

M. SIEBERT, Göttingen

"Zur Deutung von Induktionspfeilen bei schmalen, langgestreckten
orthogonalen Leitfähigkeitsanomalien "

Dienstag, den 14.9.1971

A) Über die Voraussetzungen, Möglichkeiten und Grenzen der Verwendung von Induktionspfeilen ist auf dem letzten Kolloquium in Reinhausen ausführlich berichtet worden (SIEBERT 1969). Die dort vorgebrachten grundsätzlichen Überlegungen sollen hier nicht noch einmal wiederholt, sondern als bekannt vorausgesetzt werden. Wie aus dieser Darstellung hervorgeht, ist eine einfache, anschauliche Interpretation des Induktionspfeils bisher auf den Fall der zweidimensionalen Leitfähigkeitsanomalie beschränkt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß eine solche Interpretation auch auf schmale, langgestreckte orthogonale Anomalien ausgedehnt werden kann.

Mit der Bezeichnung "Induktionspfeil" ist hier speziell jene Definition gemeint, die der von WIESE (1962, 1965) stammenden Modellbetrachtung entspricht, jedoch mit der von SCHMUCKER (1969) vorgenommenen Verallgemeinerung, die aus der komplexwertigen Darstellung des Störungsfeldes folgt und auf einen "komplexen Induktionspfeil" führt, bestehend aus einem 0° -Pfeil für den In-Phase-Anteil und einem 90° -Pfeil für den um 90° phasenverschobenen Anteil.

Betrachtet wird eine an einem festen Beobachtungsort mit der Kreisfrequenz ω zeitlich harmonisch auftretende oder durch harmonische Analyse zubereitete Störung in den drei Komponenten X,Y,Z (mit üblicher Bedeutung, siehe auch Abbildung). Sie wird beschrieben durch

$$\Delta X = X_0 e^{i(\omega t + \xi)} ; \Delta Y = Y_0 e^{i(\omega t + \eta)} ; \Delta Z = Z_0 e^{i(\omega t + \zeta)} \quad (1)$$

Über die Festlegung des Nullpunktes $t = 0$ kann noch durch die Festlegung eines Phasenwinkels, etwa durch die Annahme $\zeta = 0$ für das Maximum von ΔZ , verfügt werden. Da der WIESE-Pfeil in der vorhergehenden Betrachtung (SIEBERT 1969) ausschließlich in reeller Dar-

stellung behandelt worden ist, empfiehlt es sich, als erstes eine komplexe Verallgemeinerung zu erörtern. Dazu wurde mit dem Blick auf die Abbildung am Ende dieses Beitrags zunächst angenommen, daß die v - Anomalie nicht vorhanden sei und das gesamte anomale Verhalten im Störungsfeld von der u -Anomalie herrühre. Die für die Induktion in dieser zweidimensionalen Anomalie maßgebliche Horizontalkomponente, die zugleich von der anomalen Induktion selbst wieder beeinflußt wird, ist darstellbar durch

$$\Delta U = U_0 e^{i(\omega t + \chi)} \quad (2)$$

Die dabei ebenfalls vereinfachte anomale Variation in der Vertikalkomponente sei

$$\Delta Z_u = Z_{u0} e^{i(\omega t + \zeta_u)} \quad (3)$$

Die Amplituden U_0 und Z_{u0} werden bei der Definition des Induktionspfeils nach WIESE einander proportional gesetzt. Diese Annahme gilt in Strenge für das Modell einer zweidimensionalen Anomalie, in der ein homogenes, horizontales äußeres Magnetfeld mit der Amplitude U_{e0} induziert. Da dann U_{e0} sowohl proportional zu U_{i0} , der Amplitude des induzierten, also inneren Anteils von ΔU , als auch proportional zu Z_{u0} ist, muß auch U_0 proportional zu dem ausschließlich anomalen Z_{u0} sein. Der Proportionalitätsfaktor hängt von den Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten und ihren inneren und äußeren Anteilen und damit von der Form der Störung selbst ab (siehe SIEBERT 1969).

Eine andere Begründung dieser Proportionalität geht aus von der Definition der Übertragungskoeffizienten durch einen allgemeinen linearen Zusammenhang zwischen dem anomal induzierten Anteil und dem normalen (induzierenden und induzierten) Anteil des Störungsfeldes. Setzt man voraus, daß sich der äußere Anteil und der normal induzierte Anteil der Vertikalkomponente gerade kompensieren oder daß der normal induzierte Anteil bekannt ist und subtrahiert werden kann, so läßt sich wieder eine Proportionalität von U_0 mit Z_{u0} herleiten. Entscheidend für die Deutung der Induktionspfeile ist es dabei, daß Z_{u0} die Amplitude des anomal induzierten Anteils

der Vertikalkomponente ist.

Wird diese Proportionalität etwa in der Form $\Delta Z_u = \kappa_u \Delta U$ angesetzt, so folgt aus (2) und (3)

$$\Delta Z_u = \kappa_u e^{i(\zeta_u - \chi)} \Delta U = C_u \Delta U, \quad (4)$$

mit der im Gegensatz zu κ_u jetzt komplexen Konstanten

$$C_u = C_{ur} + iC_{ui} = \kappa_u \cos(\zeta_u - \chi) + i\kappa_u \sin(\zeta_u - \chi). \quad (5)$$

Gleichung (4) bedeutet jedoch keine konstante Proportionalität zwischen ΔZ und ΔU während des zeitlichen Ablaufs der Störung!

Wie bei der reellen Darstellung muß nun von der noch unbekannt-ten Größe ΔU im u, v -System, für die jedoch theoretisch plausible Betrachtungen möglich waren, auf die beobachtbaren Größen im x, y -System transformiert werden:

$$\Delta U = \Delta X \cos \theta + \Delta Y \sin \theta \quad (6)$$

mit θ als Drehwinkel, wie es in der Abbildung eingetragen ist. Einsetzen von (6) in (4) ergibt

$$\Delta Z_u = C_u \cos \theta \Delta X + C_u \sin \theta \Delta Y. \quad (7)$$

Gleichung (7) ist die durch die komplexwertige Darstellung der Störung verallgemeinerte Bestimmungsgleichung für den nun ebenfalls komplexen Induktionspfeil. Bezüglich der praktischen Bestimmung der komplexen Koeffizienten $C_u \cos \theta$ und $C_u \sin \theta$ sei auf die Behandlung durch SCHMUCKER (1969) verwiesen. Der komplexe Induktionspfeil ist durch die x - und y -Komponenten seiner beiden Pfeile gegeben. Man erhält so

$$\text{den } 0^\circ\text{-Pfeil aus: } (C_{ur} \cos \theta; C_{ur} \sin \theta), \quad (8a)$$

$$\text{den } 90^\circ\text{-Pfeil aus: } (-C_{ui} \cos \theta; -C_{ui} \sin \theta). \quad (8b)$$

Bei dieser Definition stimmt die Richtung des 0° -Pfeils mit der Richtung des WIESE-Pfeils im Falle einer zweidimensionalen Ano-

malie überein, während der 90° -Pfeil infolge der nach Konvention hinzugefügten negativen Vorzeichen in die Gegenrichtung zeigt. Richtung und Länge der beiden Pfeile sind also gegeben durch den Quotienten bzw. die Quadratwurzel der Komponenten des betreffenden Pfeils.

Die bisherige Behandlung hatte zur Voraussetzung, daß allein die u-Anomalie wirksam sein sollte. In analoger Weise läßt sich der senkrecht zur v-Anomalie gerichtete komplexe Induktionspfeil bestimmen, falls nur diese Anomalie vorhanden wäre. Die entsprechenden Gleichungen können ohne weitere Erörterung hingeschrieben werden:

$$(2) \rightarrow \Delta V = V_o e^{i(\omega t + \psi)} \quad (9)$$

$$(3) \rightarrow \Delta Z_v = Z_{vo} e^{i(\omega t + \zeta_v)}, \quad (10)$$

$$(4) \rightarrow \Delta Z_v = \kappa_v e^{i(\zeta_v - \psi)} \Delta U = C_v \Delta U, \quad (11)$$

$$(5) \rightarrow C_v = C_{vr} + i C_{vi} = \kappa_v \cos(\zeta_v - \psi) + i \kappa_v \sin(\zeta_v - \psi), \quad (12)$$

$$(6) \rightarrow \Delta V = -\Delta X \sin \theta + \Delta Y \cos \theta, \quad (13)$$

$$(7) \rightarrow \Delta Z_v = -C_v \sin \theta \Delta X + C_v \cos \theta \Delta Y. \quad (14)$$

Nach Bestimmung der Koeffizienten in (14) erhält man

$$\text{den } 0^\circ\text{-Pfeil aus: } (-C_{vr} \sin \theta ; C_{vr} \cos \theta), \quad (15a)$$

$$\text{den } 90^\circ\text{-Pfeil aus: } (C_{vi} \sin \theta ; -C_{vi} \cos \theta). \quad (15b)$$

Richtung und Länge dieser beiden Pfeile sind wieder gegeben durch den Quotienten bzw. die Quadratwurzel der Komponenten des betreffenden Pfeils.

B) Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen kann nun auf den Fall zweier orthogonaler Leitfähigkeitsanomalien eingegangen werden. Dabei kann nicht allgemein angenommen werden, daß sich die getrennt behandelten Wirkungen beider Anomalien lediglich überlagern; vielmehr liefert die Wechselwirkung beider Anomalien einen zusätzlichen Anteil. Diese Wechselwirkung kann auf zweierlei Weise

zustände kommen: 1) Falls die Anomalien sich nicht nur mit ihren Projektionen in der x,y-Ebene, sondern auch tatsächlich räumlich schneiden, wird die Verteilung der in der einen Anomalie fließenden Induktionsströme in der Gegend der Überschneidung durch die anomale Leitfähigkeit der zweiten Anomalie verändert und umgekehrt. 2) Auch bei nicht räumlicher Überschneidung und daher in jedem Fall induzieren die in der einen Anomalie fließenden anomalen Induktionsströme über ihr variables Magnetfeld in der anderen Anomalie und verursachen dadurch das Auftreten zusätzlicher Induktionsströme. Nur wenn beide Effekte klein sind gegen die Induktionseffekte in der für sich genommenen zweidimensionalen Anomalie, ist eine einfache Superposition der beiden unter A) behandelten Fälle näherungsweise erlaubt. Wie unmittelbar anschaulich einzusehen ist, wird die Wechselwirkung zwischen den Anomalien klein, wenn diese sich senkrecht schneiden und mindestens eine, besser aber beide Anomalien hinreichend schmal sind. Mehr als diese qualitativen Angaben sind an dieser Stelle nicht möglich, da quantitative Abschätzungen ein konkretes Modell voraussetzen. Jedoch ist der Grenzfall so schmaler, langgestreckter orthogonaler Anomalien denkbar, daß die Wechselwirkung als unbedeutend vernachlässigt werden kann. Diese Voraussetzung soll im folgenden Gültigkeit haben.

Während beim Vorliegen nur eines der beiden unter A) behandelten Fälle entweder ΔZ_u oder ΔZ_v beobachtet wird, sind unter der jetzigen Voraussetzung beide Größen unbekannt; beobachtbar ist lediglich ihre Überlagerung, also ΔZ selbst, so daß nach (1), (3) und (10) gilt:

$$\Delta Z = \Delta Z_u + \Delta Z_v, \quad (16)$$

$$Z_o e^{i\zeta} = Z_{uo} e^{i\zeta_u} + Z_{vo} e^{i\zeta_v}. \quad (16a)$$

Mit (7) und (14) folgt aus (16)

$$\Delta Z = (C_u \cos\theta - C_v \sin\theta) \Delta X + (C_u \sin\theta + C_v \cos\theta) \Delta Y. \quad (17)$$

Das ist wie (7) und (14) selbst wieder eine Beziehung, durch die ein komplexer Induktionspfeil, nämlich der der orthogonalen Doppelanomalie, festgelegt wird. Setzt man also

$$\Delta Z = A \Delta X + B \Delta Y, \quad (18)$$

und bestimmt die komplexen Koeffizienten A und B durch Vergleich mit (17) zu

$$A_r = C_{ur} \cos \theta - C_{vr} \sin \theta, \quad A_i = C_{ui} \cos \theta - C_{vi} \sin \theta, \quad (19a,b)$$

$$B_r = C_{ur} \sin \theta + C_{vr} \cos \theta; \quad B_i = C_{ui} \sin \theta + C_{vi} \cos \theta, \quad (19c,d)$$

so liefert die formale Übertragung der unter A) besprochenen Methode einen komplexen Induktionspfeil, bestehend aus einem 0° -Pfeil mit

$$\text{Richtung: } \tan \beta_r = B_r / A_r \text{ und Länge: } L_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2} \quad (20a)$$

und einen 90° -Pfeil mit

$$\text{Richtung: } \tan(\pi + \beta_i) = B_i / A_i \text{ und Länge } L_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}. \quad (20b)$$

Die Größen A_r, A_i, B_r, B_i sind aus (18) durch Auswertung von Störungen der Kreisfrequenz ω empirisch bestimmbar.

Als letztes ist zu untersuchen, wie die beiden durch (20a,b) festgelegten Pfeile der Doppelanomalie mit den Pfeilen der beiden Einzelanomalien zusammenhängen. Man kommt dabei zu dem folgenden Ergebnis: Der 0° -Pfeil der u-Anomalie, gegeben durch (C_{ur}, θ) , und der 0° -Pfeil der v-Anomalie, gegeben durch $(C_{vr}, \pi + \theta)$, setzen sich vektoriell zum 0° -Pfeil (L_r, β_r) der Doppelanomalie zusammen und ebenso die 90° -Pfeile der Einzelanomalien zum 90° -Pfeil der Doppelanomalie.

Zum Beweis dieser Behauptung braucht nur gezeigt zu werden, daß bei vektorieller Zerlegung der L-Pfeile im u,v-System gerade die entsprechenden C_u - und C_v -Pfeile als Komponenten auftreten, wie dies die Abbildung veranschaulicht. Dazu wird die mit (20a) und (20b) gleichwertige Darstellung der L-Pfeile im x,y-System benötigt:

$$A_r = L_r \cos \beta_r, \quad B_r = L_r \sin \beta_r, \quad (21a)$$

$$A_i = L_i \cos(\pi + \beta_i); \quad B_i = L_i \sin(\pi + \beta_i), \quad (21b)$$

sowie die Auflösung der Gleichungssysteme (19a,c) und (19b,d):

$$C_{ur} = A_r \cos\theta + B_r \sin\theta, \quad C_{ui} = A_i \cos\theta + B_i \sin\theta, \quad (22a,b)$$

$$C_{vr} = A_r \sin\theta + B_r \cos\theta, \quad C_{vi} = A_i \sin\theta + B_i \cos\theta. \quad (22c,d)$$

Die u-Komponente des 0° -Pfeils (L_r, β_r) erhält man bei vektorieller Zerlegung durch Projektion von L_r auf die u-Achse. Mit (21a) und (22a) ergibt das

$$L_r \cos(\beta_r - \theta) = L_r (\cos\beta_r \cos\theta + \sin\beta_r \sin\theta),$$

$$L_r \cos(\beta_r - \theta) = A_r \cos\theta + B_r \sin\theta = C_{ur}. \quad (23a)$$

In der gleichen Weise findet man mit (21a) und (22c) für die v-Komponenten dieses Pfeiles

$$L_r \sin(\beta_r - \theta) = B_r \cos\theta - A_r \sin\theta = C_{vr}. \quad (23b)$$

Damit ist die Behauptung für den 0° -Pfeil der Doppelanomalie bewiesen. Die vektorielle Zerlegung des 90° -Pfeils erfolgt völlig analog und ergibt mit (21b) und (22b,d):

$$L_i \cos(\pi + \beta_i - \theta) = A_i \cos\theta + B_i \sin\theta = C_{ui}, \quad (24a)$$

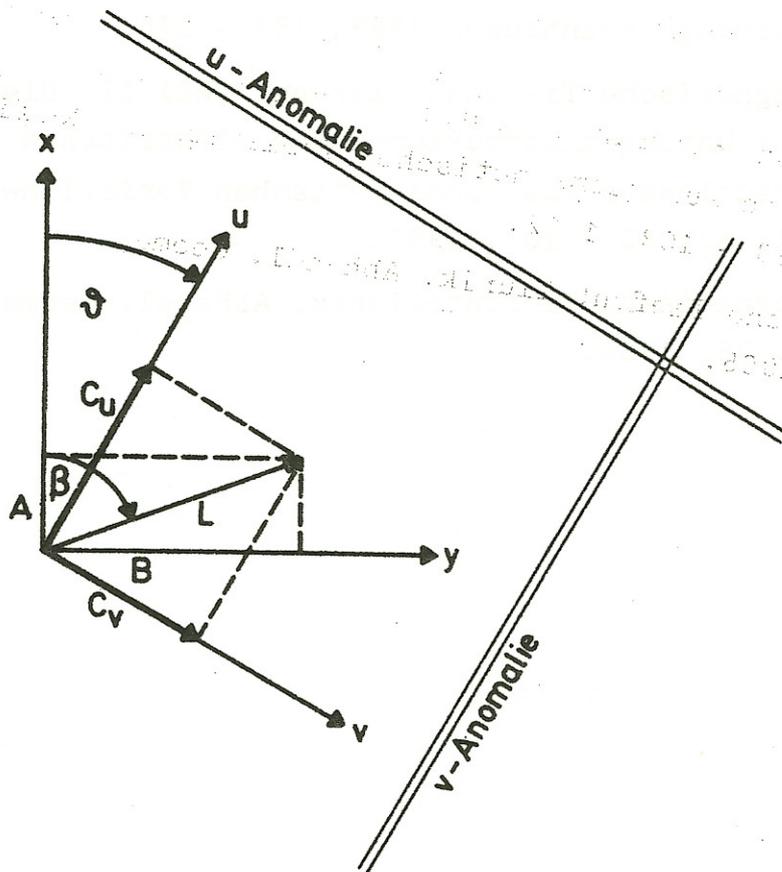
$$L_i \sin(\pi + \beta_i - \theta) = B_i \cos\theta - A_i \sin\theta = C_{vi}. \quad (24b)$$

Das heißt, eine Drehung der drei hier betroffenen 90° -Pfeile um 180° führt genau wieder auf die in der Abbildung skizzierte Situation, weshalb dort bei den Größen L, A, β, C_u und C_v die Indizes r und i fortgelassen worden sind und für den jeweils betrachteten Fall ergänzt werden müssen.

Die unter der gemachten Voraussetzung einer vernachlässigbaren Wechselwirkung zwischen den beiden Teilen der Doppelanomalie gefundene vektorielle Zerlegung des komplexen Induktionspfeils der Doppelanomalie ist nicht selbstverständlich, da der Induktionspfeil bekanntlich im allgemeinen Fall diese Vektoreigenschaft nicht

besitzt und diese auch im vorliegenden Fall nur näherungsweise gültig ist. Immerhin erlaubt dieses Ergebnis in einer Situation, wie sie bei der Überlagerung der Wirkungen der großen Norddeutschen H-Anomalie und der Göttinger D-Anomalie vorliegt, eine wenn vielleicht auch grobe Trennung der von der einzelnen Anomalie kommenden Anteile. Dabei ist die Zerlegung der Induktionspfeile nur der anschauliche Ausdruck einer entsprechenden Aufspaltung der Übertragungskoeffizienten, wodurch dann getrennte Modellrechnungen für die Einzelanomalien möglich werden.

Um die Zerlegung in der Praxis vorzunehmen, muß die Streichrichtung der Einzelanomalien bekannt sein. Bei der vorliegenden Betrachtung wird die Kenntnis der durch den Winkel θ definierten Richtung senkrecht zur u-Anomalie vorausgesetzt, wodurch das u,v-System festgelegt wird. Ähnlich wie der komplexe Induktionspfeil beim Vorliegen einer reinen zweidimensionalen Anomalie die notwendige Bedingung erfüllen muß, daß sich die Richtungen seines 0° -Pfeils und seines 90° -Pfeils um 180° unterscheiden, gibt es als einen Test auf das Vorliegen von schmalen, langgestreckten orthogonalen Leitfähigkeitsanomalien die sicherlich nicht hinreichende, jedoch notwendige Bedingung, daß 0° -Pfeil und 90° -Pfeil des komplexen Induktionspfeils der Doppelanomalie in sich diagonal gegenüberliegenden Quadranten des u,v-Systems liegen müssen. Nur dann können beide Pfeile in u- und v-Richtung so aufgespalten werden, daß für die dadurch entstehenden Pfeile der Einzelanomalie die zuvor angeführte 180° -Bedingung erfüllt ist. Es sei abschließend aber noch einmal darauf hingewiesen, daß zu den gemachten Voraussetzungen nicht nur die genannten Eigenschaften der Anomalie im Untergrund gehören, sondern daß außerdem die beobachtete ΔZ -Variation ausschließlich durch die Anomalie verursacht sein muß. Daher ist für Untersuchungen dieser Art die Kenntnis eines etwa vorhandenen normalen Anteils in der ΔZ -Variation von größter Wichtigkeit. Die praktische Bestimmung dieses Anteils ist ein noch keineswegs gelöstes Problem.



Literatur

- SCHMUCKER, U.: Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States. Bull. Scripps Inst. Oceanogr. Calif. 13, 1 - 165, 1969.
- SIEBERT, M.: Zur Verwendung von Induktionspfeilen bei der erdmagnetischen Tiefensondierung. Protokoll Kolloquium "Erdmagn. Tiefensondierung" Reinhausen 1969, 163 - 176.
- WIESE, H.: Geomagnetische Tiefensondierung. Teil II: Die Streichrichtung der Untergrundstrukturen des elektrischen Widerstandes, erschlossen aus geomagnetischen Variationen. Geofis. pura e appl. 52, 83 - 103, 1962.
- WIESE, H.: Geomagnetische Tiefentellurik. Abhandl. Geomagn. Inst. Potsdam Nr. 36, 1965.

