

U. SCHMUCKER, Göttingen

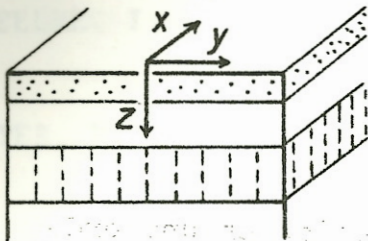
"Neue Rechenmethoden zur Tiefensondierung"

Dienstag, den 14.9.1971

1. Einleitung

Aus den zeitlichen Variationen des erdmagnetischen und erd-elektrischen Feldes soll die Verteilung der Leitfähigkeit im Untergrund erschlossen werden. Zur Lösung dieser Aufgabe werden aus den beobachteten Variationen lineare Beziehungen zwischen den einzelnen Feldkomponenten abgeleitet. Sie beschreiben das induktive Verhalten des Untergrundes gegenüber einem Primärfeld von äußerem Ursprung. Zu ihrer Interpretation benützt man verschiedene allgemeine Modellverteilungen der Leitfähigkeit, die in Fig. 1 zusammengestellt worden sind. Im Rahmen dieser Grundmodelle erfolgt die weitere Auswertung zumeist durch eine schrittweise Annäherung von speziellen Verteilungen an diejenige, die eine möglichst gute Erklärung der Beobachtungen ergibt. Wird die am besten passende Modellverteilung durch die einmalige Anwendung eines bestimmten, programmierbaren Rechenschemas aus den Beobachtungen gewonnen, so spricht man von einer Interpretation durch "Inversion".

Die nun folgenden Rechnungen werden mit den komplexen Fourier-Transformierten der Felder im Frequenzbereich durchgeführt. Ihr gemeinsamer Zeitfaktor ist  $\exp(i \omega t)$ . Dabei soll für die Spektralfunktion eine Feldkomponente  $A$  die Beziehung  $A(\omega) = A^*(-\omega)$  gelten, so daß einer Transformation in den Zeitbereich eine reelle Zeitfunktion  $\hat{A}(t)$  ergibt. Die Erdoberfläche ist die Ebene  $z = 0$  von rechtwinkligen  $(x, y, z)$ -Koordinaten ( $z$  nach unten). Die Komponenten des magnetischen Vektors  $\underline{H} = (H_x, H_y, H_z)$  und des elektrischen Vektors  $\underline{E} = (E_x, E_y, E_z)$  seien für eine gegebene Kreisfrequenz  $\omega$  in Ebenen  $z = \text{const.}$  komplexe Funktionen eines Ortsvektors  $\underline{r} = (x, y)$  oder eines Wellenzahlvektors  $\underline{k} = (k_x, k_y)$ . Alle Größen sind in MKS-Einheiten zu messen, insbesondere ist die Einheit der

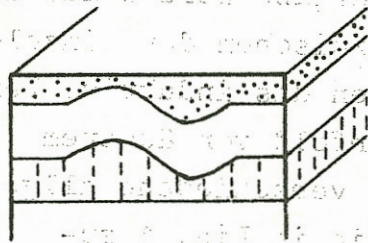


Sourcefield +  
normal part of  
secondary field

Anomalous  
part of second-  
ary field

TE ( $E_{nx}, E_{ny}, 0$ )

-



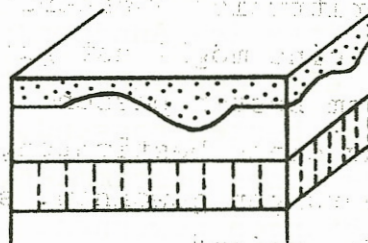
( $E_{nx}, 0, 0$ )

TE ( $E_{ax}, 0, 0$ )

TE

( $0, E_{ny}, 0$ )

TM ( $H_{ax}, 0, 0$ )



Thin layer

TE ( $E_{ax}, E_{ay}, 0$ )

TE

General

TE + TM

Fig. 1: Grundmodelle der elektrischen Leitfähigkeitsverteilung und ihr induktives Verhalten gegenüber induzierenden TE-Felder. Oben: 1-dimensionales Modell ohne Induktionsanomalie. Das induzierte Feld ist gleichfalls ein TE-Feld. Mitte: 2-dimensionales Modell mit Induktionsanomalie bei E- und H-Polarisation des Normalfeldes. Der anomale Anteil des induzierten Feldes ist entweder ein reines TE- oder ein reines TM-Feld. Unten: 3-dimensionales Modell. Die resultierende Induktionsanomalie besteht im Allgemeinen aus TE- und TM-Feldern. Ist die Deckschicht eine "dünne Schicht" und ist darunter folgende Schicht ein Isolator über einem lateral homogenen Untergrund, so ist die Induktionsanomalie ein reines TE-Feld, da induzierte Ströme die Deckschicht weder verlassen noch in sie eintreten können.

Impedanz  $[\Omega]$  ( $1 \text{ mV/km} / \gamma \hat{=} 1,25 \cdot 10^{-3} \Omega$ ).

## 2. Allgemeine Lösung

Der untere Halbraum  $z > 0$  sei in homogene Bereiche unterteilt mit konstanten Werten der Leitfähigkeit  $\sigma$ , der Permeabilität  $\mu$  und der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$ . Jeder dieser Bereiche ist durch eine Wellenlänge

$$\lambda = (\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1}$$

für den Durchgang schnell oszillierender Felder ( $\omega\tau \gg 1$ ) und durch eine Skin-Tiefe

$$p = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}$$

für die Diffusion von langsam oszillierenden Feldern ( $\omega\tau \ll 1$ ) ausgezeichnet. Dabei ist

$$\tau = \epsilon\epsilon_0 / \sigma$$

die Zeitkonstante für den Zerfall freier Ladungen. Erdmagnetische Variationen sind in diesem Sinne langsam oszillierend, wenigstens im unteren Halbraum, d.h. ihre Ausbreitung erfolgt in Form einer nach unten gerichteten, quasi-stationären ( $p \ll \lambda$ ) Diffusion entsprechend den MAXWELLSchen Gleichungen

$$\text{rot } \underline{H} = \sigma(1 + i\omega\tau) \underline{E}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \underline{E} = -i\omega\mu\mu_0 \underline{H}$$

Die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems setzt sich aus zwei partikulären Lösungen I und II zusammen, zu deren Gewinnung ein Hilfsvektor  $\underline{P}$  eingeführt wird. Er stellt eine Art HERTZscher Vektor für die hier betrachteten Diffusionsvorgänge dar.

Sind  $\underline{P}_I$  und  $\underline{P}_{II}$  zwei linear unabhängige Lösungen der Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 \underline{P} = K_0^2 \underline{P}$$

mit

$$K_0^2 = i\omega\mu_0\sigma(1 + i\omega\tau) \approx 2i/p^2,$$

so lauten die partikulären Lösungen für  $\underline{H}$  und  $\underline{E}$  :

$$\underline{H}_{-I} = (i\omega\mu_0)^{-1} \text{rot } \underline{P}_{-I}, \quad \underline{H}_{-II} = (\omega\mu_0 K_0)^{-1} \text{rotrot } \underline{P}_{-II}, \quad (2)$$

$$\underline{E}_{-I} = K_0^{-2} \text{rotrot } \underline{P}_{-I}, \quad \underline{E}_{-II} = (iK_0)^{-1} \text{rot } \underline{P}_{-II}$$

An Bereichsgrenzen gelten die üblichen Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten von  $\underline{E}$  und  $\underline{H}$  ( $\mu = 1$ ). Beide Felder verschwinden für  $z \rightarrow \infty$ , da ihre Quellen im oberen Halbraum liegen sollen.

Sind die Bereichsgrenzen Ebenen  $z = \text{const.}$ , so erfolgt die Diffusion ausschließlich in Richtung der positiven  $z$ -Achse, und es gilt  $\underline{P} = (0, 0, P_z)$ . Eine entsprechend einfache Darstellung von  $\underline{P}$  erhält man für Kugeln und Zylinder mit einem radialsymmetrischen Aufbau (s. MADELUNG 1957 S.404-406, Elektrodynamik periodischer Felder im homogenen Material).

Bei diesen sogenannten 1-dimensionalen Diffusionen sind das induzierende Primärfeld und das induzierte Sekundärfeld stets vom gleichen Lösungstyp, wobei Lösung I ein bezüglich der Bereichsgrenzen tangential-magnetisches Feld und die Lösung II ein tangential-elektrisches Feld darstellt. Das elektromagnetische Feld der Lösung I wird daher im folgenden kurz als TM-Feld bezeichnet, dasjenige der Lösung II als TE-Feld. Da das zu TM-Feldern gehörige Magnetfeld in Nichtleitern auf der Wirkung von Verschiebungsströmen beruht, verschwindet es hier in quasi-stationärer Näherung.

3. 1-dimensionale Modelle:  $\sigma = \sigma(z)$

3.1 Modellrechnungen im Wellenzahl-Frequenz Bereich

Die induzierenden und induzierten Felder seien zunächst in Ebenen  $z = \text{const.}$  periodische Funktionen des Ortsvektors  $\underline{r}$  mit  $\exp(i\underline{k} \cdot \underline{r})$  als Ortsfaktor. Der Wellenzahlvektor  $\underline{k}$  beschreibt die laterale Modulation eines quasi-stationären Feldes ( $k\lambda \ll 1$ ) und nicht etwa die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle. Die  $z$ -Komponente des Diffusionsvektors  $\underline{P}$  sei gegeben durch

$$P_z(\omega, z, \underline{r}) = P_0(\omega, z) \cdot \exp(i\underline{k} \cdot \underline{r})$$

mit

$$\partial^2 P_0 / \partial z^2 = (K_0^2 + k^2) P_0$$

Aus diesem Ansatz folgt

$$\text{rot } \underline{P} = (ik_y, -ik_x, 0) P_z$$

(3)

$$\text{rotrot } \underline{P} = (ik_x/C, ik_y/C, k^2) P_z$$

mit  $C = -P_0 / (\partial P_0 / \partial z)$  und  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Die hierdurch definierte Länge  $C$  ist eine der möglichen Übertragungsfunktionen für 1-dimensionale Induktionsprobleme im Frequenz-Wellenzahlbereich, und zwar ist sie ein Maß für die Reichweite der Diffusion. Setzt man (3) in (2) ein, so erhält man

$$\left. \begin{array}{l} H_y = \sigma(1 + i\omega\tau) \\ E_z = ik_x \end{array} \right\} C_I E_x, \quad \left. \begin{array}{l} H_x = -\sigma(1 + i\omega\tau) \\ E_z = ik_y \end{array} \right\} C_I E_y \quad (4)$$

für TM-Felder und

$$\left. \begin{array}{l} E_x = i\omega\mu_0 \\ H_z = ik_x \end{array} \right\} C_{II} H_y, \quad \left. \begin{array}{l} E_y = -i\omega\mu_0 \\ H_z = ik_y \end{array} \right\} C_{II} H_x \quad (5)$$

für TE-Felder. Die Impedanzen dieser Felder sind also durch die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} Z_I &= [\sigma(1 + i\omega\tau) C_I]^{-1}, \\ Z_{II} &= i\omega\mu_0 C_{II} \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben. Für ihr Verhältnis vom induzierten zum induzierenden Feldanteil in der Ebene  $z = 0$  gilt

$$s = (1 - kC) / (1 + kC).$$

Hierbei sind im Falle von TE-Feldern die betreffenden Anteile des tangential-magnetischen Feldes und im Falle von TM-Feldern diejenigen des tangential-elektrischen Feldes gemeint.

Man beachte, daß wegen des äußeren Ursprungs der Felder die Übertragungsfunktionen  $C$  und  $Z$  für ein festes  $\omega$  und  $k$  implizite Funktionen der Leitfähigkeit unterhalb der gewählten Ebene  $z = \text{const.}$  sind. Ist diese Leitfähigkeit homogen, so gilt speziell mit  $P_0 \sim \exp(-\sqrt{K_0^2 + k^2} z)$

$$C_I = C_{II} = (K_0^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}} \approx p/(1+i).$$

Die Näherung bezieht sich auf den "CAGNIARD-Fall" eines quasi-homogenen Feldes, dessen Eindringtiefe klein ist gegenüber den lateralen Dimensionen des induzierenden Feldes ( $kp \ll 1$  oder allgemein  $|C|k \ll 1$ ). Formeln zur Berechnung der Übertragungsfunktionen für mehr-schichtige Modelle sind im Anhang B zu finden.

Da das beobachtbare magnetische Variationsfeld an der Erdoberfläche, also im Nichtleiter, nur die TE-Anteile des induzierenden und induzierten Feldes enthalten kann, darf man die Übertragungsfunktionen  $C_{II}$  usw. direkt aus dem beobachteten Verhältnis von vertikalen zu tangentialen magnetischen Variationen ableiten. Will man hingegen diese Funktionen aus dem empirischen  $E_x/H_y$  oder

$E_y/H_x$  Verhältnis gewinnen, so ist eine zusätzliche Begründung dafür notwendig, daß das erdelektrische Feld keine TM-Anteile enthält.

### 3.2 1-dimensionale Inversion

Die einfachste Form der Inversion geht von den Übertragungsfunktionen einer einzelnen Frequenz aus. Im folgenden setzen wir für ein festes  $k$  mit der Zusatzbedingung  $|C_{II}| k \ll 1$

$$C_{II}(\omega; k) = g(\omega) - ih(\omega)$$

wobei  $g$  und  $h$  stets positive reelle Größen sind. Soll nur der Modulus von  $C$  erklärt werden, so ist

$$\rho_a = \omega \mu_0 (g^2 + h^2)$$

der scheinbare spezifische Widerstand im Sinne von CAGNIARD für einen äquivalenten homogenen Untergrund bei der betrachteten Frequenz.

Soll  $C_{II}$  nach Amplitude und Phase interpretiert werden, so bieten sich hierzu folgende 2-Parameter-Modelle an: Liegt die Phase zwischen  $-45^\circ$  und  $-90^\circ$  ( $g < h$ ), so wird hierzu ein von einer dünnen Deckschicht überlagerter homogener Halbraum gewählt. Ist  $\tau$  der Leitwert (=integrierte Leitfähigkeit) der Deckschicht und  $p^*$  der spezifische Widerstand des Halbraums, so gilt entsprechend den Formeln in Anhang B

$$C_{II} = \frac{p^*}{1+i} \left( 1 + i\omega\mu_0\tau \frac{p^*}{1+i} \right)^{-1}$$

mit  $p^* = \sqrt{2\rho^*/(\omega\mu_0)}$ , also

$$g = p^*/(1 + (1 + \eta)^2), \quad h = p^*(1 + \eta)/(1 + (1 + \eta)^2)$$

mit  $\eta = \omega\mu_0\tau p^*$ . Daraus folgt

$\eta = p^{\times}(h - g)/(h^2 + g^2)$ ,  $p^{\times} = (g^2 + h^2)/g$   
oder

$$\tau = (h - g) / \rho_a, \quad \rho^{\times} = \frac{1}{2} \rho_a \left[ 1 + \left( \frac{h}{g} \right)^2 \right]$$

wobei  $\rho^{\times}$  stets größer als  $\rho_a$  ist.

Um in ähnlich einfacher Weise eine Phase zwischen  $0^{\circ}$  und  $-45^{\circ}$  (g > h) zu erklären, wählt man eine nicht-leitende Deckschicht der endlichen Mächtigkeit D über einem homogenen Halbraum der Leitfähigkeit  $\sigma^{\times}$ . Für dieses 2-Parameter-Modell gilt

$$C_{II} = D + p^{\times} / (1 + i),$$

also

$$D = g - h, \quad \sigma^{\times} = \frac{1}{2} \sigma_a \left[ 1 + \left( \frac{g}{h} \right)^2 \right]$$

mit  $\sigma_a = 1/\rho_a$ . Offensichtlich ist nunmehr  $\rho^{\times} = 1/\sigma^{\times}$  kleiner als  $\rho_a$ .

In beiden Fällen stellen die so definierten Widerstände  $\rho^{\times}$  eines äquivalenten homogenen Untergrundes Mittelwerte des wahren Widerstandes für einen ausgedehnten Tiefenbereich dar, dessen Schwerpunkt in der Tiefe  $z^{\times} = g$  liegt. Eine Darstellung von  $\rho^{\times}(z^{\times})$  für einen gewissen Frequenzbereich gibt also die wahre Widerstandsverteilung in geglätteter Form wieder.

Indem man die Übertragungsfunktion für benachbarte Frequenzen bei der Berechnung von  $\rho^{\times}$  berücksichtigt, sollte sich der Tiefenbereich, über den die wahre Verteilung gemittelt wird, verringern lassen. Hierfür geeignete Rechenverfahren fehlen noch. Erste Ansätze finden sich bei PARKER (1971). Wird endlich der gesamte Frequenzbereich zur Inversion benutzt, so geht der Mittelungsbereich gegen null und man erhält die wahre Widerstandsverteilung. Die theoretische Möglichkeit dieser vollständigen Inversion ist von BAILEY (1970) und WEIDELT (1970) gezeigt worden.



Bezeichnen  $\delta g$  und  $\delta h$  die (absoluten) Fehler empirischer Übertragungsfunktionen, so sind die resultierenden Fehler der Modellparameter bei der Verwendung einer einzelnen Frequenz

$$\delta \tau = [ [\delta g - \delta h [ \sin 2\phi - (\delta g + \delta h) \cos 2\phi ] ] / \rho_a$$

$$\delta \rho^{\#} = 2\rho^{\#} [ \frac{\delta h}{h} + [ (\frac{\delta g}{g} - \frac{\delta h}{h}) \cos 2\phi ] ]$$

$$\delta D = \delta h + \delta g,$$

$$\delta \sigma^{\#} = 2\sigma^{\#} \cdot \delta h/h$$

mit  $\text{tg}\phi = h/g$ . Dabei ist die Unsicherheit der Schwerpunktstiefe,  $\delta z^{\#} = \delta g$ , stets als klein gegenüber der Ausdehnung des Mittelbereiches anzusehen. Diese Betrachtungsweise ist bei einer vollständigen Inversion nicht möglich, da hier der Mittelbereich selbst gegen null strebt.

### 3.3 Modellrechnungen im Ort-Frequenz-Bereich

Periodische Variationsfelder beliebiger Geometrie in Ebenen  $z = \text{const.}$  könnte man in folgender Weise behandeln: Es soll die Feldkomponente  $B(\omega, \underline{r})$  aus der Feldkomponente  $A(\omega, \underline{r})$  abgeleitet werden, wobei  $A$  in der gesamten Betrachteten Ebene bekannt sein soll. Das Verhältnis von  $B$  zu  $A$  sei im Frequenz-Wellenzahlbereich durch die Übertragungsfunktion  $f(\omega, \underline{k})$  gegeben. Man zerlegt dementsprechend  $A$  zunächst in seine räumlichen Spektralkomponenten, multipliziert diese mit  $f$  und erhält durch eine inverse Fouriertransformation des Produktes die gesuchte Feldkomponente  $B$  im  $(\omega, \underline{r})$ -Bereich. Hierbei ist zu beachten, daß zur Berechnung von  $B$  an einem Punkt  $r = r_0$  die gesamte Verteilung von  $A$  mit gleichem Gewicht eingeht. Tatsächlich wird jedoch der Verteilung von  $A$  in der unmittelbaren Umgebung von  $r_0$  ein größeres Gewicht zukommen, und zwar ist die Fouriertransformierte von  $f$  im  $(\omega, \underline{r})$ -Bereich eine hierzu geeignete Gewichtsfunktion.

Zur Vereinfachung sei angenommen, daß das Feld in x-Richtung quasi-homogen ist. Bezeichnet  $F(\omega, y)$  die Transformierte von  $f(\omega, k_y)$  entsprechend Anhang A, so erhält man nach dem Faltungssatz der Fouriertransformation  $B(\omega, y)$  durch eine Faltung von A mit F:  $B = F * A$ .

Die bei 1-dimensionalen Induktionsproblemen auftretenden Faltungskerne F klingen mit wachsendem y mehr oder weniger schnell ab, so daß die Verteilung von A mit zunehmender Entfernung  $|r-r_0|$  immer weniger zu dem Faltungsintegral beiträgt. Eine Ausnahme bildet der Kern  $F = K^-$ , der zur Berechnung der Horizontalkomponente aus der Vertikalkomponente des magnetischen Feldes dient und für  $y \rightarrow \infty$  gegen einen festen Wert strebt:

$$K^-(\omega, \infty) = [2 \cdot C_{II}(\omega, k=0)]^{-1}$$

Ein Maß für die "Reichweite" der Kerne in y-Richtung ist der Modulus von  $C(\omega, k)$  für  $k \rightarrow 0$ . Angaben zur Berechnung von F und zur numerischen Durchführung der Faltung enthält Anhang A. Die im folgenden benutzten Kerne sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt. Der Faltungskern der dritten Spalte ist dabei stets die Transformierte der Übertragungsfunktion in der zweiten Spalte, wobei gelegentlich ein konstanter Faktor ausgeklammert worden ist. Fig. 2 zeigt die in der 5. Spalte von Tabelle 1 angegebenen Kerne für einen idealen Leiter in der Tiefe h unter einer nicht-leitenden Bedeckung.

Ist die zu faltende Funktion nahezu konstant innerhalb der durch  $|C(\omega, 0)|$  gegebenen Reichweite des Kerns, so kann sie als Konstante  $A \approx A_0$  vor das Integral gezogen werden:

$$B = A_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, y) dy = A_0 \cdot f(\omega, k=0).$$

Das Integral über F ist in der vierten Spalte angegeben. Hat es einen endlichen und von der Leitfähigkeit des Untergrundes bestimmten Wert, so läßt sich mit dem betreffenden Komponentenpaar eine induktive Sondierung auch im Falle eines quasi-homogenen Primärfeldes vornehmen.

Tabelle 1: Übertragungsfunktionen für 2-dimensionale TE-Felder über lateral-homogenem

Substratum:  $\underline{H} = (0, H_y, H_z)$ ,  $\underline{E} = (E_x, 0, 0)$

Übertragungsfunktion	$(\omega, k_y, z)$ - Bereich	$(\omega, y, z)$ - Bereich	$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, y) dy$	$F(y)$ für idealen Leiter <sup>2.)</sup> in der Tiefe h
$H_z : H_y$ Beziehungen 1.)	$H_y = (ik_y C_{II})^{-1} H_z$ $H_z = ik_y C_{II} H_y$ $E_x = Z_{II} H_y$	$H_y = K_{II} * H_z$ $H_z = M_{II} * H_y$ $E_x = i\omega\mu_0 (N_{II} * H_y)$	0	$[2h \operatorname{Tg}(\pi u)]^{-1}, u=y/2h$
Impedanz ( $Z_{II} = i\omega\mu_0 C_{II}$ )			$C_{II}(\omega, 0)$	$-[2h \sin(\pi u)]^{-1}$
Innerer: äußerer Anteil	$H_y^i = s_{II} H_y^e$ $E_x = (1+s_{II}) Z_{II} H_y^e$ $H_z = ik_y C_{II} (1+s_{II}) H_y^e$	$H_y^i = P * H_y^e$ $E_x = i\omega\mu_0 (Q * H_y^e)$ $H_z = R * H_y^e$	1	$\pi^{-1} \ln[\operatorname{Ctg}(\pi u/2)]$
E-Feld: Schichtstrom in dünnen Schichten (Gilt nur für anomalen Anteil)	$E_x = Z_{II} \frac{1+s_{II}}{2} j_x$	$E_x = i\omega\mu_0 (S * j_x)$	$2C_{II}(\omega, 0)$	$[2\pi h (1 + u^2)]^{-1}$
			0	$(2\pi)^{-1} \ln(1 + u^{-2})$
			$C_{II}(\omega, 0)$	$(\pi y)^{-1} [(1+u^{-2})^{-1} - 1]$
				$(4\pi)^{-1} \ln(1 + u^{-2})$

1.) für effektiv nicht-leitenden Untergrund:  $C_{II} \rightarrow |k_y|^{-1}$ ,  $K_{II}^{-1}$ ,  $M_{II}^{-1}$ ,  $N_{II} \rightarrow K = (\pi y)^{-1}$

2.)  $C_{II} = \operatorname{Tg}(k_y h) / k_y$

Tabelle 2: Übertragungsfunktionen für 2-dimensionale TM-Felder  
 über lateral-homogenem Substratum,  $\underline{H} = (H_x, 0, 0)$ ,  $\underline{E} = (0, E_y, E_z)$

Übertragungsfunktion	$(\omega, k_y, z)$ - Bereich	$(\omega, y, z)$ - Bereich
$E_z : E_y$ Beziehungen	$E_y = (ik_y C_I)^{-1} E_z$ $E_z = ik_y C_I E_y$	$E_y = K_I \ast E_z$ $E_z = M_I \ast E_y$
Admittanz	$H_x = -\sigma C_I E_y$	$H_x = -\sigma(N_I \ast E_y)$

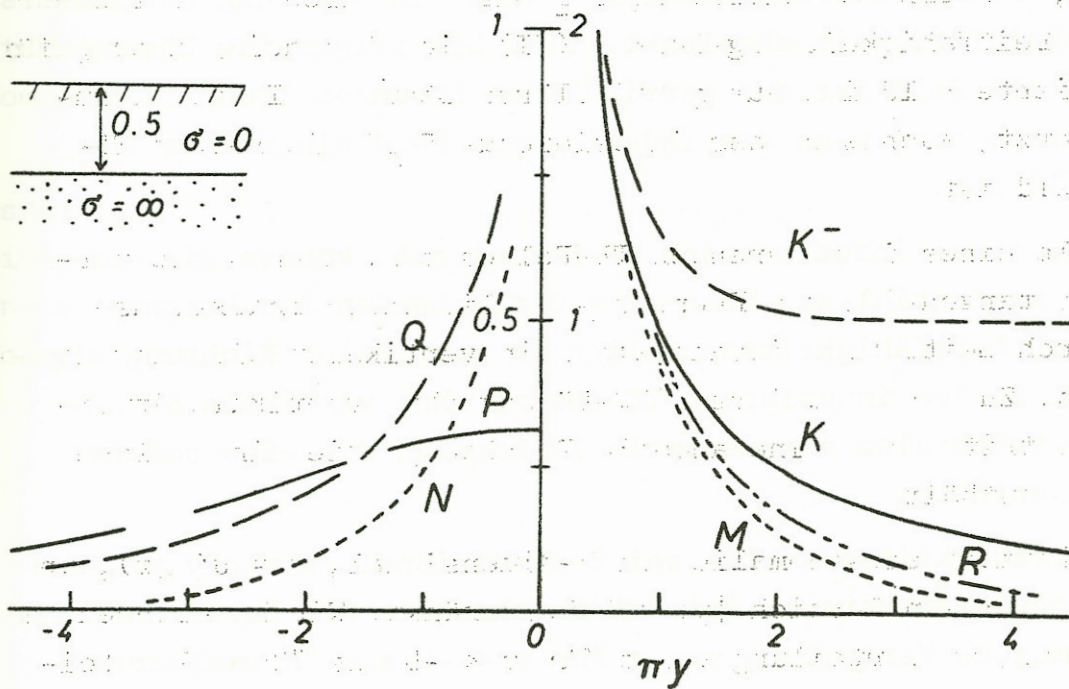


Fig. 2: Faltungskerne der Tabelle 1 für ein induzierendes TE-Feld über einem idealen Leiter in der Tiefe  $z = 0.5$  Längeneinheiten. Links gerade Kernfunktionen, rechts ungerade Kernfunktionen.

#### 4. 2-dimensionale Modelle: $\sigma = \sigma(y,z)$

##### 4.1 Ausgangsgleichungen und Stetigkeitsbedingungen

Der untere Halbraum möge für eine bestimmte Frequenz im Bereich der Eindringtiefe laterale "Leitfähigkeitsanomalien" aufweisen. Sie bewirken zwei grundsätzliche Komplikationen gegenüber 1-dimensionalen Induktionsproblemen: (I) Die Diffusion erfolgt im Bereich solcher Anomalien nicht mehr ausschließlich in vertikaler Richtung, sondern der Hilfsvektor  $\underline{P}$  wird in Richtung auf Zonen erhöhter Leitfähigkeit abgelenkt. (II) Die allgemeine Lösung für das induzierte Feld ist aus partikulären Lösungen I und II zusammengesetzt, auch wenn das induzierende Feld ein reines TE- oder TM-Feld ist.

Im Falle eines induzierenden TE-Feldes z.B. können die normalerweise tangential zur Ebene  $z = 0$  fließenden Induktionsströme durch Leitfähigkeitsanomalien in vertikaler Richtung abgelenkt sein. Zu der induzierten TE-Lösung ohne vertikale Stromkomponente tritt also eine anomale TM-Lösung, die eine solche Komponente enthält.

Die Leitfähigkeitsanomalie sei 2-dimensional,  $\sigma = \sigma(y,z)$ , und auf einen gewissen Bereich  $|y| < L$  beschränkt. Wir bezeichnen die lateral-homogene Verteilung von  $\sigma$  für  $y < -L$  als "Normalverteilung"  $\sigma_n$  und setzen

$$\sigma(y,z) = \sigma_n(z) + \sigma_a(y,z) \quad (7)$$

mit  $\sigma_a = 0$  für  $y < -L$  und  $\sigma_a = \sigma_N(z) - \sigma_n(z)$  für  $y > L$ .

Das zu  $\sigma_n$  gehörige "normale" Variationsfeld  $\underline{H}_n, \underline{E}_n$  läßt sich für ein vorgegebenes primäres TE-Feld nach den Methoden von Abschnitt 3 berechnen. Im Bereich der Leitfähigkeitsanomalie  $\sigma_a(y,z)$  kommt im induzierten Anteil eine "Induktionsanomalie"  $\underline{H}_a, \underline{E}_a$  hinzu, die für  $y \ll -L$  verschwindet und für  $y \gg L$  gegen berechenbare konstante Werte strebt. Das Gesamtfeld erhält man durch eine Superposition von Induktionsanomalie und Normalfeld:  $\underline{H} = \underline{H}_n + \underline{H}_a, \underline{E} = \underline{E}_n + \underline{E}_a$ . Da die Feldgleichungen (1) für  $\underline{H}$  und  $\underline{E}$

linear sind, dürfen sie für den normalen und anomalen Feldanteil getrennt behandelt werden. Sie lauten für den anomalen Anteil

$$\operatorname{rot} \underline{H}_a = \sigma_a \underline{E}_n + \sigma \underline{E}_a, \quad (8a)$$

$$\operatorname{rot} \underline{E}_a = -i\omega\mu_0 \underline{H}_a \quad (8b)$$

mit  $\operatorname{rot} \underline{H}_n = \sigma_n \underline{E}_n$  und  $\operatorname{rot} \underline{E}_n = -i\omega\mu_0 \underline{H}_n$ . Bei ihrer Lösung ist zu beachten, daß die Quellen des anomalen Anteils ausschließlich im unteren Halbraum liegen und daß zur Bestimmung der Induktionsanomalie eine Lösung für das Normalfeld vorliegen muß.

Um ein 2-dimensionales anomales Feld zu erhalten, ist voraussetzen, daß das Normalfeld in x-Richtung quasi-homogen im Bereich der Leitfähigkeitsanomalie ist. Dies schließt die Forderung ein, daß sich die y-Komponente von  $\underline{E}_n$  und die x-Komponente von  $\underline{H}_n$  auch in y-Richtung quasi-homogen verhalten. Für das TE-Normalfeld

$$\underline{E}_n = [E_{nx}(y,z), E_{ny}(z), 0],$$

$$\underline{H}_n = [H_{nx}(z), H_{ny}(y,z), H_{nz}(y,z)]$$

gelten sich also mit den Bezeichnungen von Tabelle 1 und 2 folgende Beziehungen:

$$E_{nx} = i\omega\mu_0 [Q * H_y^e],$$

$$H_{ny} = H_y^e + P * H_y^e, \quad (9)$$

$$H_{nz} = M * H_{ny},$$

$$E_{ny} = -2Z_{II}(\omega, k=0) H_x^e,$$

$$H_{nx} = 2 H_x^e.$$

Ist  $H_{ny}$  in y-Richtung quasi-homogen, so vereinfachen sich die drei ersten Gleichungen zu

$$E_{nx} = 2 Z_{II}(\omega, 0) H_y^e,$$

$$H_{ny} = 2 H_y^e, \quad (9a)$$

$$H_{nz} = 0.$$

Dabei seien alle Übertragungs- und Kernfunktionen für die Ebene  $z = 0$  definiert,  $H_y^e$  ist das magnetische Primärfeld in dieser Ebene.

Das Normalfeld für  $z > 0$  läßt sich aus demjenigen für  $z = 0$  ableiten (s. Anhang A), so daß  $E_n$  und  $H_n$  im gesamten unteren Halbraum in einfacher Form berechnet werden können.

Die partikulären Lösungen I und II für das anomale Feld lassen sich in folgender Weise getrennt gewinnen:

(I) E-Polarisation: Das elektrische Normalfeld sei parallel zur Streichrichtung der Anomalie ( $E_{ny} = 0, H_{nx} = 0$ ): Da die in  $x$ -Richtung fließenden Induktionsströme in ihrer Verteilung, nicht aber in ihrer Richtung beeinflußt werden, ist die resultierende Induktionsanomalie ein reines TE-Feld,

$$\underline{E}_a = (E_{ax}, 0, 0),$$

$$\underline{H}_a = (0, H_{ay}, H_{az}),$$

wobei  $E_{ax}$  eine Lösung der anomalen Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 E_{ax} = i\omega\mu_0 (\sigma_a E_{nx} + \sigma E_{ax}) \quad (10a)$$

ist. Die zugehörige magnetische Induktionsanomalie ergibt sich aus der zweiten Feldgleichung (8b) gemäß

$$\frac{\partial E_{ax}}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_{az}, \quad \frac{\partial E_{ax}}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_{ay}. \quad (11a)$$

Alle anomalen Feldkomponenten verhalten sich an Bereichsgrenzen stetig.



(II) H-Polarisation: Das magnetische Normalfeld sei parallel zur Streichrichtung der Anomalie ( $E_{nx} = 0, H_{ny} = 0$ ): Dem normalen Stromfluß in y-Richtung überlagern sich nunmehr im Bereich der Leitfähigkeitsanomalie Stromwirbel in der (y,z)-Ebene, deren Magnetfeld senkrecht zu dieser Ebene gerichtet ist. Die resultierende Induktionsanomalie ist also ein reines TM-Feld,

$$\underline{E}_a = (0, E_{ay}, E_{az}) ,$$

$$\underline{H}_a = (H_{ax}, 0, 0) ,$$

mit

$$\nabla^2 H_{ax} = i\omega\mu_0 (\sigma_a H_{nx} + \sigma H_{ax}) \quad (10b)$$

als Diffusionsgleichung für  $H_{ax}$  und gemäß Gl. (8a)

$$\frac{\partial H_{ax}}{\partial z} = \sigma E_{ny} + \sigma E_{ay} , \quad \frac{\partial H_{ax}}{\partial y} = -\sigma E_{az} \quad (11b)$$

zur anschließenden Berechnung des anomalen elektrischen Feldes. An Bereichsgrenzen sind  $H_{ax}$  und die Tangentialkomponente von  $\underline{E}_a$  stetig.

#### 4.2 Randbedingungen

Die Induktionsanomalie muß sowohl für  $z \rightarrow +\infty$  als auch für  $z \rightarrow -\infty$  verschwinden. Die zweite Bedingung läßt sich durch folgende Randbedingungen für die Feldverteilung in der Ebene  $z = 0$  ausdrücken: Das Magnetfeld der anomalen TM-Lösung ist im nichtleitenden oberen Halbraum in quasi-stationärer Näherung null, also gilt

$$H_{ax} = 0 \quad (12a)$$

für  $z \leq 0$ . Das Magnetfeld der anomalen TE-Lösung verschwindet im oberen Halbraum für  $z \rightarrow -\infty$  als ein in quasi-stationärer Näherung quellen- und wirbelfreies Vektorfeld. Daraus folgt, daß seine Komponenten  $H_{ay}$  und  $H_{az}$  als Funktionen von y für  $z \leq 0$  den gleich-

wertigen Integraltransformationen:

$$H_{az} = K * H_{ay} , \quad H_{ay} = -K * H_{az} \quad (13a)$$

mit  $K = (\pi y)^{-1}$  als Faltungskern genügen (s. Tabelle 1). Der in diesem Zusammenhang von KERTZ (1954) eingeführte K-Operator ist hier durch eine Faltung mit der Kernfunktion K ausgedrückt worden (s. Tabelle 1).

Das elektrische Feld der anomalen TM-Lösung geht im oberen Halbraum gleichfalls als quellen- und wirbelfreies Vektorfeld gegen null. Es gilt also

$$E_{az} = K * E_{ay} , \quad E_{ay} = -K * E_{az}$$

für  $z < 0$ , wobei zu beachten ist, daß  $E_{az}$  beim Durchgang durch die  $z = 0$  Ebene wegen der Kontinuitätsbedingung des vertikalen Gesamtstromes auf null springt.

Ist der untere Halbraum im Bereich der Leitfähigkeitsanomalie von einer dünnen Deckschicht mit dem Leitwert (=integrierte Leitfähigkeit)

$$\tau(y) = \tau_n + \tau_a(y) \quad (14)$$

bedeckt ( $\tau_a = 0$  für  $y < -L$ ,  $\tau_a = \tau_N - \tau_n$  für  $y > L$ ), so sind die obigen Randbedingungen folgendermaßen zu erweitern: Gemäß der Definition einer dünnen Schicht gehen die Tangentialkomponenten von  $\underline{E}$  und die Vertikalkomponente von  $\underline{H}$  stetig durch diese Schicht hindurch, während die Tangentialkomponente von  $\underline{H}$  um den Betrag des in der Schicht fließenden Stromes springt. Bezeichnet  $\underline{j} = \tau \underline{E}_{tg}$  die Schichtstromdichte, so lautet die erste Feldgleichung in integrierter Form

$$H_y^+ - H_y^- = j_x , \quad H_x^+ - H_x^- = -j_y , \quad (15)$$

oder speziell für die Induktionsanomalie

$$H_{ay}^+ - H_{ay}^- = j_{ax} = \tau_a E_{nx} + \tau E_{ax}, \quad (16)$$

$$H_{ax}^+ - H_{ax}^- = -j_{ay} = -\tau_a E_{ny} - \tau E_{ay}.$$

Dabei bezeichnet (+) das Feld auf der Schichtoberseite  $z = -0$  und (-) das Feld auf der Schichtunterseite  $z = +0$ .

Durch Einsetzen in (12a) und (13a) folgen daraus

$$H_{ax}^- = \tau_a E_{ny} + \tau E_{ay}, \quad (12b)$$

$$K * H_{az} + H_{ay}^- = -\tau_a E_{nx} - \tau E_{ax} \quad (13b)$$

als erweiterte Randbedingungen für das anomale Feld an der Schichtunterseite.

Ist der untere Halbraum für  $z > z_2$  lateral homogen, so läßt sich das Verschwinden der Induktionsanomalie für  $z \rightarrow \infty$  gleichfalls in eine Randbedingung für  $z = z_2$  umformen. Da die primären Quellen der Anomalie zwischen  $z = 0$  und  $z = z_2$  liegen, erfolgt die Diffusion des anomalen Feldes unterhalb von  $z_2$  ausschließlich in Richtung der  $z$ -Achse. Es gelten somit für das anomale Feld in der Ebene  $z = z_2$  die gleichen Integraltransformationen wie für das Normalfeld, nämlich

$$H_{ay} = K_{II}^- * H_{az}, \quad (17)$$

$$E_{ay} = K_I^- * E_{az} \quad (18)$$

mit den Kernbezeichnungen von Tabelle 1 und 2. Dabei ist für  $E_{az}$  der Wert unterhalb der  $z_2$ -Ebene einzusetzen. Ist außerdem ein gewisser Tiefenbereich  $0 < z < z_1$  oberhalb der Leitfähigkeitsanomalie lateral homogen, so lassen sich für die Ebene  $z = z_2$  ( $z_1 < z_2$ ) Kernfunktionen  $K_I^+$  und  $K_{II}^+$  angehen, die dafür sorgen, daß die Randbedingungen (12) und (13) für  $z = 0$  erfüllt sind.

Im folgenden soll aber die obere Begrenzung der Leitfähigkeitsanomalie mit der Ebene  $z = 0$  zusammenfallen ( $z_1 = 0$ ), so daß sich eine spezielle Berechnung der Kerne  $K_I^+$  und  $K_{II}^+$  erübrigt.

#### 4.3 Die Normierung des anomalen Anteils

Das Normalfeld sei zunächst als quasi-homogen angenommen, so daß der Zusammenhang zwischen den normalen Feldkomponenten gemäß Gl. (9) und (9a) durch lineare Übertragungsfunktionen hergestellt wird. Desgleichen läßt sich das Normalfeld in der Tiefe  $z$  aus demjenigen in der Ebene  $z = 0$  durch eine nur von  $\omega$  und  $z$  abhängige Funktion ableiten (Anhang B). Daraus folgt unmittelbar, daß auch der anomale und normale Feldanteil in einem linearen Zusammenhang stehen. Führt man nämlich für E-Polarisation anomale Übertragungsfunktionen in der Form

$$(10a) \quad \left. \begin{aligned} E_{ax}(y,z) &= e_{xy}(y,z) \\ H_{ay}(y,z) &= h_{yy}(y,z) \\ H_{az}(y,z) &= h_{zy}(y,z) \end{aligned} \right\} H_{ny}(z=0)$$

für ein festes  $\omega$  und  $\sigma_n$  ein, so lautet die Diffusionsgleichung (10a) nach Division durch  $H_{ny}(0)$

$$\nabla^2 e_{xy} = i\omega\mu_0(\sigma_a f Z_n + \sigma e_{xy})$$

mit  $f(z) = E_{nx}(z)/E_{nx}(0)$  und  $Z_n = Z_{II}(\omega, 0) = E_{nx}(0)/H_{ny}(0)$  als Oberflächenimpedanz des Normalfeldes. In entsprechender Weise können die zugehörigen Feldgleichungen (11a) und Randbedingungen (13) normiert werden, so daß die Modellrechnung auf eine Bestimmung der Übertragungsfunktionen  $e_{xy}$ ,  $h_{yy}$ , und  $h_{zy}$  beschränkt werden kann. Das anomale Feld bei H-Polarisation wird auf  $H_{nx}(0)$  normiert und durch die Übertragungsfunktionen  $e_{yx}$ ,  $e_{zx}$  und  $h_{xx}$  beschrieben.

Bei der praktischen Auswertung von Beobachtungen ist eine Trennung des normalen und anomalen Feldanteils nicht immer möglich oder zweckmäßig. Man beschränkt sich vielmehr zumeist auf Übertragungsfunktionen für das Gesamtfeld. Bezeichnen  $Z_{xy}$  und  $Z_{yx}$  die Impedanzen des Oberflächenfeldes und  $A$  das magnetische Verhältnis von Vertikal- zu Horizontalkomponente bei E-Polarisation, so gelten die Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} e_{xy} &= Z_{xy}(1 + h_{yy}) - Z_n, \\ e_{yx} &= Z_{yx} + Z_n, \\ h_{zy} &= A(1 + h_{yy}), \\ h_{yy} &= -k \times h_{zy} = -(K \times \frac{\delta e_{xy}}{\delta y}) / (i\omega\mu_0). \end{aligned}$$

Ist das Normalfeld durch eine harmonische Modulation längs der y-Achse darstellbar,  $H_{ny} = H_0 \cdot \exp(i k_y y)$ , so wird man das anomale Feld mit  $H_0$  für  $z = 0$  normieren. Die resultierenden Übertragungsfunktionen sind dann für ein vorgegebenes Modell sowohl von  $\omega$  als auch von  $k_y$  abhängig. Bei einer beliebigen Verteilung von  $H_{ny}$  längs der y-Achse wird man  $H_{ny}$  oder auch  $H_y^e$  an einem irgendwie ausgezeichneten Punkt zur Normierung benutzen (Fig.5 und 6).

#### 4.4 Modellrechnungen für inhomogene Schichten endlicher Dicke

Eine lateral inhomogene Schicht zwischen  $z_1 = 0$  und  $z_2$  sei durch horizontale und vertikale Grenzen in homogene Bereiche unterteilt. Für jeden dieser Bereiche sind die Gleichungen (10a) und (10b) in der Weise zu lösen, daß die Stetigkeits- und Randbedingungen erfüllt sind. So ist an inneren horizontalen Grenzflächen im Inneren der Schicht zu fordern, daß  $H_{ax}$ ,  $E_{ax}$ ,  $\partial E_{ax} / \partial z$  und

$$E_{ay} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_{ax}}{\partial z} - \frac{\sigma_a}{\sigma} E_{ny}$$

stetig sind. An vertikalen Grenzflächen müssen  $H_{ax}$ ,  $E_{ax}$  sowie  $\partial E_{ax} / \partial y$  und

$$E_{az} = - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_{ax}}{\partial y}$$

stetig sein.

An den oberen und unteren Begrenzungen der Schicht kommen die Randbedingungen (12) und (13) mit oder ohne Berücksichtigung einer dünnen Deckschicht hinzu. Sie lassen sich mit der Diffusionsgleichung wie folgt verbinden: Im Fall von E-Polarisation sind die Ableitungen von  $E_{ax}$  nach  $z$  für  $z = 0$  gemäß Gl. (13a), (11a) und (10a) gegeben durch

$$\frac{\partial E_{ax}}{\partial z} = K \times \frac{\partial E_{ax}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 E_{ax}}{\partial z^2} = i\omega\mu_0(\sigma_a E_{nx} + \sigma E_{ax}) - \frac{\partial^2 E_{ax}}{\partial y^2}.$$

Bezeichnet  $E_{ax}(y, \epsilon)$  das anomale E-Feld in einer kleinen Tiefe unterhalb der Ebene  $z = 0$ , so erhält man durch Einsetzen dieser Ableitungen in eine TAYLOR-Entwicklung

$$E_{ax}(y, \epsilon) = E_{ax}(y, 0) \cdot (1 + i\omega\mu_0 \sigma \frac{\epsilon^2}{2}) \quad (19)$$

$$+ E_{nx}(y, 0) \cdot i\omega\mu_0 \sigma \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon \left( K \times \frac{\partial E_{ax}}{\partial y} \Big|_{z=0} \right)$$

$$- \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 E_{ax}}{\partial y^2} \Big|_{z=0}.$$

Damit ist  $E_{ax}$  für  $z = \epsilon$  auf die Verteilung von  $E_{ax}$  längs der  $y$ -Achse in der Weise zurückgeführt worden, daß sowohl die Diffusionsgleichung im Innern der Schicht als auch die Bedingung einer verschwindenden Induktionsanomalie im oberen Halbraum erfüllt sind. In entsprechender Weise läßt sich das anomale E-Feld etwas oberhalb der unteren Begrenzung  $z_2$  auf dasjenige in dieser

Begrenzung zurückführen.

Es ist also nicht notwendig, eine Lösung der Diffusionsgleichung außerhalb der inhomogenen Schicht zu berechnen, wie es bei denjenigen Methoden notwendig ist, die auf einen Einbau von Randbedingungen verzichten. Zusammenfassende Darstellungen solcher Modellrechnungen ohne Randbedingungen findet man bei MADDEN und SWIFT (1969) sowie bei JONES und PASCOE (1971). Die Stetigkeitsbedingungen an inneren Trennflächen lassen sich durch eine ähnliche TAYLORentwicklung des Feldes in der Nähe solcher Flächen berücksichtigen.

Fig. 3 zeigt eine Zusammenfassung der Diffusionsgleichungen und Randbedingungen, die der nun folgenden numerischen Berechnungsmethode zugrunde liegen. Der inhomogene Tiefenbereich wird mit einem rechtwinkligen Netz von Gitterpunkten überdeckt, deren Abstand erfahrungsgemäß nicht größer sein soll als  $p_{\min}/2$ . Dabei ist  $p_{\min}$  der Skin-Tiefenwert für den Bereich der höchsten Leitfähigkeit. Der horizontale Abstand der Gitterpunkte darf größer oder kleiner sein als ihr vertikaler Abstand sofern das Abstandsverhältnis zwischen 1:4 und 4:1 liegt.

Für jeden Gitterpunkt wird zunächst das Normalfeld  $H_n$  und  $E_n$  mit den Methoden des Abschnitts 3 berechnet. Indem man die Diffusionsgleichungen (10) unter Wahrung der Stetigkeitsbedingungen und Randbedingungen auf Differenzgleichungen bis zur zweiten Ordnung umschreibt, erhält man für jeden Punkt im Innern der Schicht eine Beziehung, die das anomale Feld  $H_{ax}$  und  $E_{ax}$  an diesem Punkt mit dem Feld an seinen vier nächstgelegenen Nachbarpunkten verbindet (Fig. 3). Das anomale Feld eines Randpunktes wird gemäß Gl. (19) mit dem anomalen Feld längs des gesamten Randes sowie mit dem Feld an dem nächstgelegenen Punkt im Innern in Verbindung gebracht.

Die Lösung dieses Systems von Differenzgleichungen erfolgt am zweckmäßigsten durch eine zeilenweise Iteration. Für das anomale Feld an Gitterpunkten einer horizontalen Zeile erhält man ein lineares Gleichungssystem, wenn man für das Feld der Nachbarzeilen Näherungen aus einer vorangegangenen Iteration einsetzt. Handelt es sich um eine Zeile im Inneren der Schicht, so bilden

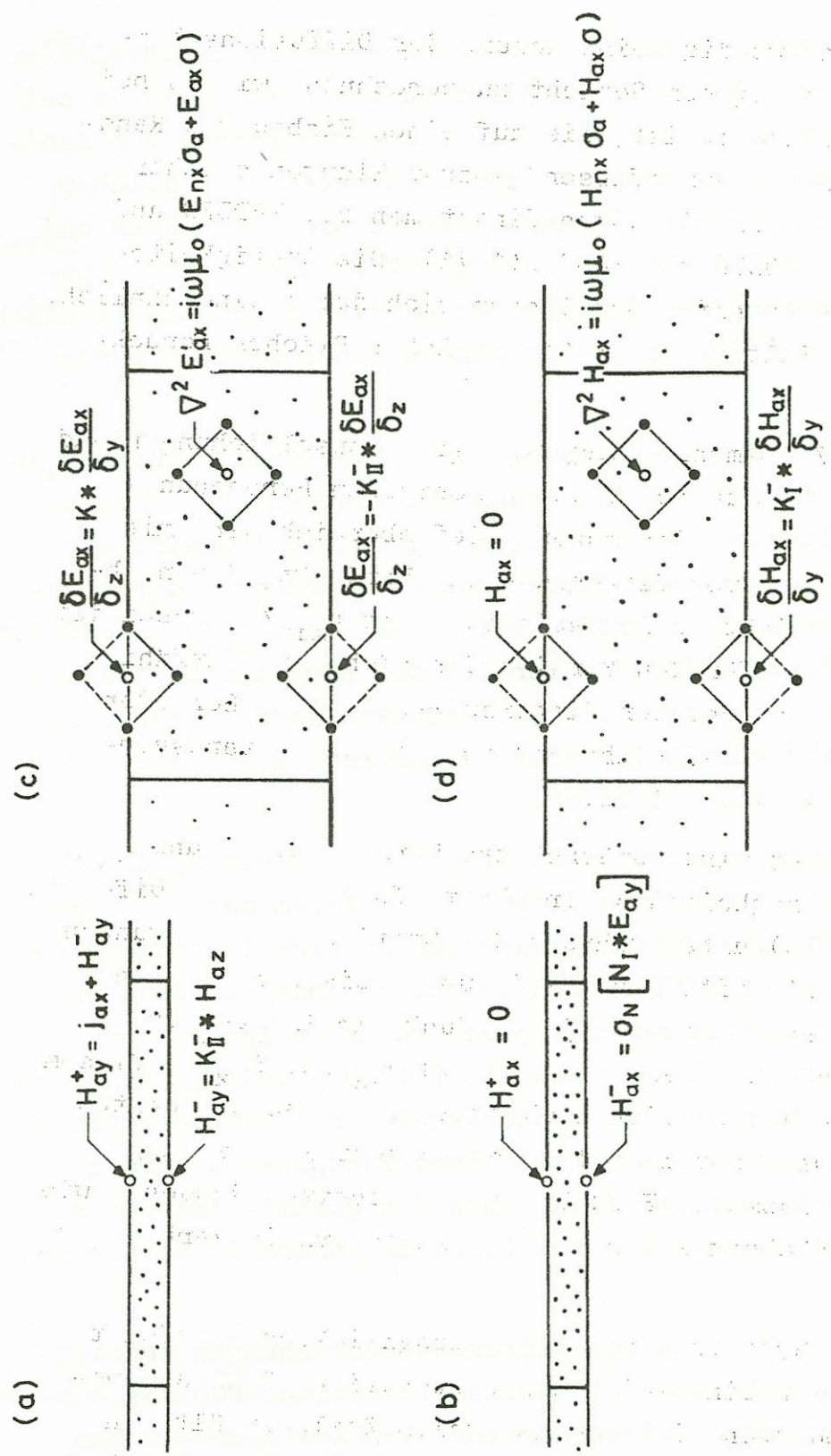


Fig. 3: Randbedingungen und anomale Diffusionsgleichungen für inhomogene Schicht über lateral homogenem Substrat. Die Schichtoberseite ist die Ebene  $z = 0$  von  $(x, y, z)$ -Koordinaten (s. Fig. 1). (a) und (b): Dünne Schicht bei E- und H-Polarisation des Normalfeldes. (c) und (d): Inhomogene Schicht endlicher Mächtigkeit bei E- und H-Polarisation.



die Koeffizienten des Gleichungssystems eine Tridiagonalmatrix. Handelt es sich um eine Randzeile, so ist die Koeffizientenmatrix von Bandgestalt.

Beginnend mit der ersten Spalte, wird das Gleichungssystem mit Hilfe einer ersten Annäherung für das Feld der zweiten Zeile gelöst. Das Ergebnis sowie eine erste Näherung für das Feld der dritten Spalte dient dann zur Berechnung des verbesserten Feldes der zweiten Spalte. Dieser Prozeß wird fortgesetzt bis der untere Rand erreicht ist und gegebenenfalls mehrfach wiederholt, Fig. 4, 5 und 6 zeigen Beispiele für Induktionsanomalien, die auf diese Weise für vorgegebene Leitfähigkeitsmodelle berechnet worden sind.

#### 4.5 Modellrechnungen für dünne inhomogene Schichten

Die Leitfähigkeitsanomalie sei auf eine unendlich dünne Schicht in der Ebene  $z = 0$  beschränkt, deren Leitwert  $\tau$  entsprechend Gl. (14) aus einem normalen Anteil  $\tau_n$  und einem anomalen Anteil  $\tau_a(y)$  besteht. Die Diffusion der Induktionsanomalie in dem angrenzenden oberen und unteren Halbraum ist durch Randbedingungen in der Weise zu regeln, daß  $E_{ax}$ ,  $E_{ay}$  und  $H_{az}$  für  $z = 0$  stetige Funktionen von  $z$  sind, die für  $z \rightarrow \pm \infty$  gegen Null gehen. Indem man mit  $z_2 = +0$  die Gl. (12b) bis (18) zusammenfaßt, erhält man als Randbedingung für die Unterseite einer inhomogenen dünnen Schicht

$$H_{ax}^- = \tau_a E_{ny} + \tau K_I^- * E_{az} ,$$

$$- (K + K_{II}^-) * H_{az} = \tau_a E_{nx} + \tau E_{ax} .$$

Aus ihnen lassen sich  $E_{az}$  und  $H_{az}$  mit Hilfe der Feldgleichungen (11a) und (11b) eliminieren, so daß sich folgende Bestimmungsgleichungen für  $H_{ax}^-$  und  $E_{ax}$  ergeben:

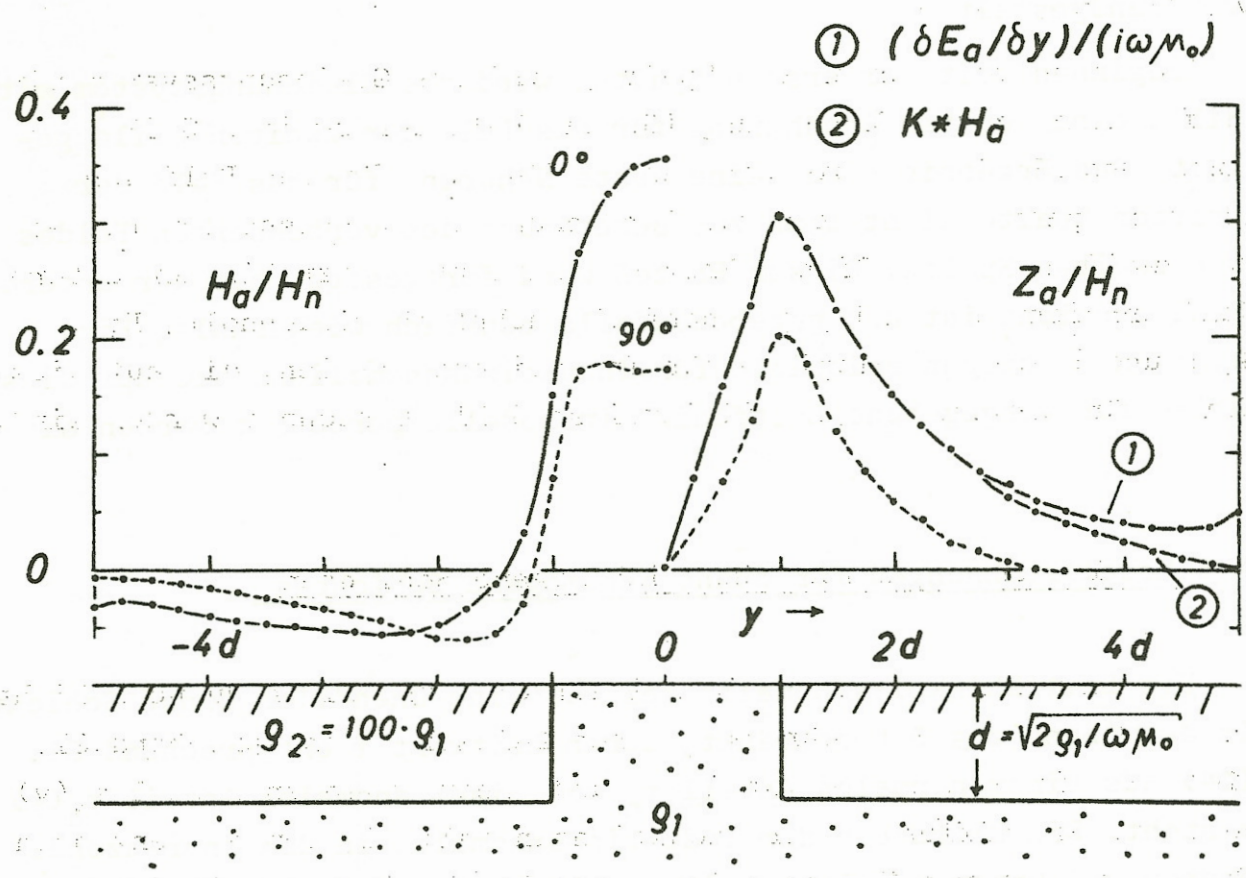


Fig. 4: Induktionsanomalie des Magnetfeldes über einem homogenen Halbraum, der mit Ausnahme eines Streifens der Breite  $2 \cdot d$  von einer hundertmal schlechter leitenden Deckschicht der Mächtigkeit  $d$  bedeckt ist,  $d$ ; Skin-Tiefe des homogenen Halbraums. Die Anomalie der magnetischen Vertikalkomponente ist (1) aus der zweiten Feldgleichung (11b) und (2) aus der Randbedingung (13a) berechnet worden. Lies  $E_{ay}$  für  $E_a$ ,  $H_{ay}$  für  $H_a$ ,  $H_{az}$  für  $Z_a$ ,  $H_{ny}$  für  $H_n$ . Das Normalfeld ist quasi-homogen.

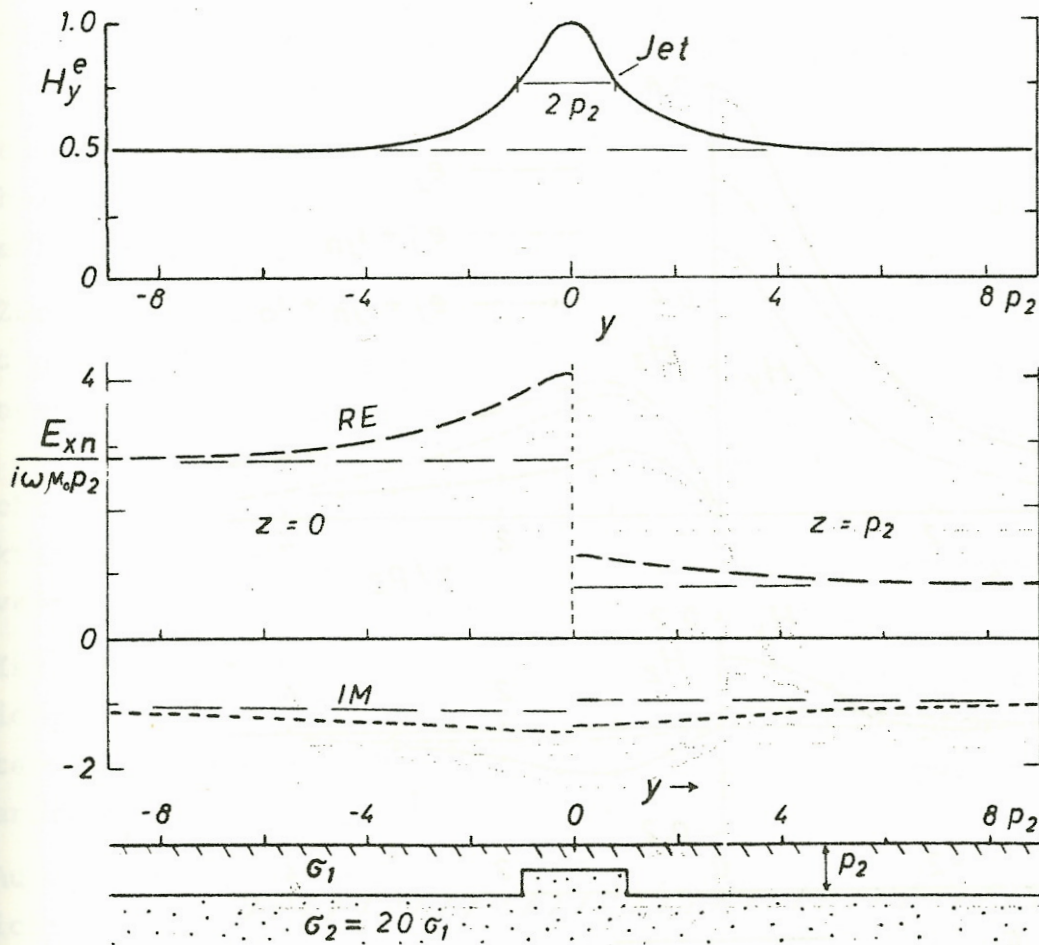


Fig. 5: Berechnung des induzierten Feldes für einen lateral inhomogenen Untergrund und ein inhomogenes induzierendes Primärfeld. Magnetische Horizontalkomponente  $H_y^e$  des Primärfeldes für  $z = 0$ , bestehend aus einem quasi-homogenen Anteil und dem Feld eines Linienstroms Jet in der Höhe  $p_2$  über dem Punkt  $y = 0$ ; elektrische Horizontalkomponente  $E_{xn}$ , berechnet für das Normalmodell, bestehend aus einer Deckschicht der Mächtigkeit  $p_2$  und einem gut-leitenden Substratum ( $p_2$ : Skintiefe des Substratums)

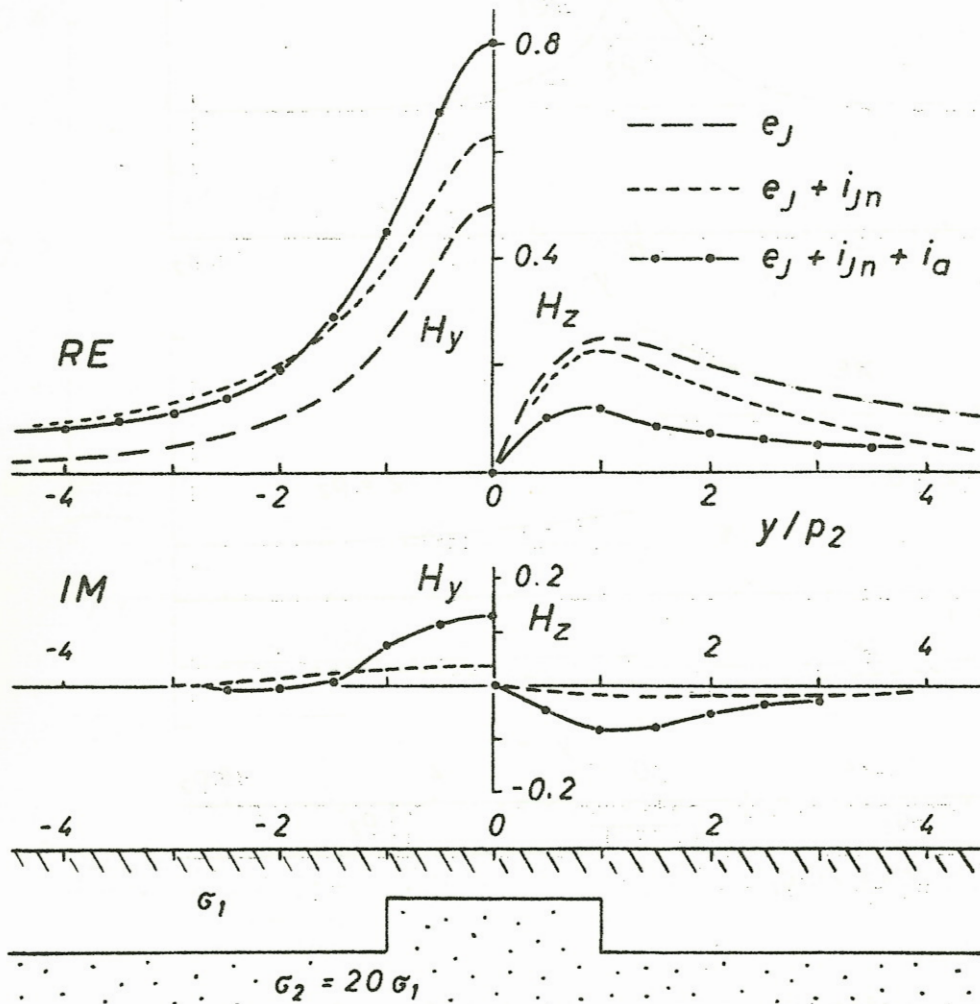


Fig. 6: Berechnung des induzierten Feldes für einen lateral inhomogenen Untergrund und ein inhomogenes induzierendes Primärfeld. Magnetische Horizontal- und Vertikalkomponente für das primäre Jetfeld ( $e_j$ ), für das zugehörige Normalfeld ohne Berücksichtigung der Leitfähigkeitsanomalie ( $e_j + i_{jn}$ ) und für das Gesamtfeld unter Einschluß der Induktionsanomalie  $i_a$  des inneren Anteils.- Alle Feldgrößen sind nach Amplitude und Phase auf  $H_y^e$  für  $y = 0$  bezogen.

$$\text{H-Polarisation: } j_{ay} = \tau_a E_{ny} + \frac{\tau}{\sigma_0} (K_{II}^- * \frac{\partial j_{ay}}{\partial y}), \quad (20)$$

$$\text{E-Polarisation: } -(K + K_{II}^-) * \frac{\partial E_{ax}}{\partial y} = i\omega\mu_0 (\tau_a E_{nx} + \tau E_{ax}).$$

Dabei ist  $H_{ax}^-$  durch die anomale Stromdichte  $j_{ay}$  ersetzt worden;  $\sigma_0$  bezeichnet die Leitfähigkeit des lateral-homogenen Substratums unterhalb der Deckschicht.

Zur numerischen Lösung an diskreten Punkten längs der y-Achse werden die Integralgleichungen (20) in ein System linearer Gleichungen überführt, deren Auflösung durch Matrixumkehr oder iterativ erfolgt. Die Koeffizientenmatrix hat wieder Bandgestalt. Man beachte, daß die induktive Wirkung des Substratums in den Kernfunktionen  $K_{II}^-$  und  $K_I^-$  enthalten ist, die für eine vorgegebene Normalverteilung  $\sigma_n(z)$  gesondert zu bestimmen sind.

Ist der untere Halbraum von einer nichtleitenden Zwischenschicht bedeckt ( $\sigma_0 = 0$ ), so ist die inhomogene Deckschicht von Leitern in größerer Tiefe isoliert und das anomale TM-Feld wird unterdrückt ( $j_{ay} = 0$ ).

Aus  $j_{ay}$  und  $E_{ax}$  lassen sich die anomalen Feldkomponenten der Schichtoberseite ( $z = -0$ ) entsprechend den Gl. (11) bis (18) berechnen. Im einzelnen gilt:

H-Polarisation	E-Polarisation
$E_{ay} = \frac{1}{\tau} j_{ay} - \frac{\tau_a}{\tau} E_{ny},$	$j_{ax} = E_{nx} \tau_a + E_{ax} \tau,$
$E_{az} = K * E_{ay},$	$H_{az} = (\frac{\partial E_{ax}}{\partial y}) / (i\omega\mu_0),$
$H_{ax}^+ = 0,$	$H_{ay}^+ = -K * H_{az} = j_{ax} + K_{II}^- * H_{az}.$

Die Randbedingungen für die dünne Schicht lassen sich auch umgekehrt für  $E_{ay}$  bei H-Polarisation und  $j_{ax}$  bei E-Polarisation formulieren. Die  $H_{ax}^-$ - $E_{ay}$ -Beziehung des anomalen TM-Feldes für die Oberfläche des Substratums  $z = +0$  lautet (Tabelle 2)

$$j_{ay} = -\sigma_0 (N_I \times E_{ay}) .$$

Sie ergibt in Verbindung mit Gl. (16)

$$-\sigma_0 (N_I \times E_{ay}) = \tau_a E_{ny} + \tau E_{ay} \quad (21a)$$

als Integralgleichung zur Bestimmung von  $E_{ay}$ . Ebenso läßt sich  $j_{ax}$  bei E-Polarisation durch eine Faltung mit einem Kern S auf das anomale E-Feld zurückführen (Tabelle 1):

$$E_{ax} = -i\omega\mu_0 (S \times j_{ax}) .$$

Diese Kernfunktion verbindet die Kontinuitätsbedingung von  $H_{az}$  mit der Bedingung einer verschwindenden Anomalie mit wachsender Entfernung von der Ebene  $z = 0$  (s. SCHMUCKER 1971, S. 163). Durch Einsetzen in (16) erhält man

$$j_{ax} = E_{nx} \tau_a - i\omega\mu_0 \tau (S \times j_{ax}) \quad (21b)$$

als Integralgleichung zur Bestimmung von  $j_{ax}$ .

Dieser zweite Weg zur Berechnung von Induktionsanomalien über dünnen Schichten ist der erstgenannten Methode dann vorzuziehen, wenn die lokale Selbstinduktion, die  $E_{ax}$  bei E-Polarisation und  $j_{ay}$  bei H-Polarisation erzeugt, klein ist ( $\omega\mu_0 \tau L \ll 1$ ). Es gilt dann in erster Näherung  $j_{ax} = E_{nx} \tau_a$  und  $E_{ay} = -E_{ny} \tau_a / \tau$  entsprechend dem OHMschen Gesetz für Leiter in Parallel- und Reihenschaltung.

Ist umgekehrt die lokale Selbstinduktion groß ( $\omega\mu_0 \tau L \gg 1$ ), die  $H_{az}$  und damit  $j_{ax}$  bei E-Polarisation und  $E_{ay}$  bei H-Polarisation unterdrückt, so wird man am zweckmäßigsten von der Gl. (20) ausgehen.

#### 4.6 Inversion von beobachteten Induktionsanomalien

Eine Interpretation durch Inversion von Beobachtungsdaten sei für zwei sehr vereinfachte Grundmodelle angegeben, wobei jeweils nur eine bestimmte Frequenz der beobachteten Induktionsanomalie berücksichtigt werden soll. Diese Art von Inversion entspricht bei lateral homogenem Untergrund der Berechnung eines scheinbaren spezifischen Widerstandes  $\rho_a$  oder  $\rho^*$  (s. Abschnitt 3.2).

(I) Der untere Halbraum bestehe aus einer nichtleitenden Deckschicht variabler Mächtigkeit und einem ideal-leitenden Substratum. Die Spur der Trennfläche  $F$  in der  $(y,z)$ -Ebene sei  $z = h^*(y)$  mit der Forderung, daß  $h^*$  für  $|y| > L$  feste Werte annimmt. Derjenige für  $y < -L$  sei der Normalwert  $h_n^*$ . Die zugehörigen Kernfunktionen zur Berechnung des Normalfeldes finden sich in der letzten Spalte von Tabelle 1.

Da der in  $F$  induzierte Schichtstrom eine völlige Annullierung des Primärfeldes im Substratum bewirken muß, werden induzierendes und induziertes Magnetfeld gleichphasig sein, und zwar in der Weise, daß der magnetische Vektor des Gesamtfeldes tangential zu  $F$  ist.

Man findet also die Spur der Trennfläche dadurch, daß man das anomale und normale Feld als Potentialfelder in den unteren Halbraum fortsetzt. Aus ihrer Summe wird diejenige Feldlinie konstruiert, die für  $y < -L$  in die Tiefe  $h_n^*$  einmündet. Dabei ist nur derjenige Anteil des anomalen Oberflächenfeldes zu verwenden, der gleichphasig mit dem Normalfeld ist. Eine gewisse Phasendrehung kann gegebenenfalls durch die Annahme einer dünnen homogenen Deckschicht in der Ebene  $z = 0$  berücksichtigt werden.

Die ermittelte Feldlinie stellt die gesuchte Spur von  $F$  dar. Beim Übergang zu endlichen Leitfähigkeiten betrachtet man  $h^*(y)$  als variable Schwerpunktstiefe des induzierten Stroms. Ist insbesondere  $C_{II}(\omega, k)$  die Übertragungsfunktion für ein quasi-homogenes Normalfeld ( $k \rightarrow 0$ ) und eine Normalverteilung  $\sigma_n(z)$ , so ist  $h_n^* = C_{II}(\omega, 0)$  zu setzen. Bei der Interpretation von mehreren Frequenzen ist also ein mit wachsender Periode zunehmender Normalwert  $h_n^*$  zu wählen.

(II) Der untere Halbraum sei lateral homogen,  $\sigma_n(z)$ , mit Ausnahme einer dünnen Deckschicht in der Ebene  $z = 0$  mit dem Leitwert  $\tau(y) = \tau_n + \tau_a(y)$ .

Löst man die Randbedingungen (20) nach  $\tau_a$  als unbekannter Anomalie auf, so erhält man in

$$\tau_a = - \frac{\sigma_0 (N_I \times E_{ay}) + E_{ay} \tau_n}{E_{ny} + E_{ay}} \quad (\text{H-Polarisation}), \quad (22)$$

$$\tau_a = - \frac{(K + K_{II}^-) \times \frac{\partial E_{ax}}{\partial y} + i\omega\mu_0 \tau_n E_{ax}}{\quad} \quad (\text{E-Polarisation})$$

Bestimmungsgleichungen zur Berechnung von  $\tau_a$  aus einer vorgegebenen Anomalie des elektrischen Feldes. Soll für E-Polarisation die Berechnung von der anomalen Vertikalkomponente des Magnetfeldes ausgehen, so gilt nach Einsetzen von (9) und (11a)

$$\tau_a = - \frac{[(K + K_{II}^-) \times H_{az}] / (i\omega\mu_0) + \tau_n (G \times H_{az})}{N_I \times H_{ny}^+ + G \times H_{az}}, \quad (22a)$$

wobei  $G(y) = 0.5 \cdot \text{sgn}(y)$  ist. Diese Kernfunktion ergibt sich, wenn man Gl. (11a) in den Wellenzahlbereich überträgt und die inverse Transformierte von  $f(k_y) = k_y^{-1}$  berechnet. Ist das Normalfeld quasi-homogen, so ist  $N_{II} \times H_{ny}$  durch  $C_{II}(\omega, 0) \cdot H_{ny}$  zu ersetzen. Das Normalmodell ist in den Kernen  $N_I$  und  $K_{II}^-$ , insbesondere aber in  $N_{II}$  bzw. in  $C_{II}$  enthalten.

Da bei dieser Inversion sowohl der phasengleiche wie auch der phasenverschobene Anteil empirischer Induktionsanomalien berücksichtigt wird, ist die resultierende Leitfähigkeitsanomalie  $\tau_a$  nicht unbedingt eine reelle Funktion von  $y$ . Es gilt daher die Normalverteilung  $\sigma_n$  und den normalen Leitwert  $\tau_n$  so zu wählen, daß der Imaginärteil von  $\tau_a(y)$  im Verhältnis zu seinem Realteil im Mittel über das Beobachtungsprofil möglichst klein ist. Da-



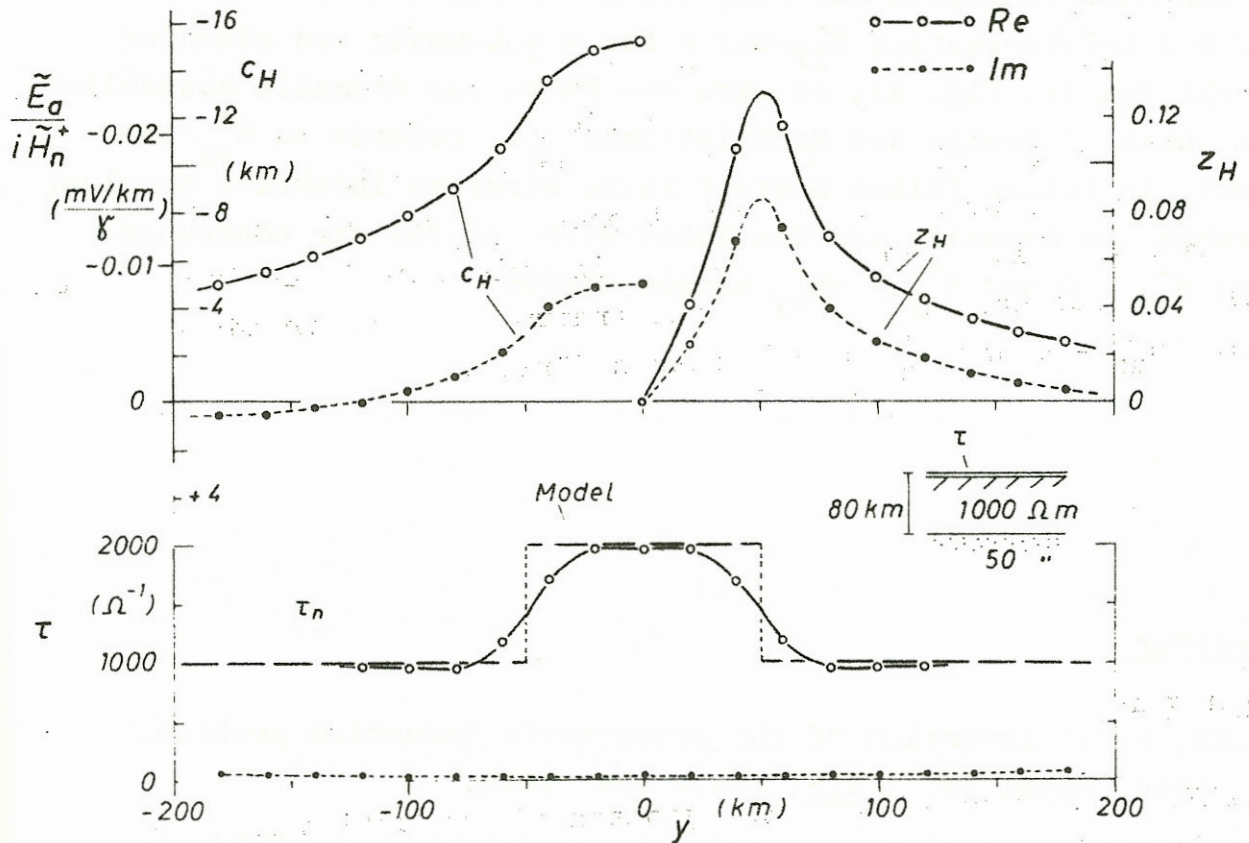


Fig. 7: Induktionsanomalie für eine inhomogene dünne Schicht über einem lateral homogenen Substratum.  $c_H = (E_{ax}/H_{ny})/(i\omega\mu_0)$ ;  $z_H = H_{az}/H_{ny}$ . Das Normalfeld ist quasi-homogen und in E-Polarisation, die Frequenz beträgt 1 cph. Wird die berechnete Induktionsanomalie durch Anwendung der Inversionsformel (22) mit einem Punktabstand von 20 km interpretiert, so erhält man die ausgezogene Kurve des Leitwertes  $\tau$  im unteren Diagramm. Das Ausgangsmodell ist gestrichelt.

durch ergibt sich eine erste Kontrollmöglichkeit für das gewählte Normalmodell. Wird das Inversionsverfahren auf mehrere Frequenzen angewandt, so sollte sich stets die gleiche Leitfähigkeitsanomalie  $\tau_a(y)$  ergeben. Aus dieser Forderung ergibt sich eine zweite Kontrolle für das Normalmodell.

Ist  $\sigma_0 = 0$ , so gilt offensichtlich  $\tau_a = -E_{ay}\tau_n/E_y$  entsprechend der von HAAK benutzten Näherung bei H-Polarisation (1970, S. 112). Sind bei E-Polarisation  $K_{II}^-$  und  $K$  für  $y \lesssim L$  wenig von einander verschieden (s. Fig. 2), so wird die Phase der Anomalie ausschließlich durch diejenige des Normalstromes  $\tau_n E_n$  relativ zu  $H_{ny}^+$  bestimmt. In beiden Fällen besteht keine wirksame induktive Kopplung zwischen der Anomalie und dem Substratum, so daß wir näherungsweise  $H_{ax}^- = 0$  und  $H_{ay}^+ = -H_{ay}^-$  setzen dürfen.

### Literatur

BAILEY, R.C.: Inversion of the geomagnetic induction problem.  
Proc. Royal Soc., 315, 185 - 194, 1970.

HAAK, V.: Das zeitlich sich ändernde, erdelektrische Feld, beobachtet auf einem Profil über den Rheingraben; eine hiervon abgeleitete Methode der Auswertung mit dem Ziel die elektrische Leitfähigkeit im Untergrund zu bestimmen.  
Dissertation, Universität München, 1970.

JONES, F.W. and L.J. PASCOE: A general computer program to determine the perturbation of alternating electric currents in a two-dimensional model of a region of uniform conductivity with an embedded inhomogeneity.  
Geophys. J., 24, 3 - 30, 1971.

KERTZ, W.: Modelle für erdmagnetisch induzierte elektrische Ströme im Untergrund. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen.  
Math.-Phys. Klasse, Abt. IIa, S. 101 - 110, 1954.

MADDEN, T., and C.M. SWIFT: Magneto-telluric studies of the electrical conductivity structure of the crust and upper mantle, in The Earth's crust and upper mantle, edited by V.V. Beloussov and J. Hart. Geophys. Monograph No. 13 of the American Geophysical Union, Washington D.C., 1969.

SCHMUCKER, U.: Interpretation of induction anomalies above non-uniform surface layers. Geophysics, 36, S.156-165, 1971.

WEIDELT, P.: Die Umkehrtaufgabe der erdmagnetischen Tiefensondierung für horizontal geschichtete Leiter. Dissertation Göttingen, 1970.

Anhang A: Berechnung und Anwendung der Übertragungsfunktionen  $F(\omega, y)$

Die Übertragungsfunktion  $F(\omega, y)$  erhält man aus der zugehörigen Übertragungsfunktion  $f(\omega, k_y)$  im Frequenz-Wellenzahlbereich durch die inverse Fouriertransformation

$$F(\omega, y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega, k_y) \exp(ik_y y) dk_y.$$

Ist  $f$ , wie z.B.  $C_{II}$ , eine gerade Funktion von  $k_y$ , so gilt

$$F(\omega, y) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} f(\omega, k_y) \cos(k_y y) dk_y;$$

für eine ungerade Funktion  $f(\omega, k_y) = -f(\omega, -k_y)$  wie z.B. für  $(ik_y C_{II})$  ist entsprechend

$$F(\omega, y) = i\pi^{-1} \int_0^{\infty} f(\omega, k_y) \sin(k_y y) dk_y.$$

Zur numerischen Berechnung von  $F$  ist also zunächst  $f(\omega, k_y)$  für ein festes  $\omega$  und ein vorgegebenes Leitfähigkeitsmodell  $\sigma = \sigma(z)$  zu bestimmen und sodann deren Cosinus-oder Sinus-Transformierte zu

bilden. Hierbei ist zu beachten, daß für  $k_y \rightarrow \infty$   $s$  gegen 0,  $C_{II}$  gegen  $|k_y|^{-1}$  und  $(k_y C_{II})$  gegen  $\text{sign}(y)$  streben.

Die Faltung einer Funktion  $B(\omega, y)$  mit  $F(\omega, y)$  ergibt bei festem  $\omega$  eine dritte Funktion  $C(\omega, y)$ :

$$C = F * B$$

oder ausführlich geschrieben

$$C(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, y-\eta) \cdot B(\omega, \eta) d\eta .$$

Ist  $F$  entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion von  $y$ , so kann man dafür auch schreiben (ohne  $\omega$ )

$$C(y) = \int_0^{\infty} F(\eta) \cdot \{ B(y-\eta) \pm B(y+\eta) \} d\eta .$$

Das obere Zeichen bezieht sich auf einen geraden Kern  $F$ , das untere Zeichen auf einen ungeraden Kern  $F$ .

Mit Ausnahme der Übertragungsfunktion  $P$  wird der Realteil der übrigen Funktion für  $y \rightarrow 0$  unendlich groß. Die geraden Kerne  $N, Q$  und  $S$  besitzen hier eine logarithmische Singularität, die ungeraden Kerne  $K, K^-, M$  und  $R$  eine  $y^{-1}$ -Singularität. Bei der Berechnung des Faltungsintegrals ist daher ein gewisser Bereich  $0 \leq \eta \leq \Delta y$  durch eine Taylor-Entwicklung der zu faltenden Funktion gesondert zu behandeln (Hartmannsche Korrektur).

Mit

$$B(y \pm \eta) = B(y) \pm \eta B'(y) + \eta^2/2 B''(\eta) \pm \dots$$

für  $\eta < \Delta y$  ergibt sich

$$C(y) = 2B(y) \cdot \int_0^{\Delta y} F(\eta) d\eta + \frac{2}{2!} B''(y) \cdot \int_0^{\Delta y} \eta^2 F(\eta) d\eta + \dots + \int_{\Delta y}^{\infty} \dots d\eta$$

für  $F(\eta) = F(-\eta)$  und

$$C(y) = -2B'(y) \int_0^{\Delta y} \eta F(\eta) d\eta - \frac{2}{3!} B'''(y) \int_0^{\Delta y} \eta^3 F(\eta) d\eta - \dots$$

$$+ \int_{\Delta y}^{\infty} \dots d\eta$$

für  $F(\eta) = -F(-\eta)$ .

Bei der Berechnung der Integrale  $\int_0^{\Delta y} \eta^n F(\eta) d\eta$  ist es zweckmäßig,  $F(\eta)$  durch  $f(k_y)$  entsprechend der ersten Gleichung auszudrücken und sodann die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen. Soll nicht die Funktion  $B(y)$  sondern ihre Ableitung  $B'(y)$  nach  $y$  mit  $F$  gefaltet werden (wie es in den Randbedingungen des inhomogenen Induktionsproblems gefordert wird), so läßt sich diese Faltung auf  $B(y)$  selbst durch partielle Integration zurückführen, wenn  $F(y)$  eine ungerade Funktion von  $y$  ist:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \cdot \{B'(y-\eta) - B'(y+\eta)\} d\eta = \int_0^{\Delta y} \dots d\eta + \int_{\Delta y}^{\infty} \dots d\eta$$

$$\int_0^{\Delta y} \dots d\eta = -2B'' \int_0^{\Delta y} \eta F(\eta) d\eta - \frac{2}{3!} B^{(IV)} \int_0^{\Delta y} \eta^3 F(\eta) d\eta \dots$$

$$\int_{\Delta y}^{\infty} \dots d\eta = F(\Delta y) \{ B(y - \Delta y) + B(y + \Delta y) \} - F(\infty)$$

$$\{ B(-\infty) + B(\infty) \} + \int_{\Delta y}^{\infty} F'(\eta) \cdot \{ B(y-\eta) + B(y+\eta) \} d\eta$$

Der Vorteil dieser Umformung für numerische Rechnungen liegt darin, daß nun mehr Funktionswerte von  $B$  direkt verwandt werden können und daß die differenzierte Übertragungsfunktion  $F'(\eta)$  in den hier betrachteten Fällen mit wachsendem  $\eta$  schneller abklingt als  $F(\eta)$ . Im Fall von  $F = K = (\pi y)^{-1}$  ist  $F' = -\pi^{-1} y^{-2}$  und für  $F = K^-$  erhält man nach einigen Umformungen

$$K^- = K + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_y C_{II}} - 1 \right\} \sin(k_y y) dk_y$$

$$(K^-)' = -\frac{1}{\pi y^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ C_{II}^{-1} - k_y \right\} \cos(k_y y) dk_y .$$

Die durch Faltung mit  $B'$  erzeugte Funktion  $C$  wird also im wesentlichen durch  $B$  in der näheren Umgebung des Aufpunktes  $\eta = y$  bestimmt, weshalb die Taylor-Entwicklung hier bis zu Gliedern höherer Ordnung durchzuführen ist.

Anhang B: Berechnung der Übertragungsfunktionen  $C_I$  und  $C_{II}$  für geschichtete Medien im Wellenzahl-Frequenz-Bereich

$d_n, \sigma_n$  : Mächtigkeit und Leitfähigkeit der  $n$ -ten Schicht,  $n = 1, 2, \dots, N$  von oben nach unten gezählt ( $d_N = \infty$ ).

$z_n$  : Tiefe der oberen Begrenzung der  $n$ -ten Schicht unter  $z = 0$  - Ebene (Erdoberfläche).

$i\omega\mu_0 C_{nII}$  : Impedanz eines TE-Feldes in der Tiefe  $z = z_n$ .

$\sigma_n C_{nI}$  : Admittanz eines TM-Feldes in der Tiefe  $z = z_n + \epsilon$ .

$$K_n^2 = i\omega\mu_0 \sigma_n + k_y^2$$

Für die Oberfläche des homogenen Substratums in der Tiefe  $z = z_N$  gilt

$$C_{nI} = C_{nII} = K_N^{-1} .$$

Impedanz und Admittanz für die darüberliegenden Schichtgrenzen  $z_{N-1}, z_{N-2}, \dots, 1$  ergeben sich aus der Stetigkeitsbedingung der tangentialen Feldkomponenten nach der Rekursionsformel

$$C_n = \frac{C_{n+1} K_n + q_n \operatorname{Tg}(d_n K_n)}{K_n \{ q_n + C_{n+1} K_n \operatorname{Tg}(d_n K_n) \}}$$

mit  $q_n = 1$  für TE-Felder und  $q_n = \sigma_n / \sigma_{n+1}$  für TM-Felder.

Es sei  $z = z_0$  eine Ebene innerhalb der n-ten Schicht ( $z_n < z_0 < z_{n+1}$ ). Das Feld in dieser Ebene folgt aus demjenigen in der Ebene  $z = 0$  gemäß

$$\frac{E_x(z_0)}{E_x(0)} = g(z_1, z_2) \cdot g(z_2, z_3) \dots g(z_n, z_0),$$

$$\frac{H_y(z_0)}{H_y(0)} = h(z_1, z_2) \cdot h(z_2, z_3) \dots h(z_n, z_0),$$

mit

$$g(z_r, z_s) = \cos \alpha - (\sin \alpha) / (K_r C_r),$$

$$h(z_r, z_s) = \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (K_r C_r),$$

$$\alpha = K_r \cdot (z_s - z_r).$$