

Dr. U. SCHMUCKER, Göttingen

"Regionale Unterschiede im inneren Anteil des Sq-Ganges"

Donnerstag, den 6. 3. 1969

Die täglichen Variationen des erdmagnetischen Feldes (Sq-Variationen) besitzen in mittleren Breiten eine deutliche Vertikalkomponente, und zwar ist das Amplitudenverhältnis von vertikalen zu horizontalen Variationen etwa 1:3 (siehe z.B. CHAPMAN und BARTELS, 1940; VII, 1). Die Eindringtiefe der langsamen Sq-Variationen in das leitfähige Erdinnere ist also mit der lateralen Wellungslänge des Oberflächenfeldes vergleichbar und somit in der Größenordnung von einigen hundert Kilometern (s. Tabelle 1). Will man aus den wechselseitigen Beziehungen zwischen den Feld-Komponenten des Sq-Ganges auf die Widerstandsverteilung im Erdinnern schließen, so ist der räumlichen Verteilung des Sq-Variationsfeldes und der Kugelgestalt der Erde gebührend Rechnung zu tragen. Insbesondere gilt nicht die CAGNIARDsche Beschränkung (s.S. 135), die es erlauben würde die magneto-tellurische Impedanz als ortsunabhängig zu betrachten.

Das beobachtete magnetische Variationsfeld ist zunächst in seinen äußeren und inneren Anteil zu zerlegen. Sodann gilt es, ein Widerstandsmodell zu finden, welches das empirische Verhältnis von innerem zu äußerem Anteil richtig wiedergibt. Für das globale Sq-Feld wird dieses durch die von LAHIRI und PRICE angegebenen Modelle erreicht (s. CHAPMAN und BARTELS, 1940; XXII, 8), in denen eine über laterale Inhomogenitäten gemittelte Widerstandsverteilung $\rho(r)$ als reine Funktion des geozentrischen Abstandes r betrachtet wird. Im folgenden soll nun, von einer bestimmten globalen Verteilung des Sq-Feldes ausgehend, sein innerer Anteil auf regionaler Basis untersucht werden, um großräumige laterale Unterschiede in der inneren Widerstandsverteilung zu ermitteln.

Das an der Erdoberfläche beobachtete magnetische Variationsfeld wird als rotationsfrei angesehen, so daß das assoziierte elektrische Feld im Außenraum und unmittelbar unter der Erdoberfläche (wo es gewöhnlich gemessen wird) keine radiale Komponente besitzt. Diese Variationsfelder seien als Funktionen der Ortszeit t mit $T_0 = 24$ Stunden als Grundperiode harmonisch analysiert worden. Betrachtet werden im folgenden diese Harmonischen als Funktionen des Ortes. Die Nordkomponente H der magnetischen Variationen an einem Ort der Länge λ und der Breite ϕ sei also gegeben in der Form

$$H(t, \lambda, \phi) = \sum_m H_{um} \cos(m\omega t) + H_{vm} \sin(m\omega t) = \sum_m \operatorname{Re} \{ H_m e^{im\omega t} \}$$

mit $\omega = 2\pi/T_0$ und

$$H_m(\lambda, \phi) = H_{um}(\lambda, \phi) - i H_{vm}(\lambda, \phi)$$

als m 'ter Fourieramplitude in komplexer Schreibweise. Entsprechende Darstellungen gelten für die Ost-(D) und Vertikalkomponente (Z) der magnetischen Variationen sowie für die Nord-(E_N) und Ostkomponente (E_E) der assoziierten tangentialen (= toroidalen) erdelektrischen Variationen.

Aus der Quasi-Periodizität des Sq-Ganges folgt, daß seine Längenabhängigkeit in Weltzeit in erster Näherung seinem zeitlichen Verlauf nach Ortszeit an einem festen Punkt entspricht. (Die Erde dreht sich sozusagen unter einem durch die Sonneneinstrahlung fixierten ionosphärischen Stromwirbel auf der Tagseite hinweg.) Die Längenabhängigkeit der m 'ten zeitlichen Harmonischen ist also $\exp(im\lambda)$. Für die Breitenabhängigkeit dieser Harmonischen ergibt sich eine Entwicklung nach zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^m(\cos\theta)$ der Ordnung m und des Grades $n=m, m+1, m+2, \dots$ ($\theta = 90^\circ - \phi$: Co-Breite oder Poldistanz). Beschränkt man sich auf den Sq-Gang in der Nähe der Tag-undNacht-Gleiche, wenn die Sq-Wirbel der nördlichen und südlichen Halbkugel von gleicher Stärke sind, dann scheiden aus Symmetriegründen die Glieder mit $n=m, m+2, \dots$ aus. Von den verbleibenden Gliedern der Entwicklung überwiegt das erste mit $n=m+1$ alle anderen, wie CHAPMAN's Analyse gezeigt hat (CHAPMAN und BARTELS, 1940, XX, 4).

Die Breitenabhängigkeit der m'ten Harmonischen sei also im folgenden durch $P_{m+1}^m(\cos\theta)$ gegeben. Die Fourierdarstellung dieser Kugelfunktion ist wegen $n-m=1$ besonders einfach und gegeben durch

$$P_n^m(\cos\theta) \sim \sin^m\theta \cos\theta \quad (0)$$

(siehe z.B. CHAPMAN und BARTELS, XVII, 3, Gl. 10).

Betrachtet man den inneren Widerstand als reine Funktion der Tiefe, so ist die Längen- und Breitenabhängigkeit jeder Harmonischen des inneren und äußeren Anteils gleich. Für die magnetischen und elektrischen Fourieramplituden gelten dann die Beziehungen (s. CHAPMAN und BARTELS, XXII, Gl. 19-21 mit $\rho = 1$, unter Beachtung von Gl. (5) dieser Arbeit)

$\frac{r}{a} =$
an der Stelle

$$\frac{Z_m}{D_m} = i \frac{m+1}{m} \sin\theta T_n^m \quad (1)$$

$$\frac{Z_m}{H_m} = (m+1) \frac{P_n^m}{dP_{m+1}^m/d\theta} T_n^m = \frac{(m+1)\sin\theta\cos\theta}{m\cos^2\theta - \sin^2\theta} T_n^m \quad (2)$$

$$\frac{E_{mN}}{D_m} = - \frac{E_{mE}}{H_m} = \frac{im\omega a}{n+1} T_n^m \quad (3)$$

Die innere Widerstandsverteilung $\rho(r)$ ist in den diskreten "Übertragungskoeffizienten" T_n^m enthalten. Diese Koeffizienten treten hier an die Stelle der Übertragungsfunktionen $T(\omega, k)$, Gl. 2 auf S. 135, und haben eine ähnliche Bedeutung. Betrachtet man insbesondere n/a oder besser $(n+1/2)/a$ als Wellenzahl des Oberflächenfeldes, so erhält man in

$$c_n^m = T_n^m \frac{a}{n+1/2} \quad (4)$$

ein direktes Maß für die Tiefe der induzierten Ströme der m'ten Harmonischen. Ferner gilt entsprechend Gl. 4 auf S. 135

$$T_n^m = \frac{1 - \frac{n+1}{n} S_n^m}{1 + S_n^m} \quad (5)$$

mit S_n^m als Verhältnis von innerem zu äußerem Anteil des magnetischen Variationsfeldes an der Erdoberfläche. Aus CHAPMAN's Analyse des Sq-Feldes (CHAPMAN und BARTELS, XX, Tabelle 5) lassen sich folgende Werte ableiten:

Tabelle 1

m	Periode (Std.)	S_n^m	T_n^m		c_n^m (km)		h_n^m (km)	ρ_n^m (Ohm·m)	
1	24	0,35+i·0,09	0,35-i·0,13		890-i·330	890	20		
2	12	0,43	0,14	0,28	0,16	510	290	510	31
3	8	0,38	0,15	0,36	0,17	510	240	510	32

Man entnimmt dieser Tabelle ohne weitere Modellrechnung, daß der innere Anteil des Sq-Ganges von Induktionsströmen in großer Tiefe herrührt. Die in der letzten Spalte angegebenen Widerstände sind formal aus

$$c_n^m = h_n^m - \frac{i}{2} P_n^m, \quad \rho_n^m = 2\pi m \omega \{P_n^m\}^2 \quad (6)$$

(s. Gl. 8 auf S. 137) berechnet worden. Sie ergeben in Verbindung mit den zugehörigen Tiefen h_n^m eine scheinbare Widerstandsverteilung, die sehr genau den von LAHIRI und PRICE angegebenen Modellen "a" und "b" entspricht (CHAPMAN und BARTELS, XXII, 8, Fig. 3). Diese Modelle liefern jedoch einen zu kleinen inneren Anteil für das Ringstromfeld, der hier nicht berücksichtigt worden ist.

Aus den Fourieramplituden des Sq-Ganges an einem gegebenen Ort soll nun nach Gl. (1-3) ein regionaler Koeffizient T_n^m berechnet werden, der für die gemittelte Widerstandsverteilung $\rho(r)$ der Region repräsentativ ist. Der "Radius der Gültigkeit" entspricht dabei wie im ebenen Fall der jeweiligen Skalentiefe c_n^m . Es ist also vorausgesetzt, daß in diesem Umkreis laterale Inhomogenitäten die Sq-Amplituden nicht beeinflussen oder daß ihre Wirkung durch räumliche Glättung beseitigt worden ist. Um eine konsistente Bestimmung von T_n^m zu erhalten, müssen gewisse, von der inneren Widerstandsverteilung unabhängige

Beziehungen zwischen H und D, bzw. E und Z, zutreffen. Nach Gl. (1-3) ist zu fordern, daß

$$\frac{H_m}{D_m} = i \left\{ \cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{m\cos\theta} \right\} \quad (7)$$

$$\frac{E_{mN}}{Z_m} = \frac{m^2 \omega a}{\sin\theta(m+1)(m+2)} ; \quad \frac{E_{mE}}{Z_m} = \frac{i m^2 \omega a}{\sin\theta(m+1)(m+2)} \left\{ \frac{\sin^2\theta}{m\cos\theta} - \cos\theta \right\}. \quad (8)$$

Diese Bedingungen sind in der Regel nicht erfüllt. (Es sei bemerkt, daß CHAPMAN's globale Analyse des Sq-Feldes zu nicht-konsistenten Koeffizienten S_n^m führte. Die in Tabelle 1 angegebenen Werte sind aus der räumlichen Verteilung der Z- und D-Amplituden errechnet worden. Die Verwendung der H-Amplituden führte zu unbrauchbaren Resultaten, was mit dem Einfluß des äquatorialen und polaren Jets erklärt wurde. Diese Jets verändern die D-Amplitude in sehr viel geringerem Ausmaß, da ihr Maximum in mittleren Breiten liegt.)

Die Bedingung (7) für das H:D Verhältnis läßt sich formal erfüllen, indem man die Variationen der horizontalen Komponente an einem gegebenen Ort auf neue "Sq-effektive" Koordinaten transformiert. Man entnimmt Gl. (7), daß die m'te Harmonische in H in derjenigen Breite ϕ_c verschwindet, für die

$$\sqrt{m} \sin \phi_c = \cos \phi_c$$

gilt. Sie definiert das Zentrum des betreffenden Sq-Wirbels und beträgt $\phi_c = 45^\circ, 35,3^\circ$ und 30° für $m = 1, 2, 3$. Für $0^\circ \leq \phi < \phi_c$ führt H_m um 90° gegenüber D_m , für $\phi_c < \phi \leq 90^\circ$ führt D_m um 90° gegenüber H_m . neuer Winkel

Es seien \hat{H}_m und \hat{D}_m die beobachteten, auf die geographische Nord- und Ostrichtung bezogenen Fourieramplituden an einem bestimmten Ort, δ_m und ϵ_m ihre Argumente und $\text{tg } \alpha_m = \frac{|\hat{H}_m|}{|\hat{D}_m|}$ ihr Absolutwertverhältnis. Um die gewünschte Phase von $\pm 90^\circ$ zwischen den Komponenten zu erhalten, führt man die Transformation

$$H_m = \hat{H}_m \cos \psi_m - \hat{D}_m \sin \psi_m \quad (9)$$

$$D_m = \hat{H}_m \sin \psi_m + \hat{D}_m \cos \psi_m$$

mit

$$\operatorname{tg} 2\psi_m = \operatorname{tg} 2\alpha_m \cdot \cos(\delta_m - \epsilon_m)$$

aus (s. z.B. BORN, 1965; S. 22/23). Der Winkel ψ_m definiert die Sq-effektive Nordrichtung für den betreffenden Ort. Seine Sq-effektive Breite ϕ_m ergibt sich nach Gl. (7) durch (graphische) Lösung der impliziten Gleichung

$$\left| \frac{H_m}{D_m} \right| = \sin \phi_m - \frac{\cos^2 \phi_m}{m \sin \phi_m} \quad (10)$$

Durch Einsetzen der transformierten Fourieramplituden von Gl. (9) und ϕ_m von Gl. (10) kann dann ein regionaler Koeffizient T_n^m entweder aus Gl. (1) oder (2) mit dem gleichen Resultat bestimmt werden. In gleicher Weise erhält man aus Gl. (8) die Fourieramplituden des zugehörigen tangentialen Variationsfeldes. Transformiert man sie zurück auf geographische Koordinaten, so erhält man in der Differenz zwischen den berechneten und beobachteten komplexen Fourieramplituden eine einfache Abschätzung für die lokal-anomale Verzerrung des erdelektrischen Sq-Feldes durch (oberflächennahe) Inhomogenitäten. Dies ist in Abb. 1 für den erdelektrischen Sq-Gang der Station Wiesenburg bei Berlin gezeigt.

Nach dem angegebenen Verfahren sind die Sq-Gänge einer Reihe von Observatorien analysiert worden. Dazu wurden die Stundenmittel von den internationalen 20 ruhigen Tagen der Monate September/Oktobre 1932 und März/April 1933 des internationalen Polarjahres benutzt, die von PRICE und WILKINS (1963) tabelliert worden sind. Ein Vergleich der verschiedenen Winkel ϕ und ψ zeigt, daß das Sq-Feld - wie zu erwarten - teils durch die geographischen Koordinaten (der Sonneneinstrahlung entsprechend), teils durch die des permanenten Dipolfeldes bestimmt wird. In jedem Fall ergeben die Rechnungen vernünftige Werte für ψ_m und ϕ_m , wenn man von der äquatornahen Station Hulan absieht. Die durch die innere Widerstandsverteilung bestimmten Koeffizienten T_n^m stimmen nur im Falle von Tucson mit den

globalen Werten von CHAPMAN's Analyse einigermaßen überein (s. Tab. 1). Bei den anderen Stationen ergeben sich größere Eindringtiefen in einen scheinbar schlechter leitenden oberen Mantel. Dies kann aber auch, insbesondere im Falle von Niemegek, auf einem lokal-anomalen Verhalten des magnetischen Sq-Feldes beruhen, das noch nicht in Rechnung gestellt worden ist. Die Werte für Heluan sind völlig unsinnig.

Die Ergebnisse sind in Abb. 2 graphisch dargestellt durch eine Normierung der Z-Amplituden auf die Äquatorialen H-Amplituden. Diese Art der Normierung wird bei der Behandlung des Ringstromfeldes häufig benützt. Beachtet man, daß die Breitenabhängigkeit von H_m nach Gl. (0) durch

$$\frac{d P_n^m}{d \theta} \sim \sin^{m-1} \theta (m \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (1)$$

gegeben ist, so folgt mit Gl. (2) für die normierte Z-Amplitude

$$\frac{Z_m(\theta)}{H_m(90^\circ)} = - (m+1) \sin^m \theta \cos \theta T_n^m. \quad (1)$$

Durch Einsetzen von CHAPMAN's T_n^m -Werten erhält man eine globale Bezugskurve, die den Modellen von LAHIRI und PRICE entspricht. Die T_n^m -Werte der Tabelle 2 sind dazu benutzt worden, um nach Gl. (12) ein regionales $Z_m(\theta)/H_m(90^\circ)$ -Verhältnis der einzelnen Observatorien mit $\theta = 90^\circ - \phi_m$ zu berechnen.

Es sei bemerkt, daß die nach Gl. (11) errechneten Äquatoramplituden von H_m der verschiedenen Observatorien nicht gut übereinstimmen. Diese Unstimmigkeit ließe sich vielleicht dadurch vermeiden, daß man die Stundenmittel einzelner ruhiger Tage in der angegebenen Weise analysiert und die Koeffizienten aus den transformierten Fourieramplituden vieler Tage nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

Tabelle 2

Station	m	ϕ	ϕ	ϕ_m	ψ	ψ_m	T_n^m	h_n^m	ρ_n^m
		(Winkel in Grad)						(km)	(Ohm·m)
Tucson (TU)	1			52		-10	0,31-i·0,15	790	26
	2	32	40	44	-10	- 7	0,21 0,16	390	34
	3			36		-23	0,15 0,16	210	29
Niemegk (NI)	1			62		26	0,32 0,32	820	120
	2	52	52	49	19	16	0,19 0,31	350	120
	3			44		- 1	0,17 0,25	240	70
Rude Skov (RS)	1			60		45	0,20 0,26	660	100
	2	56	56	49	21	26	0,28 0,28	510	95
	3			51		16	0,44 0,22	620	55
Heluan (HE)	1			19		54	0,32 0,49	820	290
	2	30	27	4	13	52	0,62 1,95	-	-
	3			4		62	0,67 1,80	-	-

- ϕ : geographische Breite
- ϕ : geomagnetische Breite
- ϕ_m : Sq-effektive Breite nach Gl. (10)
- ψ : Deklination des Dipolfeldes (Winkel zwischen dem geographischen und geomagnetischen Meridian, positiv über W)
- ψ_m : Deklination des Sq-effektiven Meridians nach Gl.

Literatur:

BORN, M.: Optik. Springer-Verlag 1965.

CHAPMAN, S. und J. BARTELS: Geomagnetism. Oxford University Press, 3rd impr. 1962.

LENGNING, K.: Erdstrombeobachtungen auf langen Meßstrecken nördlich von Berlin. Pure and Applied Geophysics 59, 128 (1964)

LENGNING, K.: Untersuchung der Beobachtungsergebnisse von Erdstromregistrieranlagen mit Potentialabgriffen von unterschiedlicher Länge am Adolf-Schmidt-Observatorium für Erdmagnetismus in Niemegek. Geod.Geophys.Veröff. Reihe II, Heft 6 (1968).- Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

PRICE, A.T. und G.A. WILKINS: New method for the analysis of geomagnetic fields and their application to the Sq field of 1932-33. Phil. Trans. Roy. Soc. London series A, 256, 31 (1963)

Abb. 1: Seigerdiagramme für die ersten drei Partialamplituden des erdelektrischen Sq-Ganges westlich von Berlin nach Beobachtungen von LENGNING (s. Literatur, 1968). Die beobachteten Amplituden der Nordkomponente (E_N) und Ostkomponente (E_E) sind am 21. März 1968 mittels der Äquinoktien 1971/72 gemessen worden. Für den gleichen Zeitraum wurden aus den Beobachtungen der Z-Variationen des beobachteten Sq-Ganges in Niemegek nach Gl.(8) theoretische Amplituden berechnet, die als gestrichelte Linien eingezeichnet sind. Es ergeben sich eindeutigere und über längere unabhängige Beziehungen zwischen den beobachteten und gerechneten Amplituden. Die beobachteten Amplituden des lang-periodischen Feldes durch den Äquinoktienunterschied scheint eine in wesentlicher Hinsicht den Gluschen widerstand zu erbringen.

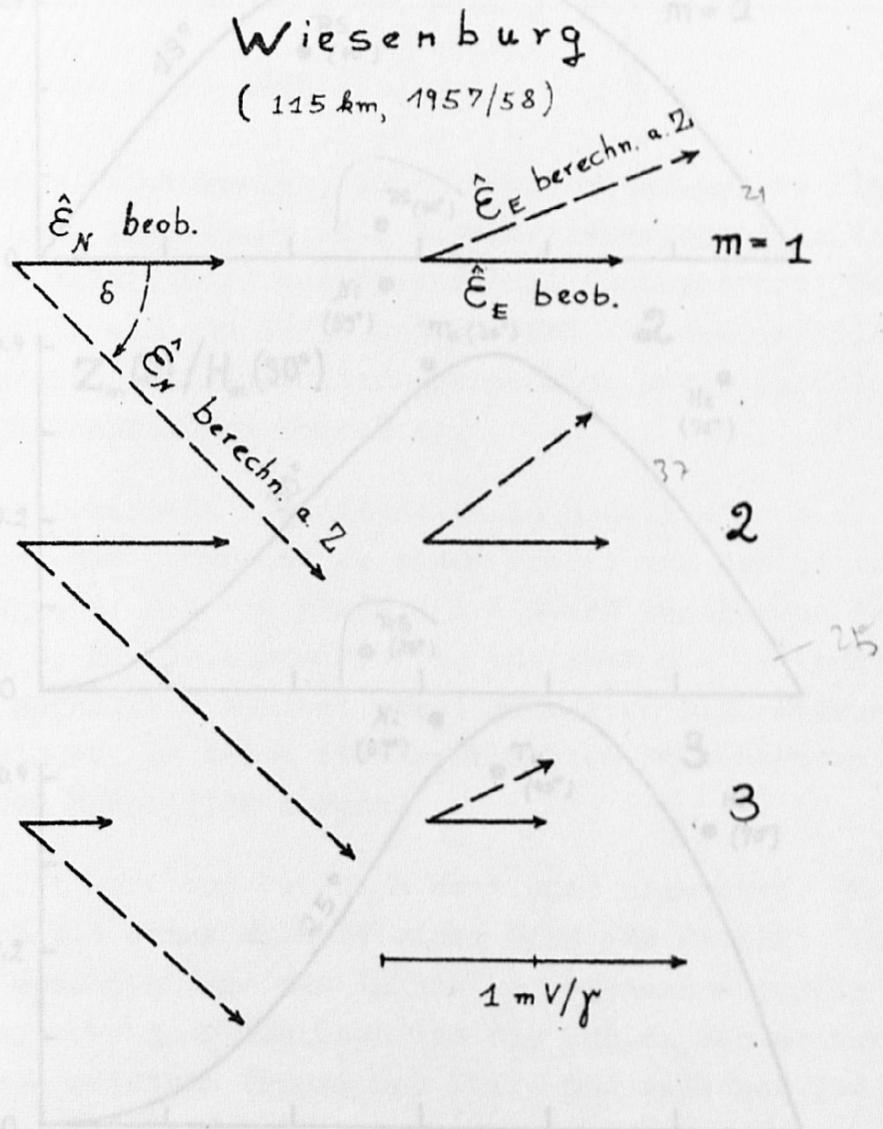


Abb. 1: Zeigerdiagramme für die ersten drei Fourieramplituden des erdelektrischen Sq-Ganges nördlich von Berlin nach Beobachtungen von LENGNING (s. LENGNING, 1968). Die beobachteten Amplituden der elektrischen Nord (\hat{E}_N) und Ostkomponente (\hat{E}_E) sind aus den Stundenmitteln der Äquinoktien 1957/58 berechnet worden. Für den gleichen Zeitraum wurden aus den Fourieramplituden der Z-Variationen des nahegelegenen Observatoriums Niemegk nach Gl.(8) theoretische elektrische Amplituden berechnet, die als gestrichelte Zeiger eingezeichnet sind. Es ergeben sich einfache und nahezu frequenzunabhängige Beziehungen zwischen den beobachteten und gerechneten Amplituden. Die lokale Beeinflussung des lang-periodischen Feldes durch örtliche Leitfähigkeitsunterschiede scheint also im wesentlichen entsprechend dem Ohmschen Widerstand zu erfolgen.

Dieses Ergebnis ist jedoch bei dem gegenwärtigen Stand der Untersuchungen keine Bedeutung beizumessen.

Land. phys. U. KÖGLER, Braunschweig

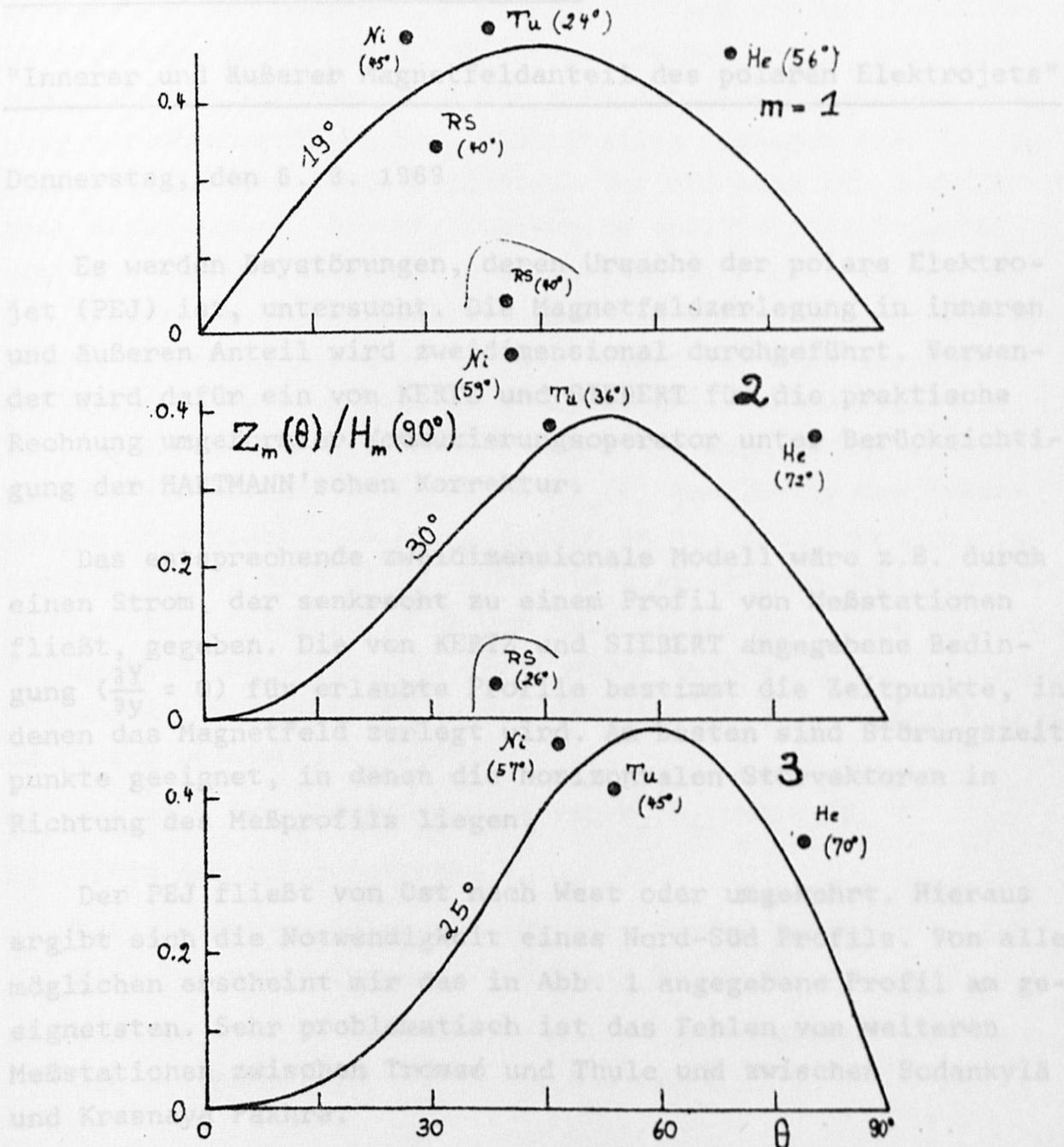


Abb. 2: Die Breitenabhängigkeit der Z-Amplitude der ersten drei Harmonischen des Sq-Ganges während der Äquinoktien (θ :Co-Breite). Dargestellt sind die normierten Z-Amplituden des globalen Sq-Feldes nach der Analyse von CHAPMAN (ausgezogene Kurve) sowie die beobachteten Z-Amplituden verschiedener Observatorien. Näheres über den Gang der Rechnung s. Text. Die Winkelangaben beziehen sich auf die Phase von Z_m gegenüber H_m (Fourieramplitude der Nordkomponente). Die beobachteten Z-Amplituden liegen zumeist oberhalb der globalen Bezugskurve, d.h. der obere Erdmantel erscheint unter den genannten Observatorien schlechter leitend zu sein als es dem globalen Mittel entspricht. Diesem Ergebnis ist jedoch bei dem gegenwärtigen Stand der Untersuchungen keine Bedeutung beizumessen.