

P. WEIDELT, Göttingen

"Zur Frequenzabhängigkeit von Übertragungsfunktionen"

Dienstag, den 14.9.1971

1. Einleitung

Übertragungsfunktionen (Üfktn.) erweisen sich immer mehr als der geeignetste Ausgangspunkt zur Interpretation experimenteller Daten. Theoretische Überlegungen zeigen, daß Üfktn. keine beliebigen Funktionen der Frequenz sein können, sondern erheblichen Einschränkungen unterliegen. Ermittelt man diese Einschränkungen unter gewissen Modellvoraussetzungen, und findet dann, daß sie bei experimentellen Daten teilweise nicht erfüllt sind, so existiert kein Modell, das gleichzeitig den Modellvoraussetzungen genügt und die Daten interpretiert, oder: experimentelle und theoretische Kurven werden sich in diesem Fall an einigen Stellen nie ganz zur Deckung bringen lassen, soviel man auch die Modellparameter verändern mag. Setzt man beispielsweise voraus, daß sich die Leitfähigkeit nur mit der Tiefe ändert und daß ein quasihomogenes Feld induziert, so darf der doppelt-logarithmisch aufgetragene scheinbare Widerstand als Funktion der Frequenz theoretisch keine größere Steigung als  $+45^\circ$  aufweisen. Haben experimentelle Daten an einer Stelle eine größere Steigung, so wird sich in deren Umgebung keine Übereinstimmung zwischen experimentellen und theoretischen Sondierungskurven erreichen lassen.

Die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit von Üfktn. und die Aufstellung handlicher notwendiger Kriterien für die Interpretierbarkeit von Üfktn. hat deshalb durchaus einen praktischen Sinn. Leider lassen sich bisher nur für einen speziellen Typ von Üfktn. relativ weitreichende Aussagen machen (Abschnitt 3), während der allgemeine Fall noch offen ist (Abschnitt 2).

## 2. Allgemeine Übertragungsfunktionen

Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, denke man etwa an eine zwei- oder dreidimensionale Leitfähigkeitsanomalie in der ein homogenes magnetisches Horizontalfeld mit den Komponenten  $H_e(t)$  und  $D_e(t)$  induziert. Die am Ort  $\underline{r}$  zur Zeit  $t$  induzierte Vertikalkomponente  $Z(\underline{r}, t)$  hängt dann linear von den Werten von  $H_e$  und  $D_e$  zu allen früheren Zeitpunkten  $t - \tau$  ( $\tau > 0$ ) ab:

$$Z(\underline{r}, t) = \int_0^{\infty} \{a(\underline{r}, \tau) H_e(t - \tau) + b(\underline{r}, \tau) D_e(t - \tau)\} d\tau. \quad (1)$$

$a$  und  $b$  sind dabei die Üfkn. im Zeitbereich; die Ortsabhängigkeit wird im folgenden unterdrückt.

Die Anwendung des Faltungssatzes auf (1) liefert

$$\tilde{Z}(\omega) = A(\omega) \tilde{H}_e(\omega) + B(\omega) \tilde{D}_e(\omega) \quad (2)$$

Dabei sind  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{H}_e$ ,  $\tilde{D}_e$  die Fouriertransformierten von  $Z$ ,  $H_e$ ,  $D_e$  und

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

wenn als Zeitfaktor  $e^{+i\omega\tau}$  gewählt wird. Für  $B$  gilt Entsprechendes.  $A$  und  $B$  sind die Üfkn. im Frequenzbereich. Das Integral (3) konvergiert außer für reelles  $\omega$  auch für alle  $\omega$  mit negativem Imaginärteil. Als Folge der Kausalitätsforderung ist deshalb  $A(\omega)$  in der unteren  $\omega$ -Halbebene analytisch, während in der oberen Halbebene Singularitäten auftreten. Aus (3) folgt die Symmetriebeziehung

$$A^*(\omega) = A(-\omega^*) \quad (4)$$

(\* bezeichnet die konjugiert-komplexe Größe), die zunächst nur in der unteren Halbebene gilt, aber durch analytische Fortsetzung auf die obere Halbebene übertragen werden kann. Nimmt man an, daß  $A(\omega)$  nur Pole besitzt, so liegen sie aufgrund von (4) entweder symmetrisch zur positiv-imaginären  $\omega$ -Achse, oder auf dieser Achse selbst. Die Pole sind mit den Eigenfrequenzen des Systems identisch, denn es sind die Frequenzen, für die ein  $\tilde{Z}$  auftreten kann, ohne daß ein anregendes Feld  $\tilde{H}_e$  und  $\tilde{D}_e$  existiert. Für die Systeme der Tiefenson-

dierung, die sich nur aus ohmschen Widerständen und Induktivitäten aufbauen (in denen also Kapazitäten fehlen), kommt als "Eigenschwingung" nur der freie Zerfall von Stromsystemen mit seinen exponentiell abklingenden Zeitfunktionen  $\exp(-t/\tau_n)$  infrage. Die Pole  $\omega_n$  der in der Tiefensondierung benutzten Üfktn. liegen daher sämtlich auf der positiv-imaginären  $\omega$ -Achse und sind mit den Zerfallszeiten  $\tau_n$  durch  $\omega_n = i/\tau_n$  verknüpft. Eine Üfktn. besitzt deshalb die schematische Darstellung

$$A(\omega) = \sum_n \frac{a_n}{b_n + i\omega} + A(\infty), \quad a_n \text{ reell, } b_n \geq 0. \quad (5)$$

Im Einzelfall muß die Summe etwa durch ein Integral, durch eine Summe mit endlich vielen Gliedern + Integral, durch eine Mehrfachsumme oder ein Mehrfachintegral ersetzt werden. Ferner sind Modifikationen erforderlich, wenn  $A$  für  $\omega \rightarrow \infty$  nicht gegen eine Konstante strebt.

Die Untersuchung der Polstellen ist von Interesse, weil sie wegen der Äquivalenz zwischen Funktionentheorie und zweidimensionaler Potentialtheorie eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf der Üfktn. auf der reellen Frequenzachse vermitteln kann: Fließt durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  ein Linienstrom der Stromstärke  $I$ , so sind seine Magnetfeldkomponenten  $H_x, H_y$  im Punkt  $(x, y)$  gegeben durch

$$H_x - iH_y = \frac{I}{2\pi i(z - z_0)}, \quad z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Identifiziert man  $z$  mit  $\omega$ , so läßt sich Real- und Imaginärteil von  $A(\omega)$  als Horizontal- bzw. Vertikalkomponente eines Magnetfeldes deuten, das auf der positiv-imaginären  $\omega$ -Achse in den Punkten  $ib_n$  angeordnete Linienströme der Stärke  $2\pi a_n$  im Punkt  $\omega$  erzeugen. Diesem Magnetfeld ist noch ein homogenes Horizontalfeld  $A(\infty)$  überlagert. Aus der Lage der Quellen ist ersichtlich, daß das auf der reellen Frequenzachse beobachtete "Feld" keine starken Gradienten oder gar Unstetigkeiten aufweisen darf. Auf der reellen Frequenzachse gelten für  $A(\omega)$  die Umrechnungsformeln zwischen den Komponenten eines zweidimensionalen äußeren Magnetfeldes, (SIEBERT & KERTZ 1957), d.h. wenn

$$A(\omega) - A(\infty) = g(\omega) - ih(\omega)$$

gesetzt wird, gilt

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{x - \omega} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{xh(x)}{x^2 - \omega^2} dx,$$

(6)

$$h(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x - \omega} dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega g(x)}{x^2 - \omega^2} dx.$$

Verwendung finden dabei die aus (4) folgenden Beziehungen  $g(-\omega) = g(\omega)$ ,  $h(-\omega) = -h(\omega)$ . Während die Umrechnung zwischen Real- und Imaginärteil immer möglich ist, existieren Umrechnungsformeln zwischen Betrag und Phase nur dann, wenn  $A(\omega)$  in der unteren Halbebene auch nullstellenfrei ist (da jetzt  $\log A$  betrachtet wird). Im allgemeinen ist dies jedoch nicht erfüllt.

Mit Hilfe der "Dispersionsrelationen" (6) läßt sich die Konsistenz zwischen Real- und Imaginärteil von experimentell ermittelten Üfktn. überprüfen. Ein unerwünschter "innerer" Anteil kann mit Hilfe bekannter Trennungsformeln abgespalten werden. Praktisch stößt diese Methode wegen des benötigten großen Frequenzintervalls auf Schwierigkeiten. Die Dispersionsrelationen sind auch nur ein relativ schwaches Kriterium für die Interpretierbarkeit von Üfktn., da sie für eine beliebige Polverteilung in der oberen  $\omega$ -Halbebene gelten und die spezielle Lage der Pole auf der positiv-imaginären Achse nicht hinreichend berücksichtigen. Bequeme Kriterien, die hierauf Bezug nehmen, lassen sich bisher jedoch nur für den Spezialfall angeben, daß in (5) alle Residuen  $a_n$  das gleiche Vorzeichen haben, also etwa positiv sind.

### 3. Übertragungsfunktionen mit positiven Residuen

Zu diesem Typ gehören insbesondere alle Üfktn. für horizontal oder kugelsymmetrisch geschichtete Leiter unter Voraussetzung einer einzigen induzierenden räumlichen Harmonischen. Betrachtet man etwa

einen ebenen Leiter und sind  $E(z, \omega)$  und  $H(z, \omega)$  die komplexen Amplituden von orthogonalen Horizontalkomponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes, deren Richtungen mit der positiven  $z$ -Richtung ein Rechtssystem bilden, so definiert man eine Üfktn.  $c(\omega)$  zweckmäßig durch

$$c(\omega) = \frac{E(0, \omega)}{i\omega\mu_0 H(0, \omega)} = - \frac{E(0, \omega)}{E'(0, \omega)} \quad (E' = \partial E / \partial z). \quad (7)$$

Ist  $\sigma(z)$  die elektrische Leitfähigkeit und  $\int \sqrt{\sigma} dz < \infty$ , wobei erlaubt ist, daß  $\sigma$  zum Abschluß von einem endlichen Wert auf unendlich springt, so gilt

$$c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n + i\omega} \quad a_n > 0, \quad b_n \geq 0. \quad (8)$$

Ist  $\int \sqrt{\sigma} dz$  dagegen unbeschränkt, so ist die Summe in (8) durch ein Integral zu ersetzen, zu dem gegebenenfalls noch eine Summe mit endlich vielen Gliedern treten kann. Alle folgenden Schlüsse gelten auch für diesen Fall. Erwähnt sei als Beispiel der homogene Halbraum ( $\sigma = \sigma_0$ ) mit einem quasihomogenen Feld:

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu_0\sigma_0}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+i\omega)}$$

Die Summe (8) besteht aus unendlich vielen Gliedern, wobei für großes  $n$  das Residuum  $a_n$  gegen eine Konstante strebt und  $b_n \sim n^2$  wächst. Es gibt jedoch auch Leitfähigkeitsverteilungen von beschränkter Realität, die durch endlich viele Summanden beschrieben werden. Dies sind die aus dünnen Schichten aufgebauten Modelle. Betrachtet man etwa eine dünne Deckschicht mit der integrierten Leitfähigkeit  $\tau$  und einen idealen Leiter in der Tiefe  $h$ , so gilt für ein homogenes Feld

$$c(\omega) = \frac{h}{1 + i\omega\mu_0\tau h}$$

Allgemein führen  $N$  dünne Schichten auf  $N$  Glieder in (8).

Es bleibt zu zeigen, daß alle  $a_n$  positiv sind. Dazu genügt die Betrachtung eines ebenen Leiters mit homogenem Feld, da sich alle übrigen Fälle auf dies Modell transformieren lassen (WEIDELT 1970). Die Gleichung für  $E$  ist

$$E''(z, \omega) = i\omega\mu_0\sigma(z)E(z, \omega). \quad (9)$$

Multipliziert man die zu (9) konjugiert-komplexe Gleichung mit  $E$  und integriert über  $z$  bis zur Maximaltiefe  $z_m$ , so ergibt sich nach partieller Integration und Division durch  $|E'(0, \omega)|^2$ :

$$c(\omega) = \int_0^{z_m} \{ |E'(z, \omega)/E'(0, \omega)|^2 - i\omega^* \mu_0 \sigma |E(z, \omega)/E'(0, \omega)|^2 \} dz. \quad (10)$$

Diese Darstellung zeigt, daß der Imaginärteil von  $c$  in der gesamten rechten  $\omega$ -Halbebene negativ ist. Strebt  $\omega$  in der Darstellung (8) von rechts gegen den Pol  $ib_m$ ,  $\omega = ib_m + \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ , so gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon c(ib_m + \epsilon) = -ia_m.$$

Da der Imaginärteil von  $c$  negativ ist, muß  $a_m > 0$  sein.

Es sei vermerkt, daß für Üfkt. mit positiven Residuen stets Umrechnungsformeln zwischen Betrag und Phase existieren, da der Realteil in der unteren Halbebene überall positiv ist, also  $|c|$  dort nicht verschwindet. Strebt  $c(\omega) \rightarrow f(\omega)$  für  $\omega \rightarrow \infty$ , so ergibt sich für  $\tilde{c}(\omega) = c(\omega)/f(\omega) = |\tilde{c}| \exp(-i\psi)$ :

$$\log |\tilde{c}(\omega)| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \tilde{\psi}(x)}{x^2 - \omega^2} dx,$$

$$\tilde{\psi}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \log |\tilde{c}(x)| \frac{dx}{x^2 - \omega^2}.$$

Da alle "Ströme" in die gleiche Richtung fließen, ist das "Feld" auf der reellen Frequenzachse besonders glatt; die Üfktn. und ihre Frequenzableitungen erfüllen eine Reihe von Ungleichungen. Im folgenden werde eine Ungleichung, die Ableitungen bis einschließlich n-ter Ordnung enthält, als "Ungleichung n-ter Ordnung" bezeichnet. Ferner empfiehlt es sich, Ableitungen nach  $\log \omega$  zu betrachten, die für eine Frequenzfunktion  $f(\omega)$  durch den Operator  $Df$  ausgedrückt werden sollen, d.h. es gelte

$$Df = \omega \frac{df}{d\omega} = \frac{df}{d \log \omega} = - \frac{df}{d \log T} \quad (T = \text{Periode}).$$

Von nun an sei  $\omega$  stets positiv und

$$c(\omega) = g(\omega) - ih(\omega). \quad (11)$$

a) Ungleichungen nullter Ordnung

Die Trennung von (8) in Real- und Imaginärteil liefert

$$\underline{g > 0, h > 0.}$$

b) Ungleichungen 1. Ordnung

Es sei

$$s_k(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n^{3-k} \omega^k}{(b_n^2 + \omega^2)^2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dann gilt

$$g = s_0 + s_2,$$

$$h = s_1 + s_3,$$

$$Dg = -2s_2,$$

$$Dh = s_1 + s_3,$$

oder nach den  $s_k$  aufgelöst:

$$2s_0 = 2g + Dg,$$

$$2s_1 = h + Dh,$$

$$2s_2 = -Dg,$$

$$2s_3 = h - Dh.$$

(12)

Aus der Schwarzschen Ungleichung  $(\sum A_n B_n)^2 \leq \sum A_n^2 \sum B_n^2$  mit

$$A_n = (a_n b_n^{2-k} \omega^{k+1})^{1/2} / (b_n^2 + \omega^2), \quad B_n = A_n \cdot b_n / \omega$$

folgt

$$s_1^2 \leq s_0 s_2, \quad s_2^2 \leq s_1 s_3$$

oder wenn man (12) einsetzt und umordnet

$$\underline{|c + Dc| \leq g, \quad |Dc| \leq h.}$$

Gleichheit besteht nur, wenn (8) lediglich ein Glied hat, d.h. für das oben erwähnte Dreischichtenmodell mit der dünnen Deckschicht.

Aus (12) folgt sofort

$$\underline{Dg < 0.}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} D|c^2| &= s_0 s_2 + 2s_2^2 + s_3^2 + (s_0 s_2 - s_1^2) = \\ &= |c^2| - s_0^2 - 2s_1^2 - s_1 s_3 - (s_1 s_3 - s_2^2), \end{aligned}$$

d.h.

$$\underline{0 \leq -D|c^2| \leq 2|c^2|,}$$

oder mit dem scheinbaren Widerstand  $\rho_s = \omega \mu_0 |c^2|$ :

$$\underline{|D\rho_s| \leq \rho_s,}$$

so daß die doppelt-logarithmisch aufgetragene Sondierungskurve keine Steigung größer als  $\pm 45^\circ$  besitzt.

c) Ungleichungen 2. Ordnung

Mit

$$t_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n^{5-k} \omega^k}{(b_n^2 + \omega^2)^3}, \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

gilt

$$g = t_0 + 2t_2 + t_4, \quad h = t_1 + 2t_3 + t_5,$$

$$Dg = -2t_2 - 2t_4, \quad Dh = t_1 - t_5,$$

$$D^2g = -4t_2 + 4t_4, \quad D^2h = t_1 - 6t_3 + t_5,$$

oder nach den  $t_k$  aufgelöst:

$$8t_0 = 8g + 6Dg + D^2g,$$

$$8t_1 = 3h + 4Dh + D^2h,$$

$$8t_2 = -2Dg - D^2g,$$

$$8t_3 = h - D^2h, \quad (14)$$

$$8t_4 = -2Dg + D^2g,$$

$$8t_5 = 3h - 4Dh + D^2h.$$

Die  $t_k$  erfüllen die folgenden sieben Ungleichungen:

$$t_0 t_2 - t_1^2 \geq 0,$$

$$t_0 t_4 - t_1 t_3 \geq t_1 t_3 - t_2^2 \geq 0,$$

$$t_0 t_5 - t_1 t_4 \geq t_1 t_4 - t_2 t_3 \geq 0, \quad (15)$$

$$t_1 t_5 - t_2 t_4 \geq t_2 t_4 - t_3^2 \geq 0,$$

$$t_3 t_5 - t_4^2 \geq 0.$$

Vier dieser Ungleichungen folgen aus der Schwarz'schen Ungleichung oder allgemeiner aus der Tatsache, daß die Funktion

$$f(k) = t_{2p-k} t_k$$

ihr Minimum bei  $k = p$  annimmt. Die drei übrigen ergeben sich aus

$f''(k) \geq 0$ , woraus folgt

$$f(k+1) - f(k) \geq f(k) - f(k-1).$$

Diese Beziehungen lassen sich ganz einfach beweisen. Nach Einsetzen von (14) in (15) erhält man sieben relativ scharfe, aber etwas unübersichtliche Ungleichungen 2. Ordnung. Zwei prägnantere, jedoch unschärfere Beziehungen lassen sich daraus durch Linearkombination gewinnen:

$$(h^2 - |D^2c|^2)/16 = (t_1t_3 - t_2^2) + 2(t_2t_4 - t_3^2) + (t_3t_5 - t_4^2) \geq 0,$$

$$(g^2 - |c+2Dc+D^2c|^2)/16 = (t_0t_2 - t_1^2) + 2(t_1t_3 - t_2^2) + (t_2t_4 - t_3^2) \geq 0,$$

oder

$$\underline{|c + 2Dc + D^2c| \leq g, \quad |D^2c| \leq h.}$$

Die Ungleichungen 2. Ordnung schließen die Ungleichungen 1. Ordnung ein. Z.B. gilt

$$s_0s_2 - s_1^2 = (t_0t_2 - t_1^2) + (t_0t_4 - 2t_1t_3 + t_2^2) + (t_2t_4 - t_3^2) \geq 0.$$

Auch Ungleichungen höherer Ordnung lassen sich auf dem beschrittenen Weg leicht gewinnen. Doch ist ihre praktische Bedeutung gering, da sich bei experimentellen Daten schon die zweite Ableitung nur ungenau bestimmen läßt.

Die oben angegebenen Ungleichungen zwischen Real- und Imaginärteil der Üfktn. lassen sich natürlich auch als Ungleichungen zwischen Betrag und Phase schreiben. Setzt man

$$c = |c| e^{-i\psi}, \quad \rho_s = \omega\mu_0 |c|^2,$$

wobei  $\rho_s$  der scheinbare Widerstand und  $90^\circ - \psi$  der Phasenwinkel zwischen E und H ist, so sind z.B.  $|c + Dc| \leq g$  und  $|Dc| \leq h$  äquivalent mit

$$\frac{1}{4}(1 + D\rho_s/\rho_s)^2 + (D\psi)^2 \leq \cos^2\psi,$$

$$\frac{1}{4}(1 - D\rho_s/\rho_s)^2 + (D\psi)^2 \leq \sin^2\psi.$$

Dies ist offenbar eine Verschärfung von  $|D\rho_s| \leq \rho_s$ .

Mit Hilfe der oben ermittelten Einschränkungen lassen sich leicht diejenigen Teile einer Sondierungskurve bestimmen, die auf keinen Fall durch einen geschichteten Untergrund erklärbar sind, wo also zwischen Messungen und Modell stets eine Diskrepanz bestehen wird. (Umgekehrt jedoch brauchen Teile einer Sondierungskurve, die alle obigen Einschränkungen erfüllen, noch nicht unbedingt interpretiert zu sein.) Wenn einige der Ungleichungen an gewissen Punkten verletzt werden, lassen sich die Meßwerte derart korrigieren, daß zwar alle Einschränkungen erfüllt, die Meßwerte aber nur möglichst geringfügig (in einer vorgegebenen Norm) verändert werden. Dies führt auf eine konvexe Optimierungsaufgabe, die sich bequem nach der Methode der Schmittebenen lösen läßt (COLLATZ und WETTERLING 1966, p. 92).

Fig. 1 zeigt als Beispiel die von SCHMUCKER ermittelten Funktionen  $g$  und  $h$  der ersten vier  $S_q$ -Harmonischen (ausgezogene Linienzüge). Es sind Mittelwerte für Südosteuropa. Ableitungen nach der Frequenz wurden aus der Steigung einer Parabel durch drei aufeinanderfolgende Punkte gewonnen, wobei wenn möglich der mittelste Punkt herangezogen wurde. Es zeigte sich, daß die Ungleichungen  $g - |c + Dc| \geq 0$  und  $h - |Dc| \geq 0$  nicht in allen Punkten erfüllt sind. Deshalb wurden optimale Korrekturen bestimmt, wobei als Norm die Summe der relativen Abweichungsquadrate zugrunde gelegt wurde (gebrochene Linien). Man gewinnt damit einen Anhaltspunkt über den zu erwartenden Grad der Übereinstimmung zwischen Daten und Modell.

Es konnte hier nur die spezielle Klasse von Üfktn. mit positiven Residuen untersucht werden. Auf jeden Fall lassen sich alle Üfktn. für geschichtete Halbräume, Kugeln und Zylinder auf diesen Typ reduzieren. Ob darüber hinaus auch Üfktn. für lateral inhomogene

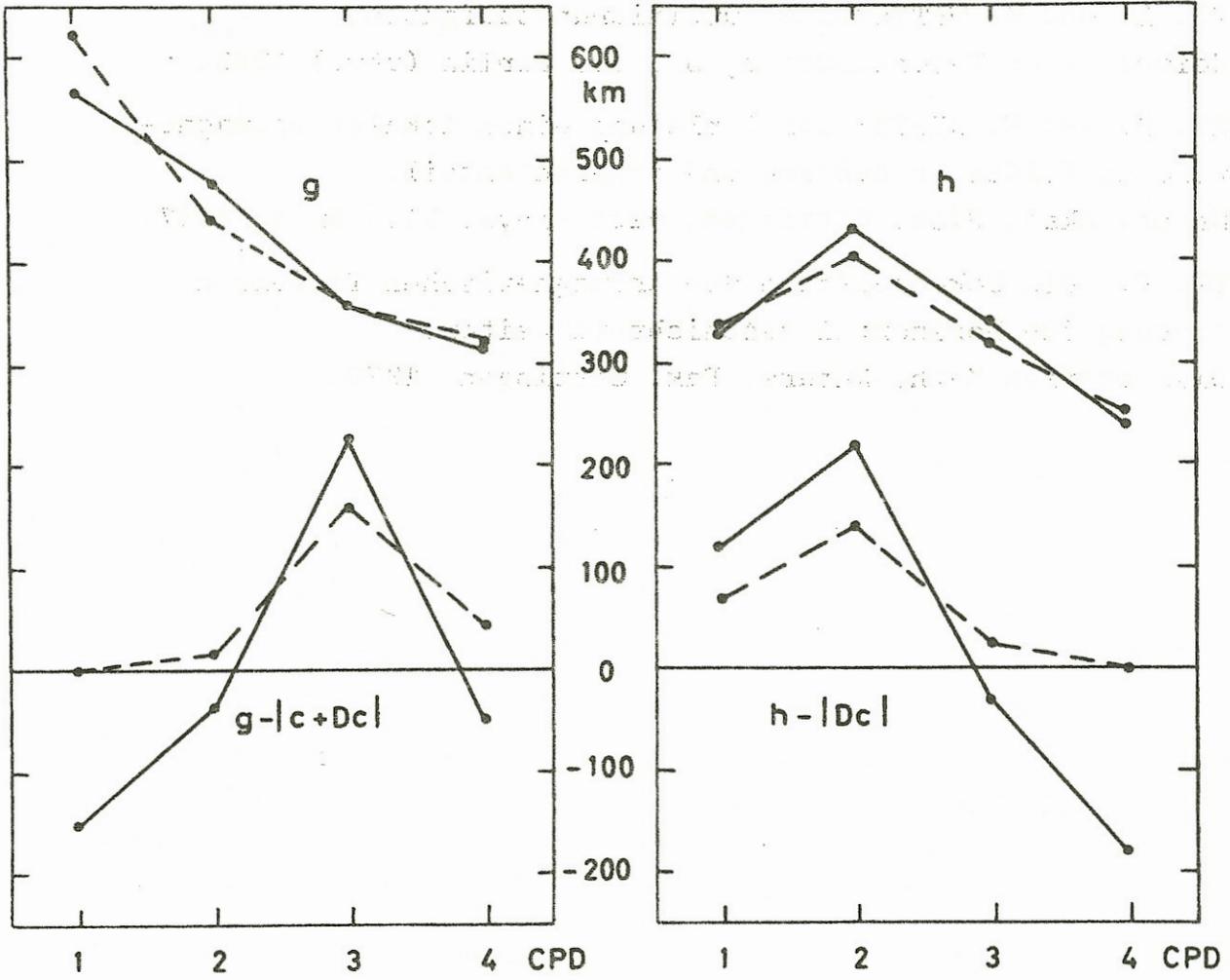


Fig. 1

Leiter ganz oder teilweise dazu zählen, bzw. wodurch diese zu charakterisieren sind, müßten erst weitere Untersuchungen klären.

Literatur:

COLLATZ, L. und W. WETTERLING: Optimierungsaufgaben.

Heidelberger Taschenbücher, Bd. 15. Berlin (usw.) 1966.

SIEBERT, M. und W. KERTZ: Zur Zerlegung eines lokalen erdmagnetischen Feldes in äußeren und inneren Anteil.

Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., Nr.5, 1957.

WEIDELT, P.: Die Umkehraufgabe der erdmagnetischen Tiefenson-  
dierung für horizontal geschichtete Leiter.

Dissertation Math.-Naturw. Fak. Göttingen, 1970.

