Dipl.-Phys. P. WEIDELT, Göttingen

"Ein Verfahren zur direkten Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung in einem horizontal geschichteten Leiter"

Mittwoch, den 5. 3. 1969

1. Einleitung

Das am besten definierte Problem im Bereich der erdmagnetischen Tiefensondierung ist die Ermittlung der Leitfähigkeitsverteilung eines horizontal geschichteten Leiters aus dem Frequenzverhalten des an seiner Oberfläche gemessenen elektromagnetischen Feldes. Im folgenden wird ein Formalismus beschrieben, mit dessen Hilfe sich direkt, d.h. mit einem Minimum an Modellvorstellungen, die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund bestimmen läßt. Die Aufgabe läßt sich so formulieren: In einem Leiter, dessen Leitfähigkeit σ nur von der Tiefe z abhänge, induziere ein zeitlich variables homogenes äußeres Magnetfeld elektrische Ströme. Gegeben sei dann die Oberflächenimpedanz des Leiters, d.h. das Verhältnis von elektrischem zu magnetischem Feld an der Oberfläche (möglichst mit Betrag und Phase), als Funktion der Frequenz ω des äußeren Feldes. Gesucht ist die Leitfähigkeitsfunktion $\sigma(z)$. (Ein h o m o g e n e s äußeres Feld wurde nur zur Vereinfachung der Darstellung vorausgesetzt. Im Prinzip kann ein äußeres Feld beliebiger, aber bekannter Inhomogenität benutzt werden.)

Die ersten Ansätze zur exakten Lösung der gestellten Aufgabe stammen von SIEBERT (1964) und in modifizierter Form von CHETAEV (1966). In beiden Arbeiten führt der Lösungsweg über Reihendarstellungen, die nur für höhere Frequenzen konvergent (oder zumindest semikonvergent) sind. Durch die Beschränkung auf hohe Frequenzen ist jedoch auch die "Tiefenwirkung" der vorgeschlagenen Verfahren begrenzt. - Die im folgenden verwendete Methode ist im Kern nicht neu. Sie wurde um 1950 von den beiden russischen Mathematikern I.M. GEL'FAND und B.M. LEVITAN als Bestandteil einer weiterreichenden Theorie für ein verwandtes

Umkehrproblem in der quantenmechanischen Streutheorie entwickelt. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Arbeiten findet sich bei FADDEYEV (1963) und NEWTON (1966). Neu ist lediglich die Anpassung der bereits vorhandenen Theorie an die Problemstellung der Tiefensondierung.

2. Die analytischen Eigenschaften der Impedanz

Da im folgenden wesentlich von dem analytischen Verhalten der Impedanz in der komplexen ω-Ebene Gebrauch gemacht wird, seien einige Bemerkungen hierüber an den Anfang gestellt. Macht man für die nicht verschwindenden Komponenten des elektrischen Feldes E_y bzw. magnetischen Feldes H_x die Ansätze

$$E_y(z,t) = \mathrm{Im}\,\{E(z)\, e^{i\omega t}\} \text{ bzw. } H_x(z,t) = \mathrm{Im}\,\{H(z) e^{i\omega t}\},$$

so ergeben sich aus den Maxwellschen Gleichungen und dem Ohmschen Gesetz für die beiden komplexen Amplituden E(z) und H(z) die Gleichungen

$$H'(z) = \sigma(z)\, E(z)\ , \qquad (1)$$

$$E'(z) = i\omega\mu_o\, H(z)\ . \qquad (2)$$

(Der Strich bedeutet die Ableitung nach dem Argument.) Daraus folgt als Grundgleichung für das elektrische Feld

$$E''(z) = i\omega\mu_o\sigma(z)\, E(z). \qquad (3)$$

Multipliziert man (3) mit der konjugiert-komplexen Lösung $E^*(z)$ und integriert über z von 0 bis ∞, so erhält man nach partieller Integration des linken Terms

$$E'(\infty)E^*(\infty) - E'(0)E^*(0) = \int_0^\infty \{|E'(z)|^2 + i\omega\mu_o\sigma(z)|E(z)|^2\}\, dz. \qquad (4)$$

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß die Differentialgleichung (3) stets im Unendlichen verschwindende Lösungen besitzt, wenn $\sigma(z)$ nicht stärker als mit z^{-2} abnimmt. Dabei verschwinden die Lösungen nicht nur für reelles ω, sondern für alle ω in der komplexen Ebene mit Ausnahme der positiv-imaginären Achse. Hier oszillieren sie, ohne daß sich ihre Amplitude zu vermindern braucht. Da die rechte Seite von (4) für kein ω außerhalb der positiv-imaginären Achse verschwinden kann, können hier auch weder E(0) noch E'(0) gleich null werden. Die etwas modifizierte Impedanz

$$Z(\omega) = - \frac{E(0,\omega)}{i\omega\mu_o\, H(0,\omega)} = - \frac{E\ (0,\omega)}{E'(0,\omega)} \tag{5}$$

ist somit außerhalb der positiv-imaginären Achse eine analytische Funktion von ω; sie besitzt hier auch keine Nullstellen. Auf der positiv-imaginären Achse jedoch liegen Pole oder Verzweigungspunkte. Springt z.B. die Leitfähigkeit in der Tiefe $z = d$ von $\sigma = \sigma_o$ auf $\sigma = \infty$, so ist $Z(\omega) = (i\omega\mu_o\sigma_o)^{-1/2} \tanh (\sqrt{i\omega\mu_o\sigma_o} \cdot d)$. Die Impedanz besitzt hier also eine unendliche Reihe von Polen an den Stellen $\omega_n = i(2n-1)^2\pi^2/(4\mu_o\sigma_o d^2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Bei Vergrößerung von d wird die Dichte der Pole auf der positiv-imaginären Achse immer größer, und im Grenzfall eines homogenen Halbraums ($d\to\infty$) sind die Pole durch einen Verzweigungsschnitt von $\omega = 0$ nach $\omega = i\infty$ zu ersetzen.

Das analytische Verhalten der Impedanz hat Konsequenzen, die zwar im folgenden nicht weiter verwendet werden, aber von prinzipiellem Interesse sind. Zunächst lassen sich wegen der Äquivalenz zwischen Funktionentheorie und zweidimensionaler Potentialtheorie vertraute Ergebnisse der Potentialtheorie heranziehen, um Umrechnungsformeln zwischen Real- und Imaginärteil von $Z(\omega)$ anzugeben. Dabei entspricht der Realteil von $Z(\omega)$ der magnetischen Horizontalkomponente, der Imaginärteil der Vertikalkomponente. Die Pole von $Z(\omega)$ entsprechen Linienströmen, der Verzweigungsschnitt ist einem Flächenstrom variabler Stromdichte äquivalent. Das auf der reellen ω-Achse beobachtete "Feld" ist deshalb "äußeren" Ursprungs, d.h. die Quellen liegen in der oberen Halbebene. Aus (4) und (5) folgt $Z(-\omega^*) = Z^*(\omega)$, so daß das Feld überdies eine Symmetrie besitzt (die sich auch schon aus der Lage der Quellen ergibt). Ferner verschwindet das Feld im Unendlichen, da sich die Impedanz für großes $|\omega|$ außerhalb der positiv-imaginären Achse dem Halbraumwert $(i\omega\mu_o\sigma(0))^{-1/2}$ nähert. Für reelles ω gelte $Z(\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$. Dann ist $g(-\omega) = g(\omega)$ und $h(-\omega) = -h(\omega)$. Mit Hilfe der bekannten Umrechnungsformeln für die Komponenten eines äußeren Magnetfeldes (SIEBERT und KERTZ, 1957) ergibt sich

$$g(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(x)}{x-\omega}\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x\,h(x)}{x^2-\omega^2}\,dx ,$$

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\,dx}{x-\omega} = \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{g(x)}{x^2-\omega^2}\,dx .$$

Formeln des obigen Typs sind in vielen Bereichen der Physik gebräuchlich und werden im allgemeinen als D i s p e r s i o n s r e l a t i o n e n bezeichnet. Sie lassen sich auch unter sehr allgemeinen Voraussetzungen aus dem Kausalitätsprinzip ableiten (vgl. etwa LANDAU und LIFSCHITZ 1967, Bd. 8, § 62 und § 67). Auch verschiedene andere in der Tiefensondierung benutzte Funktionen (z.B. die Induktionsfunktionen) gehorchen derartigen Relationen. Die Funktionen müssen jedoch so definiert sein, daß sie für großes $|\omega|$ verschwinden. - Umrechnungsformeln lassen sich ebenfalls für Betrag und Phase der Impedanz angeben. Daß hier Beziehungen bestehen müssen, folgt schon aus der Tatsache, daß sich im Prinzip aus dem scheinbaren Widerstand $\rho_s(\omega) = \omega\mu_o|Z(\omega)|^2$ nach der CAGNIARDschen Methode die Leitfähigkeitsverteilung gewinnen läßt, aus der dann durch Berechnung von E(z) die Phasen bestimmt werden können. Da $Z(\omega)$ außerhalb der positiv-imaginären Achse weder Pole noch Nullstellen hat, ist dort $\log(Z(\omega)\sqrt{i\omega\mu_o\sigma(0)})$ analytisch und verschwindet im Unendlichen. Ist $\log Z = \log|Z| + i\psi$, so gilt

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,\omega + \frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\log(|Z(x)|\sqrt{x})\,\frac{dx}{x^2-\omega^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,\omega + \frac{\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\log\rho_s(x)\,\frac{dx}{x^2-\omega^2} ,$$

$$\log|Z(\omega)| = -\log\sqrt{\omega\mu_o\sigma(0)} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\psi(x)+\frac{\pi}{4})\,\frac{x\,dx}{x^2-\omega^2} .$$

Für den Zusammenhang zwischen Phase ψ und scheinbarem Widerstand ρ_s folgt hieraus noch eine einfache Näherungsformel. Macht man (für $\omega>0$) die Substitution $\omega = c\,e^u$, $x = c\,e^v$ und integriert partiell, so ergibt sich

$$\psi(u)+\pi/4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \rho_s(v) \frac{dv}{\sinh(v-u)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\log \rho_s(v)}{dv} \cdot \log\left|\tanh \frac{v-u}{2}\right| dv$$

Da sich $\log|\tanh x|$ so ähnlich wie eine Deltafunktion verhält, tragen nur die Werte von $d\log \rho_s/dv$ in der Umgebung von $v = u$ wesentlich zum Integral bei. Zieht man deshalb diese Funktion vor das Integralzeichen und beachtet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\tanh \frac{v-u}{2}\right| dv = -\frac{\pi^2}{2}$$

und $$\frac{d\log \rho_s(u)}{du} = \frac{d\log \rho_s(\omega)}{d\log \omega} = -\frac{d\log \rho_s(T)}{d\log T},$$

wobei T die Periode ist, so erhält man als Näherungsformel

$$\psi(T) \approx -\pi/4 \left(1 + \frac{d\log \rho_s(T)}{d\log T}\right).$$

Bei der üblichen doppeltlogarithmischen Auftragung der Sondierungskurve ist $d\log \rho_s/d\log T$ gerade ihre Steigung. (Wenn ϕ der Phasenwinkel zwischen E und H ist, besteht nach Gl. (5) die Beziehung $|\phi| = \pi/2 + \psi$.)-Hat man die Möglichkeit, Real- u n d Imaginärteil der Impedanz über einen größeren Frequenzbereich zu bestimmen,so lassen sich die mit mehr oder weniger großen Meßfehlern behafteten Größen in sich konsistent machen, wenn man nach einer potentialtheoretischen Trennung in inneren und äußeren Anteil nur den äußeren Anteil berücksichtigt, da allein dieser bei exakten Meßwerten vorhanden sein darf. Die neuen Größen $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ bestimmen sich demnach aus den alten Größen g und h durch

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2}\, g(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x h(x)}{x^2-\omega^2}\, dx,$$

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2}\, h(\omega) + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{x^2-\omega^2}\, dx.$$

3. Transformation der Grundgleichung

Anstelle der im vorigen Abschnitt verwendeten Impedanz $Z(\omega)$ wird jetzt zweckmäßig deren Kehrwert

$$a(\omega) = -\frac{E'(0,\omega)}{E\ (0,\omega)} \tag{6}$$

verwendet. Da $Z(\omega)$ außerhalb der positiv-imaginären Achse nullstellenfrei war, besitzt $a(\omega)$ dort keine Pole. Nach Gl. (4) liegt die komplexe Zahl $a(\omega)$ für positive Frequenzen im 1. Quadranten (wenn ein Leitfähigkeitsabfall stärker als z^{-2} ausgeschlossen wird). Das Problem besteht darin, aus der Kenntnis von $a(\omega)$ für positives ω die Leitfähigkeitsfunktion $\sigma(z)$ in Gl. (3) zu rekonstruieren. Die Grundgleichung (3) wird durch die folgenden Substitutionen in eine neue Dgl. transformiert.

$$z \to \quad x = \int_0^z \sqrt{\frac{\sigma(w)}{\sigma(0)}}\, dw\ , \tag{7}$$

$$\sigma(z) \to u(x) = \sqrt[4]{\frac{\sigma(z)}{\sigma(0)}} \qquad (u(0) = 1)\ , \tag{8}$$

$$E(z) \to f(x) = \sqrt[4]{\frac{\sigma(z)}{\sigma(0)}} \cdot \frac{E(z)}{E(0)} \qquad (f(0) = 1)\ , \tag{9}$$

$$\omega \to \quad k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}\ . \tag{10}$$

In Gl. (10) soll der Zweig so ausgewählt werden, daß die ω-Ebene in die rechte k-Halbebene abgebildet wird (die negativ-imaginäre ω-Achse wird dabei zur positiv-reellen k-Achse, die negativ- bzw. positiv-reelle ω-Achse zur Winkelhalbierenden im 4. bzw. 1. Quadranten der k-Ebene). Als neue Dgl. ergibt sich

$$f''(x) = (V(x) + k^2)\ f(x) \tag{11}$$

mit

$$V(x) = u''(x)/u(x)\ . \tag{12}$$

Durch die Vorgabe von $E'(0)/E(0)$ ist auch $f'(0)/f(0) = f'(0)$ bekannt. Denn aus (7)-(9) folgt zunächst

$$b(k) \equiv -f'(0,k) = a(\omega) - \frac{1}{4}\,\sigma'(0)/\sigma(0) = a(\omega) - u'(0). \tag{13}$$

Um die Bedeutung der Größe $u'(0)$ zu erkennen, kann man anstelle von (9) die Substitution $g(x) = - E'(z)/E(z)$ machen. Aus (3) resultiert dann die Riccatische Dgl.

$$g^2(x) = k^2\, u^4(x) + g'(x)\, u^2(x). \tag{14}$$

Sie hat für h o h e Frequenzen in 0. Näherung die Lösung $g(x) = k\, u^2(x)$. In erster Näherung erhält man durch nochmaliges Einsetzen in (14) speziell für $g(0) = a(\omega)$:

$$a(\omega) = k + u'(0) + O(k^{-1}) = \sqrt{i\omega\mu_o\sigma(0)} + u'(0) + O(\omega^{-1/2}). \tag{15}$$

Die Größe $u'(0)$ ist also der Abstand zwischen Real- und Imaginärteil der Funktion $a(\omega)$ für hohe Frequenzen und muß ebenso wie die Oberflächenleitfähigkeit $\sigma(0)$ aus dem asymptotischen Verhalten von $a(\omega)$ bestimmt werden. Im übrigen steht $u'(0)$ in engem Zusammenhang mit der Steigung einer CAGNIARDschen Sondierungskurve für kurze Perioden.

Da $a(\omega)$ wegen (6) und (4) der Symmetriebeziehung $a(-\omega^*)=a^*(\omega)$ genügt (d.h. an zwei symmetrisch zur imaginären ω-Achse gelegenen Punkten nimmt $a(\omega)$ zueinander konjugiert-komplexe Werte an), erfüllt die in (13) definierte Funktion $b(k)$ wegen (10) die Symmetriebeziehung $b(k^*) = b^*(k)$. Außerdem überträgt sich das analytische Verhalten von $a(\omega)$ auf $b(k)$, so daß $b(k)$ rechts von der imaginären k-Achse (auf der möglicherweise noch Pole oder Verzweigungspunkte liegen) analytisch ist.- Bei der im nächsten Abschnitt erfolgenden Inversion wird $V(x)$ aus $b(k)$ ermittelt werden. Ist $V(x)$ bekannt, so läßt sich $u(x)$ wegen (12) aus der Dgl.

$$u''(x) = V(x)\, u(x) \tag{16}$$

als Anfangswertproblem mit $u(0) = 1$ und bekanntem $u'(0)$ berechnen. Aus $u(x)$ ergibt sich dann mit (8) und (7) die Leitfähigkeit $\sigma(z)$ in der Parameterdarstellung

$$\sigma(z) = \sigma(0)\, u^4(x)\,, \tag{17}$$

$$z = \int_o^x \frac{dw}{u^2(w)} \tag{18}$$

4. Die Inversion

Die bisherigen Abschnitte dienten nur zur Vorbereitung der eigentlichen Inversion, die nunmehr unter wesentlicher Verwendung der Ideen von GEL'FAND und LEVITAN durchgeführt werden soll. Gegeben seien also entlang der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten der k-Ebene (entsprechend positivem ω) die Anfangswerte $f(0,k) = 1$ und $f'(0,k) = - b(k)$ einer für $x \to \infty$ verschwindenden Funktion $f(x,k)$, die der Dgl.

$$f''(x,k) = (V(x) + k^2)\, f(x,k) \tag{19}$$

= (11

genügt. Gesucht ist die reelle Funktion $V(x)$ für $x > 0$.

Zunächst werden zwei spezielle Lösungen $f_+(x,k)$ und $f_-(x,k)$ von (19) konstruiert, die die Anfangsbedingungen

$$f_\pm(0,k) = 1 \;,\; f_\pm'(0,k) = \pm k \tag{20}$$

erfüllen. Im Falle $V(x) \equiv 0$ sind dies gerade die Funktionen

$$f_\pm(x,k) = e^{\pm kx} . \tag{21}$$

Wenn $V(x) \not\equiv 0$ ist, existiert ein Integraloperator, der die Funktionen (21) in eine Lösung von (19) mit den gleichen Anfangsbedingungen transformiert. Er hat hier die Gestalt

$$f_\pm(x,k) = e^{\pm kx} + \int_{-x}^{+x} A(x,w)\, e^{\pm kw} dw . \tag{22}$$

Dabei ist $A(x,w)$ eine reelle Funktion, die nicht von der "Frequenz" k, sondern nur von den beiden Ortskoordinaten x und w abhängt und lediglich für $0 \leq |w| \leq x$ nicht verschwindet. Damit die zweite Anfangsbedingung in (20) erfüllt werden kann, muß stets $A(0,0) = 0$ sein. Seinem Wesen nach hängt $A(x,w)$ eng mit $V(x)$ zusammen. Um diese Beziehungen aufzudecken setzt man etwa $f_+(x,k)$ aus (22) in (19) ein. Integriert man den dann auf der rechten Seite von (19) stehenden Term

$$k^2 \int_{-x}^{+x} A(x,w)\, e^{kw} dw$$

zweimal partiell und beachtet die Identität

$$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{w=\pm x} \pm \left.\frac{\partial A}{\partial w}\right|_{w=\pm x} = \frac{d}{dx} A(x,\pm x) \;,$$

so ergibt sich nach Zusammenfassung aller Terme

$$e^{kw} \left\{ 2 \frac{d}{dx} A(x,x) - V(x) \right\} + 2\, e^{-kx} \frac{d}{dx} A(x,-x) +$$

$$+ \int_{-x}^{+x} \left\{ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} - V(x)\, A \right\} e^{kw} dw = 0 \, . \qquad \text{(2}$$

Da A unabhängig von k sein soll, ergeben sich wegen $A(0,0) = 0$ die drei hinreichenden Bedingugen

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} = V(x)\, A \, , \qquad \text{(2}$$

$$A(x,x) = \frac{1}{2} \int_0^x V(w)\, dw \, , \qquad \text{(2}$$

$$A(x,-x) = 0 \, . \qquad \text{(2}$$

Diese Bedingungen bestimmen A eindeutig (Standardbedingungen für eine hyperbolische Dgl.). Von praktischer Bedeutung für das Weitere ist allein Gl.(25), und zwar in der Form

$$V(x) = 2 \frac{d}{dx} A(x,x) \, . \qquad \text{(2}$$

Die verwirklichte Lösung $f(x,k)$ von (19) muß als Linearkombination der beiden linear unabhängigen Lösungen $f_+(x,k)$ und $f_-(x,k)$ darstellbar sein. Man schreibt sie zweckmäßig in der Gestalt

$$f(x,k) = f_-(x,k) + C(k)\, (f_+(x,k) - f_-(x,k)) \qquad \text{(2}$$

mit $\quad C(k) = \frac{1}{2}\, (1 - b(k)/k) \, , \qquad \text{(2}$

oder unter Verwendung von Gl. (22):

$$f(x,k) - e^{-kx} = \int_{-x}^{+x} A(x,w)\, e^{-kw} dw + C(k)\, (e^{kx} - e^{-kx}) +$$

$$+ C(k) \int_{-x}^{+x} A(x,w)\, (e^{kw} - e^{-kw})\, dw \, . \qquad \text{(3}$$

Multipliziert man nun Gl. (30) mit

$$\frac{1}{2\pi i}\, e^{ky} \, , \quad |y| \leq x$$

und integriert über k entlang eines Integrationsweges unmittelbar rechts neben der imaginären Achse, so entstehen aus den vier Termen von (30) vier Integrale, die hier nur symbolisch durch

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \tag{31}$$

angedeutet werden sollen, wobei die Zuordnung offensichtlich ist

Die Auswertung der Integrale ergibt Folgendes:

I_1: Da $E(0,\omega)$ außerhalb der positiv-imaginären Achse keine Nullstellen aufweist, hat nach Gl. (9) auch $f(x,k)$ im Innern der rechten k-Halbebene keine Pole. Weil f sich überdies für großes $|k|$ wie e^{-kx} verhält und $|y| \leq x$ ist, kann der Integrationsweg in der rechten k-Halbebene durch einen großen Halbkreis geschlossen werden. Da der Integrand im Innern analytisch ist, gilt

$$I_1 = 0 .$$

I_2: Mit Hilfe der "zweiseitigen" Laplace-Transformation

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{ky}\, dk \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{-kw}\, dw$$

ergibt sich sofort

$$I_2 = A(x,y) .$$

I_3: Die neuen Beobachtungsdaten $C(k)$ werden im folgenden in Form der Ortsfunktion

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} C(k)\, e^{kx}\, dk \,, \quad \varepsilon > 0 \tag{32}$$

verwendet. Wegen $C(k^*) = C^*(k)$ ist $G(x)$ reell. Außerdem verschwindet $G(x)$ für $x \leq 0$, da dann der Integrationsweg wieder durch einen großen Halbkreis in der rechten Halbebene geschlossen werden kann und da $C(k)$ in seinem Innern analytisch ist. Zur Berechnung von $G(x)$ wird $C(k)$ in der Nähe der imaginären Achse benötigt, gegeben ist es jedoch nur auf der Winkelhalbierenden im 1. (und 4.) Quadranten. Wie sich diese Schwierigkeit überwinden läßt, soll später gezeigt werden.- Im Integral I_3 verschwindet das Teilintegral über dem Term mit e^{-kx}, da der Integrationsweg in der rechten Halbebene geschlossen werden kann. Daher ist

$$I_3 = G(x + y) .$$

I_4: Mit Hilfe des Faltungssatzes für die zweiseitige Laplace-Transformation findet man (wegen $G(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $A(x,w) = 0$ für $|w| > x$):

$$I_4 = \int_{-y}^{x} \{A(x,w) - A(x,-w)\} G(y + w)\, dw =$$

$$= \int_{-x}^{+x} A(x,w) \{ G(y + w) - G(y - w)\}\, dw.$$

Mit diesen Ergebnissen lautet Gl. (31) explizit

$$A(x,y) + G(x+y) + \int_{-x}^{+x} A(x,w)\{G(y+w) - G(y-w)\}dw = 0, |y| \leq x. \qquad (33)$$

Dies ist eine lineare Integralgleichung zur Bestimmung der Funktion $A(x,y)$. Die Tiefenkoordinate x spielt in der Integralgleichung nur die Rolle eines Parameters; die eigentlichen Variablen sind y und w. Die Integralgleichung muß für jedes x erneut gelöst werden (im allgemeinen durch Zerlegung in ein lineares Gleichungssystem, zweckmäßig unter Benutzung der Gaußschen Integrationsmethode). Benötigt wird jeweils nur die Größe $A(x,x)$, aus der sich mit Hilfe von (27) $V(x)$ gewinnen läßt. Die Leitfähigkeit erhält man dann unter Verwendung von Gl. (16) - (18).

Wie schon erwähnt, läßt sich $G(x)$ in der Praxis nicht nach Gl. (32) berechnen, da $C(k)$ nur auf der Winkelhalbierenden bekannt ist, und eine Deformation des Integrationsweges für $x > 0$ nicht möglich ist. Die Umkehrung von (32) liefert

$$C(k) = \int_{0}^{\infty} G(x)\, e^{-kx} dx , \qquad (34)$$

also eine Laplacesche Integralgleichung für $G(x)$. Ein Weg zur numerischen Bestimmung von $G(x)$ ist die Zerlegung der Integralgleichung (34) in ein lineares Gleichungssystem und Lösung desselben nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $G(x)$ eine reelle Funktion sein muß. Es läßt sich jedoch auch eine geschlossene Lösung angeben, bei der nur die Werte von $C(k)$ auf der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten benötigt werden (vgl. TITCHMARSH, 1948, p. 316). Zu diesem Zweck multipliziert man (34) mit $k^s, 0<\mathrm{Re}(s)<1$ und integriert über k entlang der reellen Achse. Das linke Integral

$$H(s) \equiv \int_0^\infty C(k)\, k^s\, dk \tag{35}$$

existiert, da der Integrand sich für $k \to 0$ wie k^{s-1} und für $k \to \infty$ wie k^{s-2} verhält. Im rechten Integral läßt sich die Integrationsfolge vertauschen. Unter Verwendung von

$$\int_0^\infty k^s\, e^{-kx}\, dk = x^{-s-1}\, \Gamma(s+1)$$

und der hier etwas modifizierten Mellin-Transformation

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\, x^{-s-1} dx\ ,\quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(s) x^s\, ds, 0 < C < 1$$

ergibt sich deshalb als Lösung

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{H(s)}{\Gamma(s+1)}\, x^s\, ds. \tag{36}$$

Die Funktion $H(s)$ ist nun aus Beobachtungsdaten direkt zu ermitteln, denn für $\mathrm{Im}(s) \geq 0$ kann der Integrationsweg in Gl.(35) so deformiert werden, daß er entlang der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten verläuft, wo $C(k)$ bekannt ist. Wenn $\mathrm{Im}(s) \leq 0$ ist, wird der Integrationsweg entlang der Winkelhalbierenden im 4. Quadranten geführt, wo $C(k)$ konjugiert-komplexe Werte annimmt. Es gilt $H(s^*) = H^*(s)$.- Damit ist die Lösung der Umkehraufgabe vollständig.

5. Beispiel

An einem relativ einfachen Beispiel soll nun die Anwendung des oben entwickelten Formalismus gezeigt werden. Gegeben sei (analytisch oder numerisch)

$$a(\omega) \equiv - E'(0,\omega)/E(0,\omega) = b + \sqrt{a^2 + i\omega\mu_o\sigma_o} \,. \tag{37}$$

Gesucht ist $\sigma(z)$.- Zunächst müssen aus dem asymptotischen Verhalten von $a(\omega)$ für großes ω die Größen $\sigma(0)$ und $u'(0)$ ermittelt werden. Es ist

$$a(\omega) = \sqrt{i\omega\mu_o\sigma_o} + b + O(\omega^{-1/2}).$$

Ein Vergleich mit (15) ergibt daher

$$\sigma(0) = \sigma_o \,, \; u'(0) = b.$$

Nach (13), (10) und (29) gilt

$$b(k) = a(\omega) - u'(0) = \sqrt{a^2 + i\omega\mu_o\sigma_o} = \sqrt{a^2 + k^2} \,,$$

$$C(k) = \frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{a^2 + k^2}\,/k).$$

(Wenn $a(\omega)$ als Beobachtungsgröße numerisch vorgegeben ist, sind die beiden obigen Funktionen nur für k-Werte auf der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten sinnvoll. Man wird dann etwa durch $k = (1+i)k'$ eine reelle Variable $k' = \sqrt{\omega\mu_o\sigma(0)/2}$ einführen.) Der nächste Schritt ist die Bestimmung von $G(x)$. Bei numerischen Ausgangsdaten kann der Weg über die Hilfsfunktion $H(s)$, Gl. (35), führen, wobei jedoch entlang der Winkelhalbierenden integriert wird. Aus $H(s)$ wird dann nach Gl. (36) $G(x)$ berechnet. Wenn aber die Ausgangsgrößen einfache analytische Ausdrücke sind, gelangt man durch direkte Verwendung der Definitionsgleichung (32) schneller zum gleichen Ziel. Im vorliegenden Fall legt man zur Auswertung von (32) einen Verzweigungsschnitt von $k = -ia$ nach $k = +ia$, ergänzt den Integrationsweg durch einen großen Halbkreis in der linken Halbebene und zieht dann den Integrationsweg um den Verzweigungsschnitt zusammen. Zweckmäßig wird dabei zuerst $G'(x)$ berechnet. Das Endergebnis ist

$$G(x) = -\frac{a}{2}\int_0^{ax} J_1(w)\,\frac{dw}{w} \,, \; x \geq 0 \,,$$

wobei J_1 die Besselfunktion 1. Ordnung ist. Nun muß die Integralgleichung (33) gelöst werden, und zwar im allgemeinen durch Zerlegung in ein lineares Gleichungssystem. In diesem Spezialfall läßt sich die Lösung auch analytisch angeben:

$$A(x,y) = \frac{a}{2} \frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} \; I_1 \left(a \sqrt{x^2 - y^2}\right), \quad |y| \leq x .$$

Dabei ist I_1 die Besselfunktion 1. Ordnung mit rein imaginärem Argument ($I_1(x) = -iJ_1(ix)$). Von der Lösung interessiert nur $A(x,x) = \frac{1}{2} a^2 x$. Mit Gl. (27) ergibt sich deshalb

$$V(x) = 2 \frac{d}{dx} A(x,x) = a^2 .$$

(Zur Kontrolle kann man dies Ergebnis in die Dgl. (19) einsetzen. Die im Unendlichen verschwindende Lösung ist

$$f(x,k) = e^{-\sqrt{a^2 + k^2}\, x} .$$

Deshalb ist $b(k) = - f'(0,k) = \sqrt{a^2 + k^2}$.) Mit $u'(0) = b$ ergibt dann die Integration von (16)

$$u(x) = \cosh ax + (b/a) \sinh ax ,$$

so daß man für die Leitfähigkeit mit (17) und (18) die Parameterdarstellung

$$\sigma(z) = \sigma_o \; (\cosh ax + (b/a) \sinh ax)^4 ,$$

$$z = \frac{\sinh ax}{a \cosh ax + b \sinh ax}$$

erhält. Wenn die Ausgangsgrößen in analytischer Form vorgegeben waren, läßt sich jetzt der Parameter x eliminieren. Das Ergebnis ist

$$\sigma(z) = \frac{\sigma_o}{(1 - (b+a)\, z)^2 \; (1 - (b-a)\, z)^2} \tag{38}$$

Schließlich kann man auch noch E(z) berechnen. Mit Gl. (9) ergibt sich

$$E(z)/E(0) = f(x)/u(x) = e^{-\sqrt{a^2+k^2}\, x}/u(x) =$$

$$= \sqrt{(1 - (b+a)z)\;(1 - (b-a)z)} \; \frac{1 - (b+a)z}{1 - (b-a)z}^{\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{2a}} .$$

E(z) besitzt die vorgegebene Impedanz (37) und erfüllt die Grundgleichung (3), wenn $\sigma(z)$ durch (38) gegeben ist.

6. Schlußbemerkungen

Das geschilderte Verfahren stellt erstmals die exakte Lösung einer Umkehraufgabe aus dem Bereich der Tiefensondierung dar. Leider jedoch ist der praktische Wert der Lösung sehr gering. Außer der Tatsache, daß die Methode schwerfällig ist und den Einsatz einer elektronischen Rechenmaschine erforderlich macht, sind deren Anforderungen an die Genauigkeit der Meßwerte so groß, daß sie in der Praxis nicht befriedigt werden können. Aufgrund numerischer Experimente ist eine Genauigkeit der Meßdaten von etwa zwei Stellen zu fordern, um zuverlässige Ergebnisse zu erzielen. Da die Voraussetzungen der Theorie in der Praxis durch laterale Leitfähigkeitsänderungen und äußere Felder unbekannter Inhomogenität verletzt werden, streuen die Meßwerte so stark, daß die gewünschte Genauigkeit kaum erreichbar ist.

Den Gegebenheiten der Praxis ist deshalb die von SCHMUCKER vorgeschlagene einfache Näherungsmethode (vgl. den folgenden Beitrag) weitaus besser angepaßt. Berechnet man etwa für ein vorgegebenes Leitfähigkeitsmodell die Impedanz und gewinnt daraus mit Hilfe des Verfahrens von SCHMUCKER die Leitfähigkeit näherungsweise zurück, so stimmt die Impedanz dieser Leitfähigkeitsverteilung mit der vorgegebenen Impedanz bis auf wenige Prozente überein (wie an konkreten Beispielen ermittelt wurde), obgleich zwischen den beiden Leitfähigkeitsfunktionen größere Unterschiede auftreten. In der Praxis wird deshalb nicht zwischen der ersten Näherung und der exakten Verteilung unterschieden werden können, da deren Impedanzen im Rahmen der Meßgenauigkeit übereinstimmen. Das Verfahren von SCHMUCKER schöpft daher den Informationsgehalt der Impedanz bereits voll aus.- Nur wenn Meßdaten geringer Streuung über einem größeren Periodenbereich vorliegen, so daß man erhöhte Ansprüche an die Genauigkeit der Leitfähigkeitsbestimmung stellen darf, ist die Benutzung des aufwendigen Formalismus der exakten Inversion zu empfehlen.

Literatur:

CHETAEV, D.N.: On the Inverse Problem in the Theory of Magnettelluric Prospecting. Bull. (Izv.) Acad. Sci. USSR, Earth Physics, No. 9, 1966.

FADDEYEV, L.D.: The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering. J. Math. Phys. 4 (1963), p. 72.

LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 8 . Berlin 1967.

NEWTON, R.G.: Scattering Theory of Waves and Particles. New York 1966.

SIEBERT, M.: Ein Verfahren zur unmittelbaren Bestimmung der vertikalen Leitfähigkeitsverteilung im Rahmen der erdmagnetischen Tiefensondierung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., Jahrg. 1964, Nr. 2.

SIEBERT, M. und W. KERTZ: Zur Zerlegung eines lokalen erdmagnetischen Feldes in äußeren und inneren Anteil. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., Jahrg. 1957, Nr. 5.

TITCHMARSH, E.C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals (2. Aufl.). Oxford 1948.