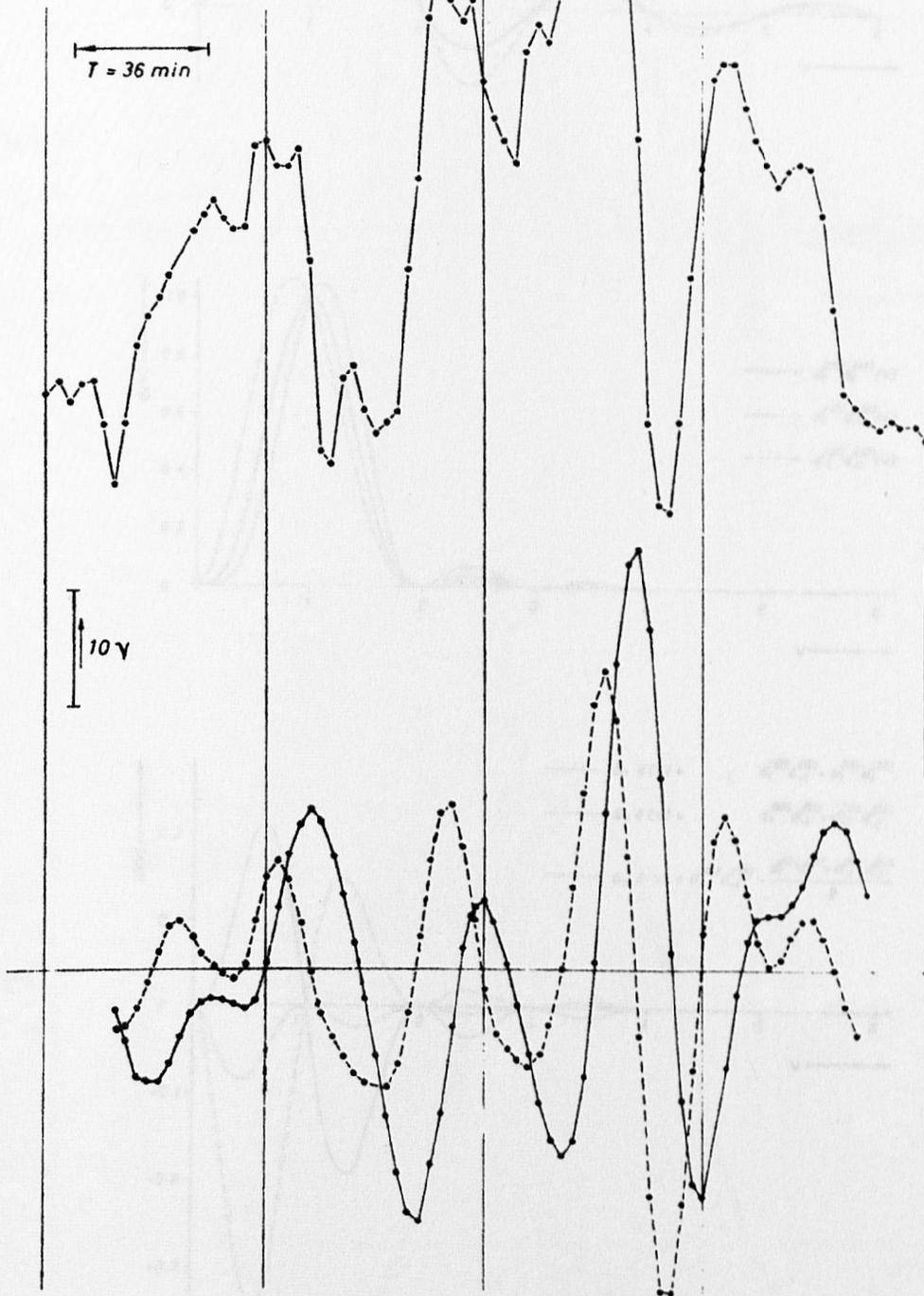


Abb. 1

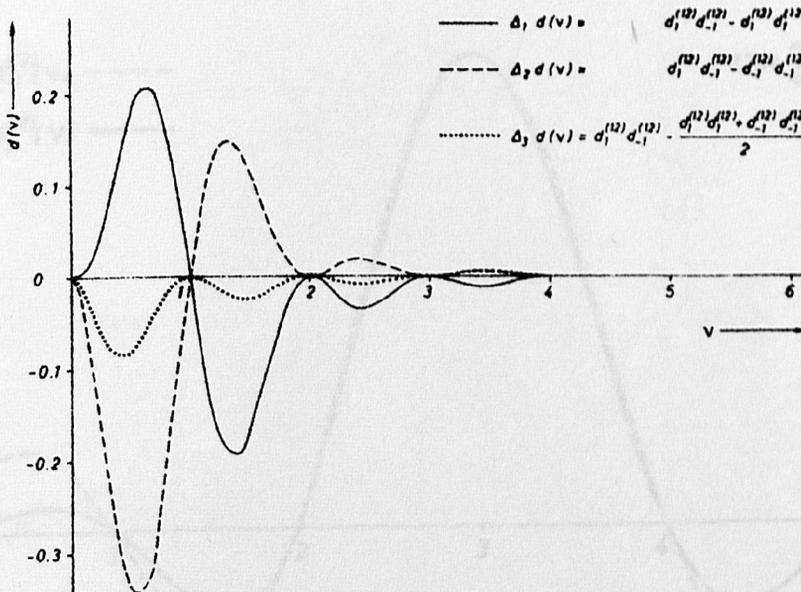
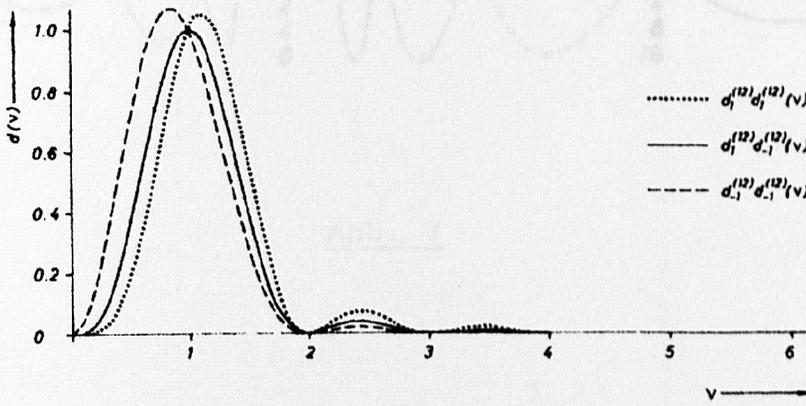
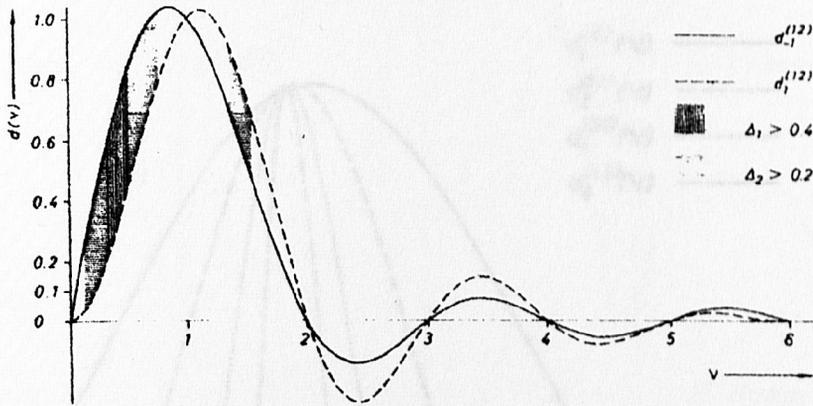


Abb. 2

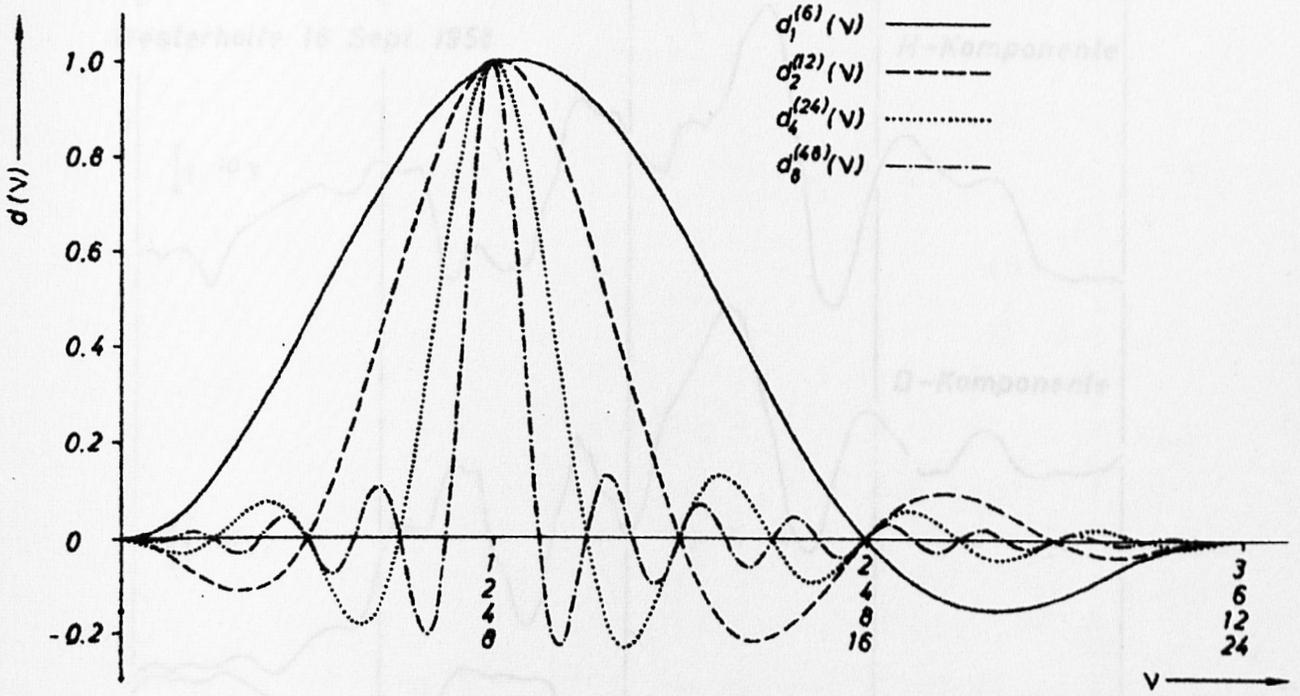


Abb. 3

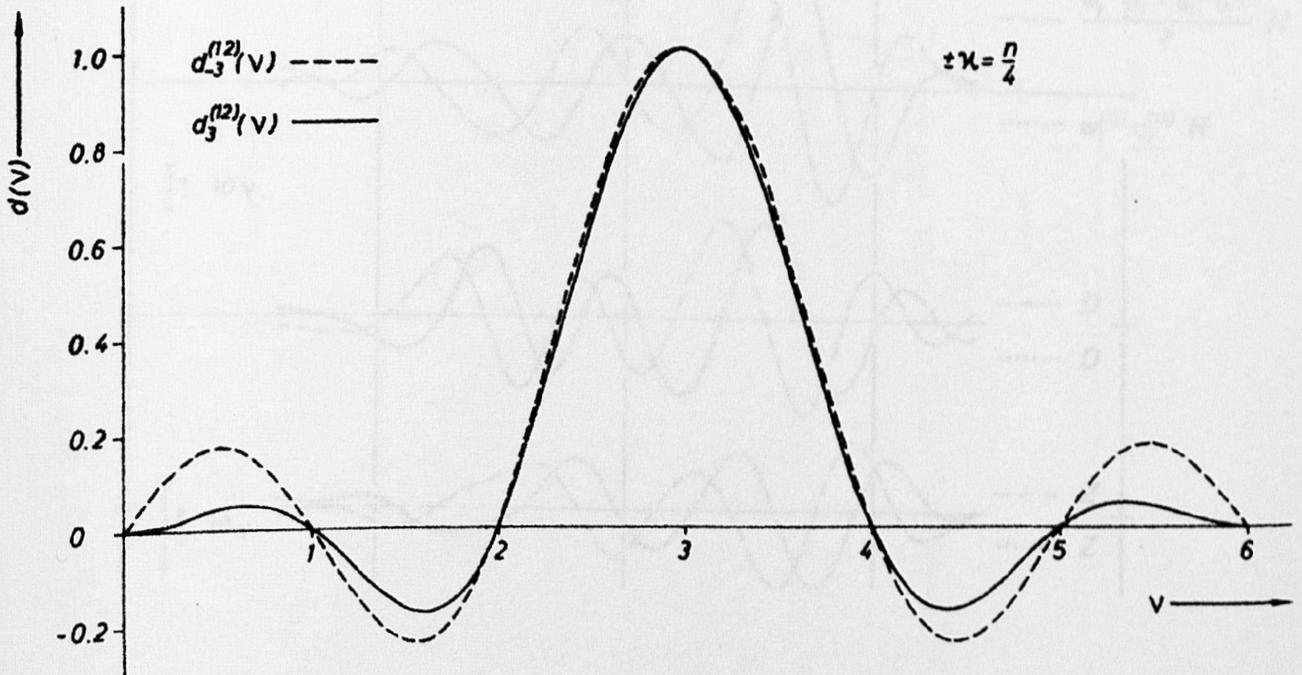


Abb. 4

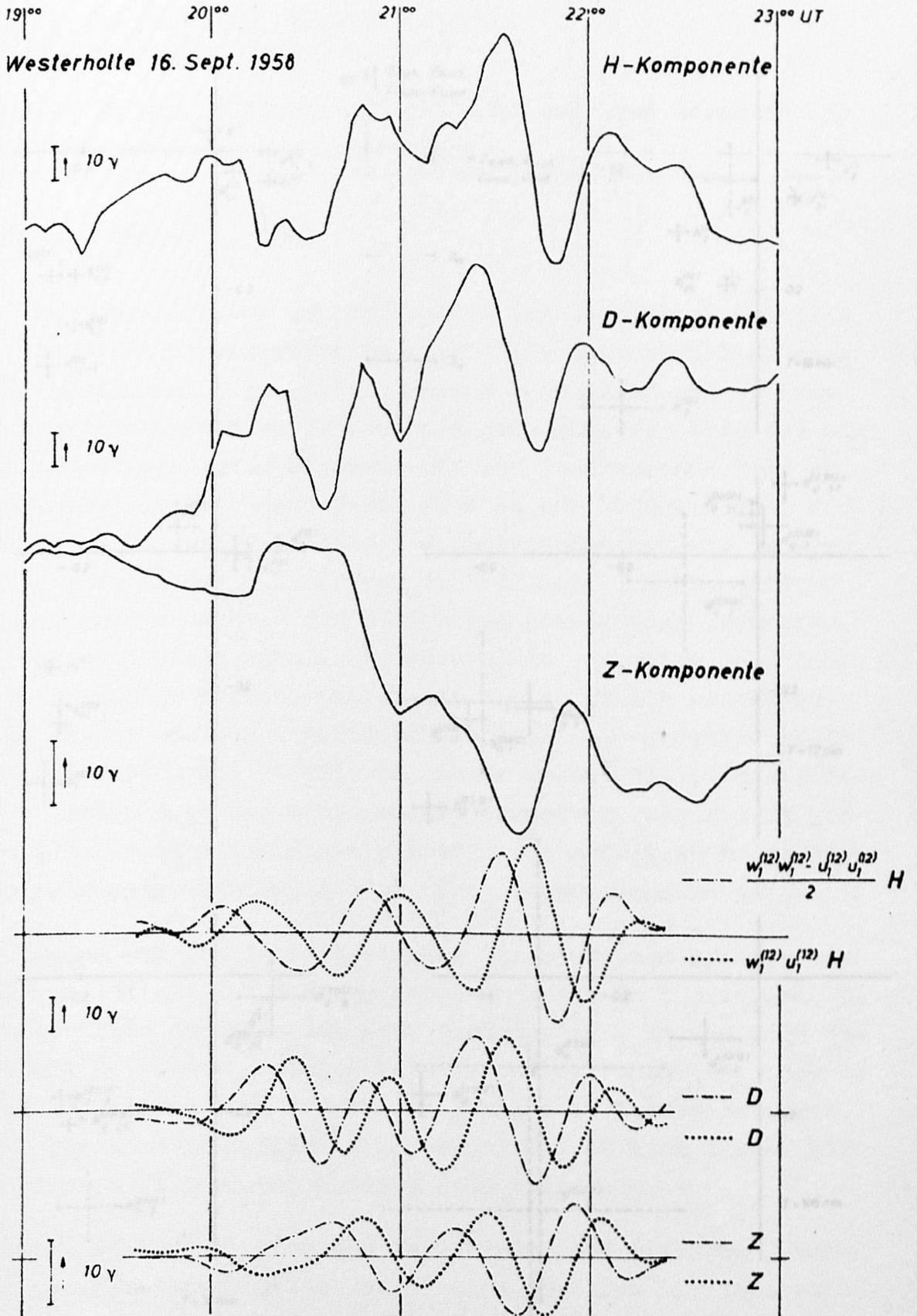


Abb. 5

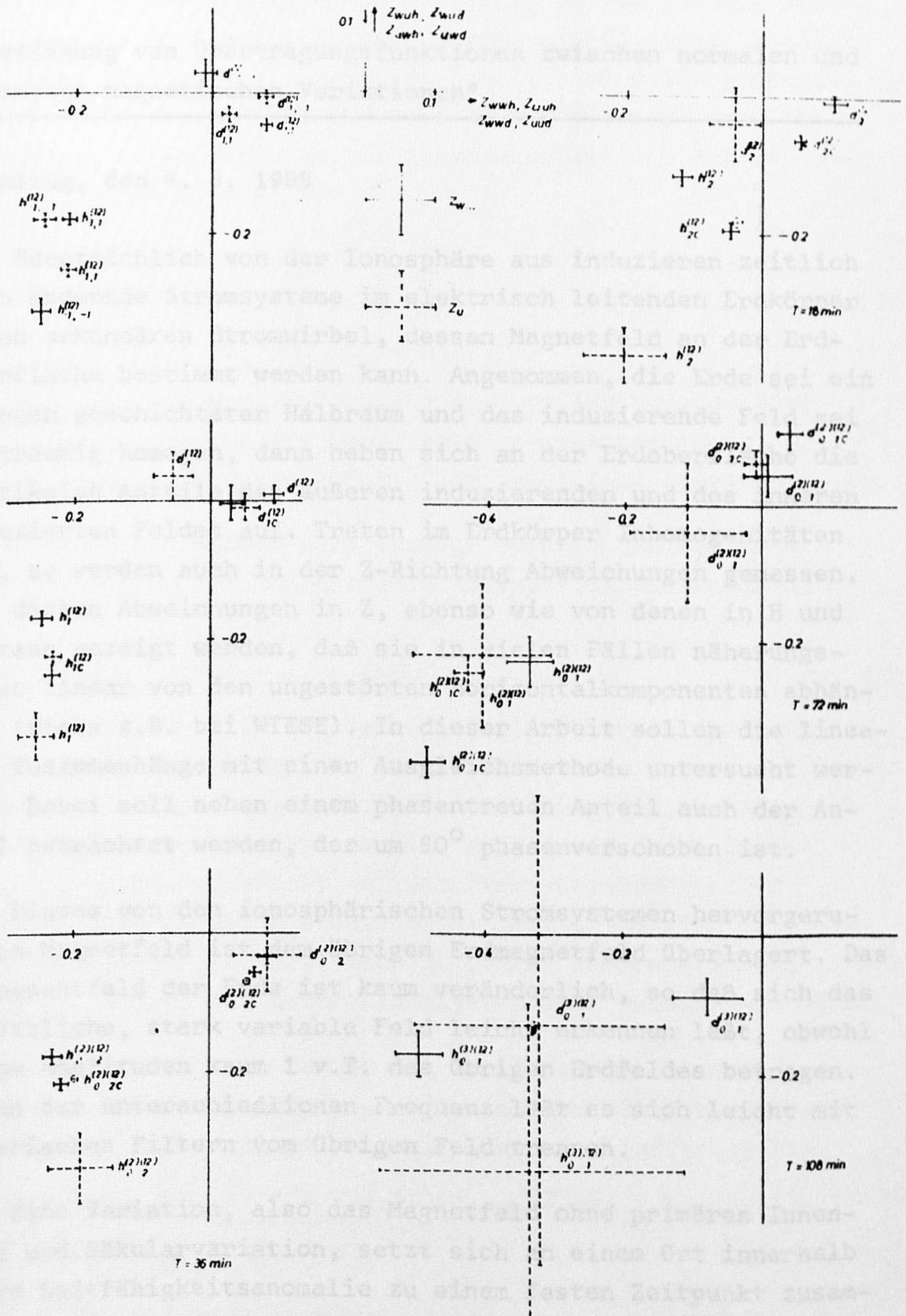


Abb. 6