

Dr. U. SCHMUCKER, Göttingen

"Zwei neue Verfahren zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes als Funktion der Tiefe aus erdmagnetischen und erd-elektrischen Beobachtungen"

---

Mittwoch, den 5. 3. 1969

Die natürlichen Variationen des erdmagnetischen Feldes und die mit ihnen verbundenen Variationen des erdelektrischen Feldes unterliegen beim Durchdringen der elektrisch leitenden Schichten des Erdinnern einer induktiven Abschirmung. Dieser Skin-Effekt äußert sich an der Erdoberfläche in bestimmten Beziehungen zwischen den Komponenten der Variationsfelder als Funktion des Ortes und der Zeit. Es sei nun die Aufgabe gestellt, aus dem Kenntnis dieser Beziehungen innerhalb eines begrenzten Gebietes  $G$  die Verteilung der inneren Widerstandsverteilung abzuleiten. Dabei sei vorausgesetzt, daß die Wirkung von lateralen Inhomogenitäten durch eine gewisse räumliche Glättung der Variationsfelder ausgeschaltet worden ist. Die zu bestimmende Widerstandsverteilung  $\rho(z)$  in  $G$  ist also als reine Funktion der Tiefe  $z$  anzusehen.

Die Variationsfelder seien 2-dimensional in Richtung der  $y$ -Achse von rechtwinkligen  $(x, y, z)$ -Koordinaten und beobachtet in der Ebene  $z = 0$  über einem leitfähigen unteren Halbraum;  $z$  ist positiv nach unten. Das magnetische Variationsfeld habe die Komponenten  $H(x,t)$  und  $Z(x, t)$  in Richtung von  $x$  und  $z$ , das elektrische Feld  $E(x, t)$  sei orthogonal in Richtung von  $y$ . Die Felder sind in ihren Komponenten einer zeitlichen und räumlichen Fourierzerlegung unterworfen worden und somit durch ein Spektrum von Wellungen der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Wellenzahl  $k$  dargestellt:

$$H(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_H(\omega, k) \cdot e^{i(kx + \omega t)} dk d\omega \quad (1)$$

mit entsprechenden Bezeichnungen für  $E$  und  $Z$ . Die Beziehungen zwischen  $E$ ,  $H$  und  $Z$  sind unter den genannten Voraussetzungen

linear und im  $(\omega, k)$ -Bereich durch die linearen Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} c(\omega, k) &= \frac{a_E(\omega, k)}{i\omega a_H(\omega, k)} \\ T(\omega, k) &= \frac{a_Z(\omega, k)}{i a_H(\omega, k)} \end{aligned} \quad (2)$$

als komplexe Funktionen der Frequenz, Wellenzahl und Widerstandsverteilung ausdrückbar. Hierbei hat die Übertragungsfunktion  $c(\omega, k)$  der magneto-tellurischen Impedanz die Dimension einer Länge (E in millivolt/km, H in Gamma, c in km) und ist ein direktes Maß für die Eindringtiefe des Variationsfeldes in den unteren Halbraum.

Aus der elektromagnetischen Grundgleichung  $\text{rot } \underline{E} = -\mu \dot{\underline{F}}$  ( $\mu$  : Permeabilität,  $\dot{\underline{F}}$  : Zeitliche Ableitung des magnetischen Feldes) folgt mit

$$T(\omega, k) = k \cdot c(\omega, k), \quad (3)$$

daß der Zusammenhang zwischen E und Z unabhängig von der inneren Widerstandsverteilung ist und allein von der räumlichen Struktur der Variationsfelder bestimmt wird. Ferner gilt

$$T(\omega, k) = \frac{1 - S(\omega, k)}{1 + S(\omega, k)} \quad (4)$$

mit  $S(\omega, k)$  als Verhältnis von innerem zu äußerem Anteil des in der Ebene  $z = 0$  beobachteten magnetischen Variationsfeldes.

Wir beginnen mit der Beschränkung auf den CAGNIARDschen Fall. Sie besagt, daß in dem betrachteten Frequenzbereich die Eindringtiefe klein ist gegenüber der räumlichen Inhomogenität der Variationsfelder, also  $|c \cdot k| \ll 1$  oder im  $(x, t)$ -Bereich  $Z \ll H$ . Unter dieser Voraussetzung ist  $c(\omega, k)$  unabhängig von  $k$  und es genügt, das nunmehr ortsunabhängige Verhältnis der zeitlichen Fourieramplituden von E und H zu betrachten. Bezeichnet man sie mit  $A_E$  und  $A_H$ , setzt man also

$$H(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_H(\omega, x) e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

so erhält man in

$$C(\omega) = \frac{A_E(\omega, x)}{i\omega A_H(\omega, x)} = z^*(\omega) - \frac{i}{2} p^*(\omega) \quad (6)$$

eine Übertragungsfunktion, die die exakte Bedeutung einer "Schwerpunktstiefe" für das induzierte Stromsystem hat. Ist nämlich  $A_J(\omega, z)$  die Fourieramplitude der induzierten Stromdichte  $J(t, z)$ , so gilt

$$\int_0^{\infty} A_J(\omega, z) \cdot [C(\omega) - z] dz = 0$$

für jede beliebige Verteilung  $\rho(z)$ . Diese Bedeutung von  $C(\omega)$  hat WEIDELT durch partielle Integration direkt aus der CAGNIARDschen Näherung der Ausgangsgleichung,  $d^2E/dz^2 = 4\pi J$ , ableiten können.

An einfachen Modellen läßt sich zeigen, daß das Argument von  $C$  durch die Änderung von  $\rho(z)$  mit der Tiefe bestimmt wird. Befindet sich nämlich der Schwerpunkt  $z^*$  der  $0^\circ$ -Phase des induzierten Stromsystems in einer schlecht leitenden Zone unterhalb eines guten Leiters, so liegt das Argument von  $C$  zwischen  $0$  und  $-45^\circ$ . Liegt dagegen  $z^*$  in einer Zone erhöhter Leitfähigkeit unterhalb einer schlecht leitenden Bedeckung, so liegt  $\arg \{C\}$  zwischen  $-45^\circ$  und  $-90^\circ$ . Eine allgemein gültige Beziehung zwischen dem Gradienten von  $\rho$  als Funktion der Tiefe und der Phase von  $C(\omega)$  konnte aber noch nicht formuliert werden.

CAGNIARD (1953) definiert mit Hilfe des Modulus von  $C(\omega)$  einen "scheinbaren spezifischen Widerstand"  $\rho_a(\omega)$ , der als Funktion der Frequenz in gewisser und nicht immer leicht durchschaubaren Weise den wahren Widerstand  $\rho(z)$  als Funktion der Tiefe wiedergibt. Bezeichnet  $p_a = \sqrt{2} |C|$  die zugehörige scheinbare Skin-Tiefe, so ist

$$\rho_a(\omega) = 2\pi\omega p_a^2(\omega). \quad (7)$$

Die Interpretation erfolgt durch einen Vergleich von beobachteten und gerechneten  $\rho_a(\omega)$ -Kurven auf Grund von vorgegebenen Widerstandsmodellen (Kurvenatlas). Die Phasenkurve  $\arg \{C(\omega)\}$  dient lediglich zur Kontrolle einer auf diesem Wege gewonnenen Widerstandsverteilung.

Eine sehr viel umfassendere Darstellung von empirischen  $C(\omega)$ -Kurven erhält man durch eine getrennte Berücksichtigung des Real- und Imaginärteiles von  $C$ . Der Imaginärteil, in Gl.(6) mit  $p^*/2$  bezeichnet, wird nämlich durch den Widerstand in einem begrenzten Tiefenbereich bestimmt, der den Schwerpunkt  $z^*$  der  $0^\circ$ -Phase der induzierten Ströme enthält. Definiert man mit

$$\rho^*(\omega) = 2\pi\omega \left[ p^*(\omega) \right]^2 \quad (8)$$

einen neuen scheinbaren spezifischen Widerstand, so erhält man in  $\rho^*(z^*)$  eine im allgemeinen brauchbare erste Näherung der wahren Widerstandsverteilung  $\rho(z)$ . Es genügt also die Kenntnis der magneto-tellurischen Impedanz für eine einzige Frequenz, um eine Abschätzung des Widerstandes in der durch  $\text{Re}\{C\}$  bestimmten Tiefe zu erhalten. Aus den  $z^*$ -Tiefen der höchsten und niedrigsten Frequenz erkennt man zudem unmittelbar den Tiefenbereich, über dessen Widerstandsverteilung sinnvolle Angaben gemacht werden können. Dabei ist vorausgesetzt, daß  $z^*$  mit zunehmender Frequenz monoton wächst, was theoretisch stets der Fall sein sollte.

Von der Näherung  $\rho^*(z^*)$  und ihrer Übertragungsfunktion  $C^*(\omega)$  ausgehend können Verbesserungen berechnet werden, indem man die Differenzen  $\delta C = C - C^*$  durch Variation der Parameter der Widerstandsverteilung zum Verschwinden bringt. Die Zahl der Parameter darf dabei  $2N$  nicht überschreiten, wenn  $N$  die Zahl der Frequenz(bänder) ist, für die  $C(\omega)$  ermittelt werden konnte. Entsprechende Rechenverfahren sind bereits erdacht aber noch nicht genügend erprobt worden, um die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens beurteilen zu können.

Liegt die Phase von  $C(\omega)$  zwischen  $0$  und  $-45^\circ$ , so empfiehlt es sich, die gut leitende Deckschicht (die ja offensichtlich von den Variationen der betreffenden Frequenz ohne wesentliche Schwächung durchdrungen wird) als "dünne Schicht" aufzufassen und als solche in Rechnung zu stellen. Bezeichnet  $C^-(\omega)$  die Übertragungsfunktion E-H unterhalb dieser Deckschicht und  $\tau$

ihre integrierte Leitfähigkeit, so gilt

$$C^-(\omega) = \frac{C(\omega)}{1 - 4\pi i \omega \tau C(\omega)} \quad (9)$$

Setzt man ferner  $C^-(\omega) = p^{**}/(1+i)$  mit  $p^{**}$  als scheinbarer Skin-Tiefe des Halbraumes unterhalb der Deckschicht, so erlaubt Gl. (9) eine getrennte Bestimmung von  $\tau(\omega)$  und  $p^{**}(\omega)$ . Als erste Näherung für den Widerstand in der Tiefe  $p^{**}$  ist dann

$$\rho^{**}(\omega) = 2\pi\omega \left[ p^{**}(\omega) \right]^2 \quad (10)$$

einzusetzen.

Die Abbildungen 1-4 zeigen die Anwendung dieser Darstellungsmethode auf vorgegebene Modelle (1, 2) und beobachtete Impedanzkurven (3, 4).

Im allgemeinen Fall ohne die CAGNIARDsche Beschränkung gilt es, die Ortsabhängigkeit der Beziehungen zwischen E, H und Z in geeigneter Weise zu berücksichtigen. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß man das beobachtete magnetische Variationsfeld in einen äußeren und inneren Anteil zerlegt und so dann versucht, die Beziehung zwischen dem inneren und äußeren Anteil durch ein geeignetes Widerstandsmodell zu erklären. Auf diesem Wege sind die klassischen Modelle von CHAPMAN, LAHIRI und PRICE für das Erdinnere durch Analyse der  $S_q$  und  $D_{st}^-$  Variationen gefunden worden.

Eine wirksame Trennung des inneren und äußeren Anteils setzt eine Kenntnis des Feldes in einer räumlichen Ausdehnung voraus, die etwa der Reichweite der Felder selbst entspricht. Ebenso ausgedehnt ist dann aber auch derjenige Bereich, in dem der innere Widerstand als reine Funktion der Tiefe angesehen wird. Dies ist erfahrungsgemäß eine sehr einschränkende Bedingung. Sie läßt sich in einfacher Weise umgehen, indem man Trennung und Induktionsrechnung zu einem einzigen Rechenvorgang in folgender Weise vereinigt:

Die Transformation der beobachteten Zeitfunktion  $H(x,t), \dots$  in den Frequenzbereich bereitet keine grundsätzliche Schwierigkeit. Sie ist ja auch im CAGNIARDschen Fall notwendig.

Ebenso ist die Transformation der Übertragungsfunktion  $T(\omega, k)$  von Gl. (2) aus dem  $k$ - in den  $x$ -Bereich für jedes vorgegebene Widerstandsmodell leicht durchführbar, da  $T(\omega, k)$  zwischen den reellen Grenzen 1 für  $k \rightarrow \infty$  (effektiv nicht-leitender unterer Halbraum) und 0 für  $k \rightarrow 0$  (effektiv ideal-leitender unterer Halbraum) variiert.- Die Interpretation von ortsabhängigen Z-H Beziehung<sup>en</sup> findet daher am zweckmäßigsten im  $(\omega, x)$ -Bereich statt.- Eine entsprechende Behandlung der E-H Beziehungen kann durch die Transformation von  $C(\omega, k)$  erreicht werden.-

Die Transformierte von  $iT$  sei mit

$$M(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} iT(\omega, k) e^{ikx} dk$$

bezeichnet. Eine entsprechende Transformation der Fourieramplituden  $a_H(\omega, k)$  und  $a_Z(\omega, k)$  von H und Z [s. Gl. (1)] liefert deren zeitliche Fourieramplituden  $A_H(\omega, x)$  und  $A_Z(\omega, x)$  wie sie bereits in Gl. (5) eingeführt worden sind. Dem Produkt  $a_H \cdot iT$  im  $k$ -Bereich entspricht dann eine Faltung  $A_H * M$  im  $x$ -Bereich, d.h. nach Gl. (2) wird die ortsabhängige Beziehung zwischen H und Z durch das Faltungsintegral

$$A_Z(\omega, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_H(\omega, \hat{x}) \cdot M(x - \hat{x}) d\hat{x} \tag{11}$$

hergestellt.

Es gilt nun den Faltungskern M so zu wählen, daß er auf  $A_H$  angewandt die  $x$ -Abhängigkeit einer vorgegebenen Z-Amplitude möglichst gut wieder gibt. Hierbei ist zu beachten, daß M gegen Null strebt, wenn  $|x - \hat{x}|$  die Eindringtiefe des Feldes übersteigt (s. weiter unten). Der Faltungskern ist also nur durch die Widerstandsverteilung in einem begrenzten Bereich bestimmt. Es ist also möglich, verschiedene Teile eines entsprechend langen vorgegebenen Profils mit verschiedenen Kernen zu falten und auf diese Weise großräumigen (regionalen) Änderungen der inneren Widerstandsverteilung Rechnung zu tragen.

Einige einfache und analytisch auswertbare Modelle mögen diese Zusammenhänge näher erläutern (Abb. 5). Für einen nichtleitenden unteren Halbraum gilt

$$T(\omega, k) = \begin{cases} + 1, & k > 0, \\ - 1, & k < 0. \end{cases}$$

Die Transformierte dieser mit  $i$  multiplizierten signum-Funktion ist

$$M(\omega, x) = - \frac{1}{\pi x}. \quad (12)$$

Die Faltung in Gl. (11) entspricht dann der Anwendung des K-Operators wie er von KERTZ (1954) zur Feldtrennung eingeführt worden ist. Befindet sich nun in der Tiefe  $h^*$  ein idealer Leiter, so folgt wegen  $S(\omega, k) = \exp(-2kh^*)$  aus Gl. (4)

$$T(\omega, k) = T_g(kh^*)$$

und somit

$$M(\omega, x) = \frac{-1}{2h^* \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi x}{2h^*}\right)}. \quad (13)$$

Ist schließlich der untere Halbraum ein homogener Leiter der Leitfähigkeit  $\sigma$  und der Skin-Tiefe  $p = (2\pi\omega\sigma)^{-1/2}$ , so erhalten wir mit

$$T(\omega, k) = \frac{k}{\sqrt{\frac{2i}{p^2} + k^2}}$$

als Faltungskern:

$$M(\omega, x) = \frac{-(1+i)}{\pi p} K_1 \left\{ \frac{(1+i)x}{p} \right\} \quad (14)$$

( $K_1$  = Modifizierte Besselfunktion zweiter Art erster Ordnung). Die Kerne der ersten beiden Modelle sind reell, da in diesen Fällen keine ortsabhängigen Phasenverschiebungen zwischen den Fourieramplituden von  $Z$  und  $H$  auftreten. Der komplexe Kern des dritten Modells hingegen sorgt für eine der endlichen Leitfähigkeit des unteren Halbraums entsprechenden  $x$ -abhängigen Phasenverschiebung zwischen  $A_H$  und  $A_Z$ .

Für kleine Entfernungen ( $x \ll h^*$ ,  $x \ll p$ ) erhält man für das zweite und dritte Modell die Näherung  $M = -(\pi x)^{-1}$ . Die

Leitfähigkeit des unteren Halbraums ist also in unmittelbarer Umgebung des Aufpunktes  $x$  stets induktiv unwirksam. Für große Entfernungen ( $x \gg h^*$ ,  $x \gg p$ ) geht  $M$  für die genannten Modelle exponentiell gegen null, d.h. der Faltungskern verschwindet infolge der induktiven Abschirmung mit wachsendem Abstand  $|x-\hat{x}|$  sehr viel rascher als bei einem Nicht-Leiter.

Abb. 6 zeigt die Anwendung dieses Verfahrens auf das äquatoriale Jet-Feld in Peru. Da nur die Ortsabhängigkeit der "daily ranges" in  $Z$  und  $H$  benutzt werden kann, läßt sich nichts über Phasenbeziehungen zwischen den Fourieramplituden aussagen. Die Verwendung von Modellen mit endlichen Leitfähigkeiten ist also nicht gerechtfertigt. Es wurden daher Faltungskerne nach Gl. (13) benutzt, wobei verschiedene Tiefen  $h^*$  für den idealen Leiter eingesetzt wurden. Es zeigt sich, daß die  $Z$ -ranges im Norden des Profils durch einen idealen Leiter in 250 km Tiefe erklärt werden können, während im Süden des Profils sogar die Annahme eines Nicht-Leiters ( $h^*=\infty$ ) den beobachteten  $Z$ -range nicht vollständig erklären kann.

#### Literatur:

- CANER, B., and D.R. AULD: Magneto-telluric determination of upper mantle conductivity structure at Victoria, British Columbia. *Canad. J Earth Sc.*, 5, 1209 (1968).
- CAGNIARD, L.: Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophys.* 18, 605 (1953).
- FORBUSH, S.E., and M CASAVARDE: Equatorial electrojet in Peru. Carnegie Institution of Washington Publ. 620 (1961).
- KERTZ, W.: Modelle für erdmagnetisch induzierte Ströme im Untergrund. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Phys.-Math. Kl. Abt. IIa*, 101 (1954).
- WIESE, H.: Geomagnetische Tiefentellurik Teil I: Die elektrische Leitfähigkeit der Erdkruste und des oberen Erdmantels. *Geofisica pura e applicata*, 51, 59 (1962).



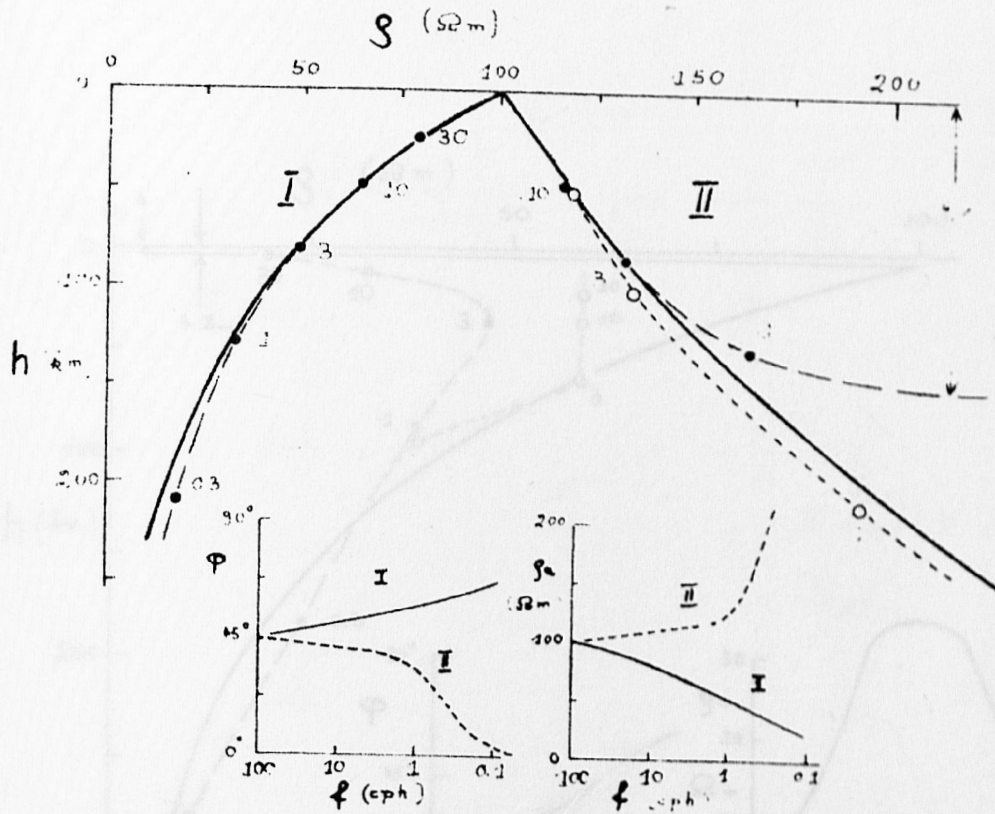


Abb.1: Oberes Diagramm: Modelle mit exponentiell abnehmendem (I) und exponentiell wachsendem (II) Widerstand  $\rho$  (ausgezogene Kurven). Die analytisch berechnete Oberflächenimpedanz dieser Modelle ist zur Berechnung einer ersten Näherung  $\rho^*$  nach Gl.(6) und (8) benutzt worden, und zwar für die durch geschlossene Kreise angegebenen Frequenzen 30, 10, 3, ... cph. Für Modell II ist auch eine zweite, durch offene Kreise gekennzeichnete Abschätzung  $\rho^{**}$  nach Gl.(9) und (10) ermittelt worden. Es läßt sich zeigen, daß für Modelle des Typs I das Verhältnis von wahren zu scheinbarem Widerstand  $\rho^*$  für alle Tiefen stets zwischen 1 und  $\pi^2/8 = 1,23$  liegt. In Modellen des Typs II ( $\rho = \exp(2\lambda z)$ ) nähert sich die Schwerpunktstiefe  $z^*$  der  $0^\circ$ -Phase der induzierten Ströme mit abnehmender Frequenz asymptotisch dem Grenzwert  $4/\lambda$ . - Zum Vergleich sind in den unteren kleinen Diagrammen der CAGNIARDsche scheinbare Widerstand  $\rho_a$  und die Phase der Impedanz als Funktion der Frequenz angegeben.

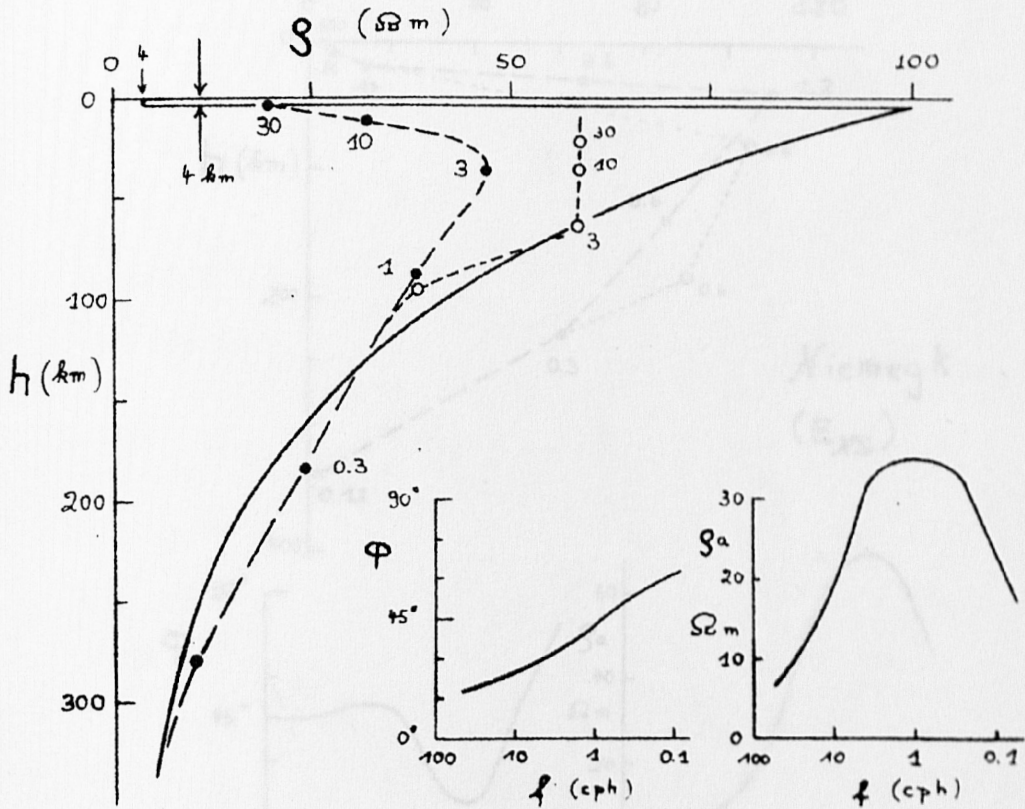


Abb.2: Gut-leitende Deckschicht über einem schlecht-leitenden Substratum mit exponentiell abnehmendem Widerstand. Scheinbare spezifische Widerstände sind wie in Abb.1 berechnet und als geschlossene ( $\rho^*$ ) und offene ( $\rho^{**}$ ) Kreise eingetragen. Der Widerstandssprung in 4 km Tiefe wird durch diese ersten Näherungen nur unvollkommen wiedergegeben. Dies entspricht der allgemeinen Schwierigkeit, den wahren Widerstand eines schlechten Leiters unmittelbar unter einem guten Leiter zu ermitteln.

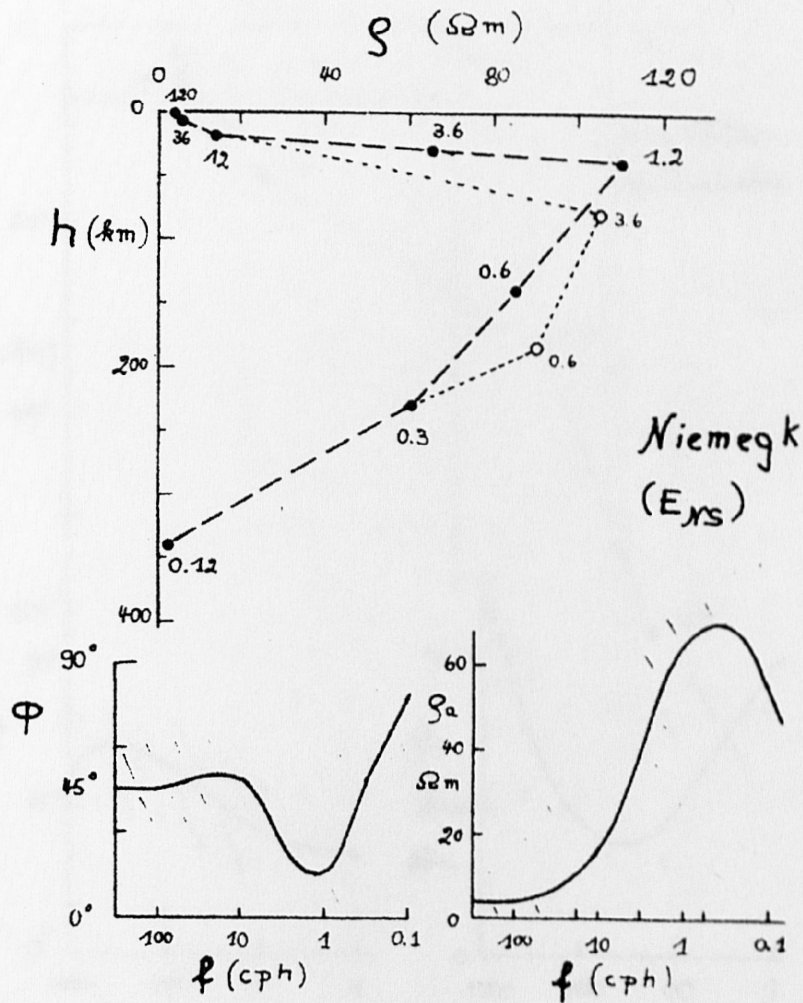


Abb.3: Phase der Impedanz und CAGNIARDscher scheinbarer Widerstand  $\rho_a$  zwischen ca. 100 und 0.12 cph für das Observatorium Niemegek nach WIESE (1962). Im oberen Diagramm die daraus berechneten Tiefenprofile  $\rho^*$  und  $\rho^{**}$  für die angezeigten Frequenzen 120, 36, 12, ... cph. Bezeichnungen wie in Abb.1. Die so gewonnene erste Näherung läßt deutlich das bekannte Widerstandsmaximum im oberen Erdmantel erkennen.

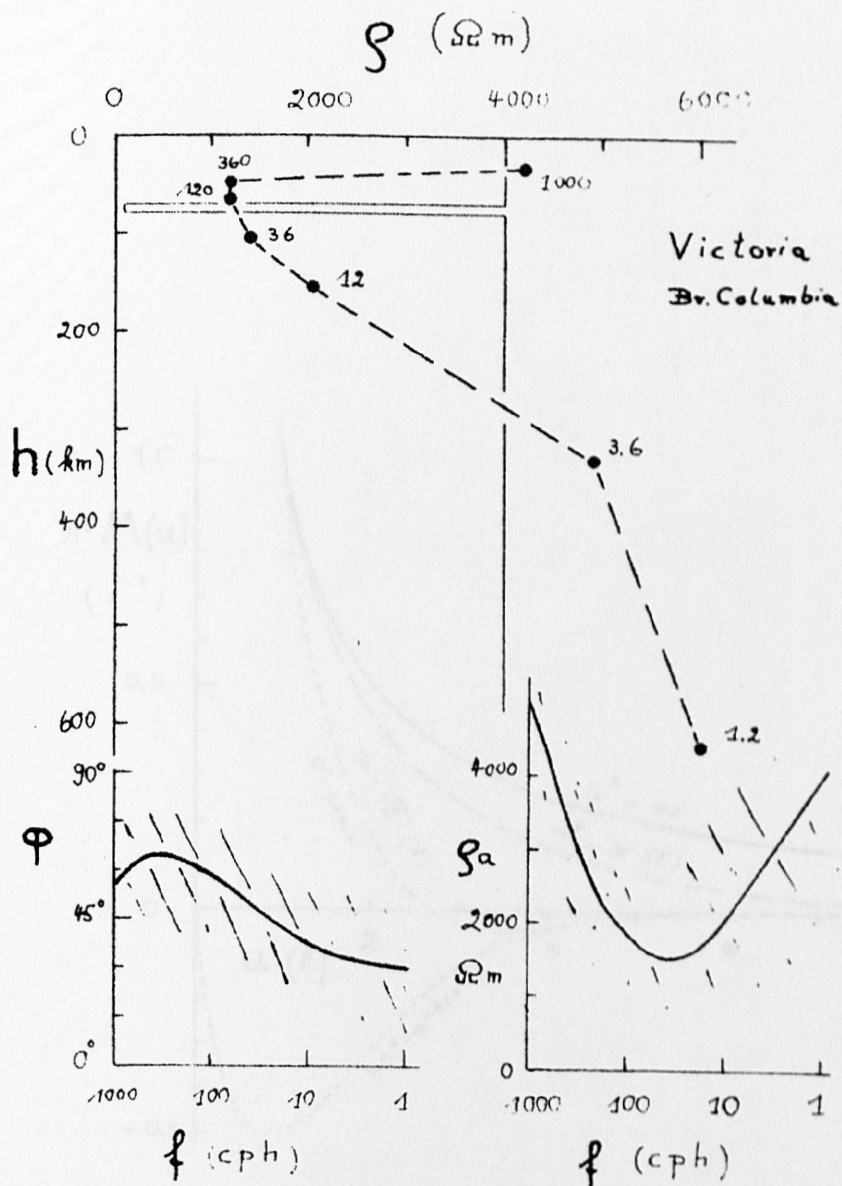


Abb.4: Phase der Impedanz und scheinbarer CAGNIARDscher Widerstand  $\rho_a$  zwischen 1000 und 1 cph für das Observatorium Victoria nach CANER und AULD (1968). Im oberen Diagramm das entsprechende Tiefenprofil des scheinbaren spezifischen Widerstandes  $\rho^*$ . Das ausgezogene Modell ist von den Autoren vorgeschlagen worden. Es soll an diesem Beispiel nur die Wirkungsweise des neuen Auswertungsverfahrens gezeigt werden ohne Beurteilung der Ausgangsdaten und der aus ihnen abgeleiteten Widerstandsverteilung.

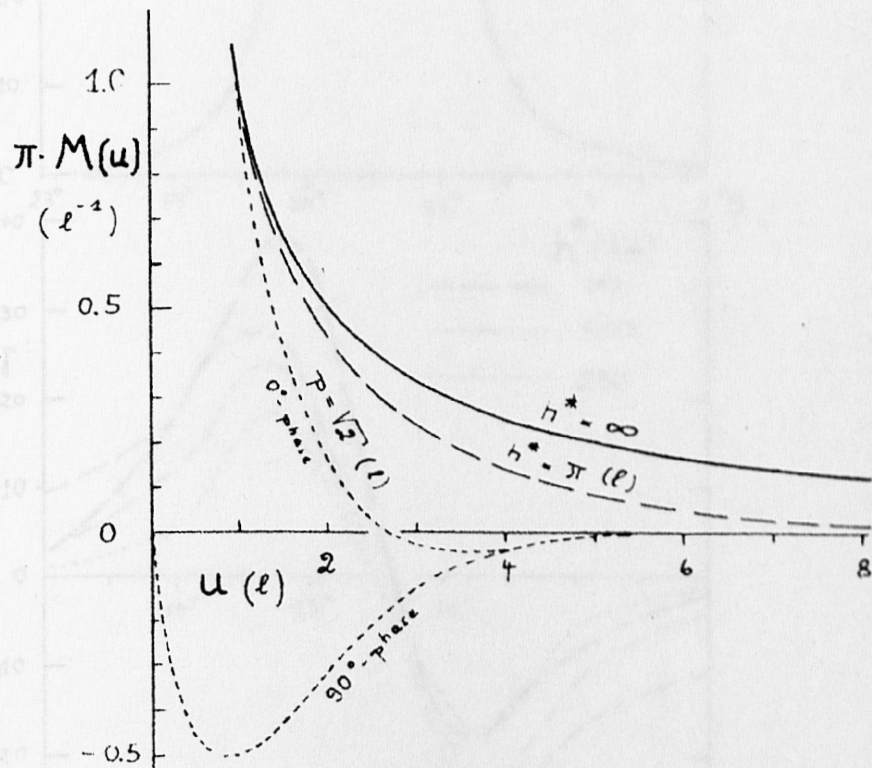


Abb.5: Faltungskern  $M(u)$  zur Herstellung von linearen Beziehungen zwischen H- und Z-Variationen über einem leitfähigen Untergrund im Frequenzbereich;  $h^*$  = Tiefe eines idealen Leiters (Gl.13);  $p$  = Skin-Tiefe in einem homogen leitenden Untergrund (Gl.14);  $h^* = \infty$ : Nicht-leitender Untergrund (GL.12). Cf. Text.

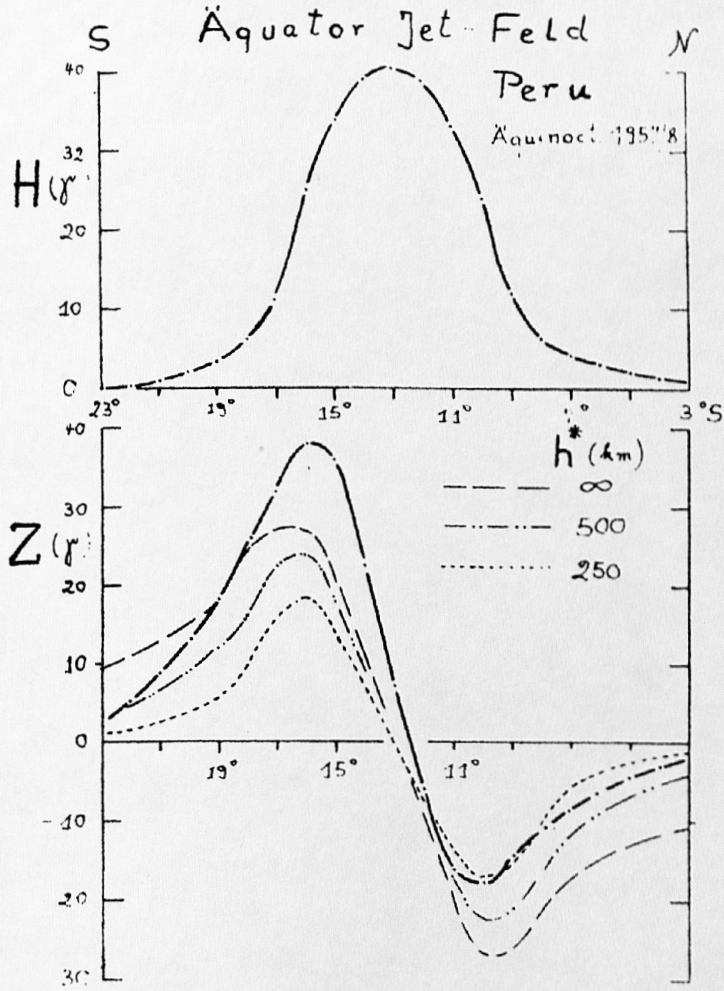


Abb.6: Daily ranges in H und Z auf einem Nord-Süd-Profil unter dem äquatorialen Jet in Peru nach FORBUSH und CASA-VERDE (1961). Aus H berechnete Z-ranges (dünne Kurven im unteren Diagramm) werden durch die Tiefe  $h^*$  eines angenommenen idealen Leiters bestimmt. Cf. Text.