Dipl.-Geophys. V. HAAK, München

Original-Diskussionsbeitrag zu den Vorträgen von R. WINTER, H.-E. NAGEL, E. VOELZ und U. HUNSCHE

Bei der Anwendung statistischer Verfahren ist die Anzahl von Freiheitsgraden eine wichtige Größe (z.B. bei der Berechnung der mittleren quadratischen Streuung, Beurteilung der berechneten Kohärenz, Größe der statistischen Sicherheit).

Allgemein gilt hier: Die Anzahl der Freiheitsgrade ist gleich der kleinsten Anzahl von äquidistanten Werten, die notwendig ist, um die Zeitfunktion $X(t)$ durch eine Zeitreihe $X(t_1)$, $X(t_2)$,.. $X(t_N)$ eindeutig zu ersetzen. Diese Werte sind dann statistisch unabhängig voneinander. Hier soll kurz ein Weg gezeigt werden, wie man die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt, wenn auf die Original-Zeitreihe numerische Filterverfahren angewandt wurden.

1) Vor der Filterung: Die vorgebene Zeitfunktion $X(t)$ mit der endlichen Länge T wird mit einem Abstand Δt digitalisiert. Δt richtet sich nach der höchsten, erkennbaren Frequenz f_{max} der Zeitfunktion. Nach BLACKMAN und TUKEY (1959), S. 149, soll gelten:

$$f_N \approx 3/2\ f_{max}\ ;\ f_N = \text{Nyquistfrequenz};\ \rightarrow \Delta t = \frac{1}{2 \cdot f_N} = \frac{1}{3 \cdot f_{max}}\ .$$

Das heißt: Um die Zeitfunktion $X(t)$ mit endlicher Länge T eindeutig durch eine Zeitreihe X_1, X_2,...X_N zu ersetzen, sind $N = \frac{T}{\Delta t} = 3 \cdot T \cdot f_{max}$ Werte notwendig. Eine größere Anzahl von Werten würde keine zusätzliche Information liefern. Diese N notwendigen Werte nennt man den Freiheitsgrad (hier der ungefilterten Zeitreihe).

2) Nach der Filterung: Die gleiche Betrachtungsweise kann nun auf die gefilterte Zeitreihe angewandt werden. Aufgrund der Filterdurchlaßfunktionen ist f_{max} und f_N kleiner geworden.

Beispiel: $T = 3600$ sec, $f_{max} = 1/90$ cps (aus der Beobachtung).

Damit folgt: $f_N = 1/60$ cps $\rightarrow \Delta t = 30$ sec, $N = 120$ = Freih. grad.

Wird nun auf diese Zeitreihe das einfache Filter W mit n = 12 angewandt, dann filtert W_1 (12·30 = 360 sec) eine Zeitreihe heraus, deren Periode um 360 sec liegt. Welchen Freiheitsgrad hat nun die gefilterte Zeitreihe? Hierzu muß man die Nyquistfrequenz abschätzen, und zwar unter Berücksichtigung der Filterdurchlaßfunktion. Ist man vorsichtig (unter Berücksichtigung der hohen Seitenbänder!), so kann man annehmen, daß Variationen mit Perioden größer als 120 sec nicht mehr durch das Filter kommen.

f_{max} = 1/120 cps,→ f_N = 1/80 cps→Δt = 40 sec→N'=90=Freiheitsgrad.

Für ein Filter mit steileren Flanken und mit verschwindenden Seitenbändern (z.B. WW) sei angenommen:

f_{max} = 1/240 cps → f_N = 1/160 cps→Δt= 80 sec→N''=45=Freiheitsgrad.

Das letzte Resultat würde bedeuten, das e i n e ganze Schwingung etwa 4 Freiheitsgrade hat. Für ein sicheres Ergebnis sollen 20 bis 40 Freiheitsgrade erreicht werden, was gleichbedeutend wäre mit 5 bis 10 ganzen Schwingungen.

<u>Literatur zur exakten Berechnung:</u>

BLACKMAN und TUKEY: Measurement of Powerspectra. Dover 1959.

GILOI, W.: Simulation und Analyse stochastischer Prozesse. R. Oldenbourg Verlag, München-Wien 1967.