

V. HAAK, München

"Magnetotellurik: Bestimmung der Übertragungsfunktionen in Gebieten mit lateraler Änderung der elektrischen Leitfähigkeit"

Dienstag, den 14.9.1971

Einleitung

Man registriert die zeitlichen Variationen des horizontalen erd-elektrischen Feldes in den Komponenten $E_x(t)$ und $E_y(t)$ und gleichzeitig die des horizontalen erdmagnetischen Feldes $H_x(t)$ und $H_y(t)$. Transformiert man diese Zeitfunktionen in Funktionen der Frequenz, so bestehen lineare Beziehungen zwischen den Komponenten des erd-elektrischen und erdmagnetischen Feldes (räumlich quasihomogene Anregung vorausgesetzt):

$$E_x(T) = z_{xx}(T) \cdot H_x(T) + z_{xy}(T) \cdot H_y(T), \quad (1)$$

$$E_y(T) = z_{yx}(T) \cdot H_x(T) + z_{yy}(T) \cdot H_y(T)$$

$$T = 2\pi/\omega = \text{Periode.}$$

z_{xx} , z_{xy} , z_{yx} und z_{yy} werden Übertragungsfunktionen genannt. Bei einfachen Verteilungen der Leitfähigkeit lassen sich diese allgemeinen Beziehungen reduzieren:

A. 1-dimensionale Verteilung $\sigma = \sigma(z)$

Hier gilt

$$z_{xx} = z_{yy} = 0,$$

$$z_{xy} = -z_{yx}.$$

B. 2-dimensionale Verteilung $\sigma = \sigma(x, z)$

x = senkrecht zur Streichrichtung,

y = parallel zur Streichrichtung der 2-dimensionalen Anomalie.

Hier gilt

$$z_{xx} = z_{yy} = 0,$$

$$z_{xy} \neq z_{yx},$$

$$E_x = z_{xy} \cdot H_y \quad \text{und} \quad E_y = z_{yx} \cdot H_x. \quad (2)$$

Bei allen anderen Orientierungen des Koordinatensystems gilt die allgemeine Beziehung (1).

C. 3-dimensionale Verteilung $\sigma = \sigma(x, y, z)$

Hier gilt für jede Orientierung des Koordinatensystems die obige Beziehung (1).

Die Umdeutung der Übertragungsfunktionen in die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit ist zur Zeit möglich, wenn die Leitfähigkeit 1- oder 2-dimensional verteilt ist. Um nun zu erfahren, ob eine solche Verteilung der Leitfähigkeit am Meßort gegeben ist, untersucht man, wie die vier Übertragungsfunktionen von der Orientierung des Koordinatensystems abhängen: Je nach gegebener Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit wird sich eine der drei Eigenschaften A., B. oder C. ergeben.

In der Praxis macht diese Methode jedoch Schwierigkeiten. Der Fall A. (CAGNIARDscher Fall) ist nur selten erfüllt (oft nur bei kurzen Perioden von einigen hundert Sekunden).

Aber auch der Fall B. scheint kaum zu existieren, obwohl man oft aus der Geologie des Meßgebietes eine 2-dimensionale Verteilung der Leitfähigkeit folgern würde. So sollten zum Beispiel die beiden Übertragungsfunktionen $|z_{xx}|$ und $|z_{yy}|$ nach jeweils 90° Drehung des Koordinatensystems zumindest minimal werden. Das ist aber meist nicht der Fall: $|z_{xx}|$ wird bei einer anderen Orientierung des Koordinatensystems minimal als $|z_{yy}|$; ja, häufig beobachtet man sogar, daß sie nur alle 180° minimal werden. Das heißt aber, daß die elektrische Leitfähigkeit praktisch immer drei-dimensional verteilt ist.

Um aber überhaupt diese Übertragungsfunktionen interpretieren zu können, versucht man, durch bestimmte Kompromisse Koordinatensysteme zu finden, in denen sich diese Übertragungsfunktionen "fast so wie in einer 2-dimensionalen Verteilung" verhalten: Zum Beispiel gibt SWIFT als Kriterium an, die Übertragungsfunk-

tionen würden sich in jenem Koordinatensystem wie in einer 2-dimensionalen Verteilung verhalten, in dem $|z_{xx}|^2 + |z_{yy}|^2 = \text{minimal}$ ist. Doch sind die Ergebnisse unbefriedigend, da einerseits die Streuung der Werte z_{xy} und z_{yx} als Funktion der Periode ziemlich groß ist, und andererseits die z_{xx} und z_{yy} noch relativ groß (zum Teil sogar größer als die z_{xy} oder z_{yx}) sind.

Im folgenden wird eine Methode gezeigt, die mit anderen Kriterien Koordinatensysteme bestimmt, in denen die Beziehungen zwischen den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes fast wie in einer 2-dimensionalen Verteilung sind.

1. Methode der minimalen Kohärenz

Zunächst wird ein Kriterium an einer 2-dimensionalen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit entwickelt, und dann mit den entsprechenden Beobachtungen in einer 3-dimensionalen Verteilung verglichen.

a. In einer 2-dimensionalen Verteilung gelten im Koordinatensystem der Streichrichtung der Anomalie die Beziehungen (2):

$$E_{\perp} = z_{\perp} \cdot H_{\parallel} \quad \text{und} \quad E_{\parallel} = z_{\parallel} \cdot H_{\perp} \quad (T=\text{konstant}) \quad (3)$$

Man habe nun für eine Periode T mehrere Werte $E_{\perp}^i, E_{\parallel}^i, H_{\perp}^i, H_{\parallel}^i$ aus den Registrierungen bestimmt, für die alle die obige Beziehung (3) gilt. Sind nun die Polarisationsrichtungen der (horizontalen) Magnetfeld-Variationen beliebig, so ist auch das Verhältnis $|H_{\perp}^i|/|H_{\parallel}^i|$ beliebig. Die Amplitudenverhältnisse können - zufällig gestreut - zwischen 0 und unendlich liegen: Es besteht also keine lineare Beziehung zwischen $|H_{\perp}^i|$ und $|H_{\parallel}^i|$. Das gleiche gilt auch für die Beziehung zwischen $|E_{\perp}^i|$ und $|E_{\parallel}^i|$.

Betrachtet man aber diese Beziehungen aus einem anderen Koordinatensystem, das um den Winkel α aus der Streichrichtung der Anomalie herausgedreht ist, ändern sich diese Beziehungen:

Allerdings ändert sich nichts an den Beziehungen zwischen den Komponenten des Magnetfeldes, sie bleiben zufallsbedingt wie die Polarisationsrichtungen. Anders ist es nun aber mit den Beziehungen zwischen den Komponenten des erdelektrischen Feldes; denn in einer

2-dimensionalen Anomalie ist $|z_{\perp}|$ größer (oder kleiner) als $|z_{\parallel}|$, meist sogar beträchtlich größer (oder kleiner), zum Beispiel um den Faktor 10 bis 100. Deshalb ist eine Komponente des elektrischen Feldes (E_{\perp} oder E_{\parallel}) größer als die andere (E_{\parallel} oder E_{\perp}). Dreht man nun das Koordinatensystem und berechnet die Komponenten des elektrischen Feldes in diesem Koordinatensystem neu, so werden beide Komponenten E_x und E_y vorwiegend von der großen Komponente E_{\perp} (bzw. E_{\parallel}) bestimmt: Damit wird die Beziehung zwischen den Komponenten des elektrischen Feldes in einem gedrehten Koordinatensystem weitgehend linear. Der Anteil aus der kleinen Komponente stört nur noch gering diese Beziehung.

Ein Kriterium, inwieweit eine solche Beziehung linear ist oder zufallsbedingt, ist die Kohärenz KOH. Zwischen zwei Zahlenfolgen, deren Werte Zufallswerte sind, ist $KOH \approx \sqrt{2/k}$. Existiert aber ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Folgen, so ist die Kohärenz $> \sqrt{4/k}$ (k = Freiheitsgrade; Formel für die Kohärenz am Ende des Artikels). Ist die Kohärenz gleich 1, besteht ein perfekter linearer Zusammenhang.

Wendet man nun dieses Kriterium auf die oben besprochenen Beziehungen zwischen den zueinander senkrechten Komponenten des elektrischen Feldes einerseits und des magnetischen Feldes andererseits an, so erwartet man folgendes:

a. Im Koordinatensystem der Streichrichtung der Anomalie

$$KOH(H_{\perp}, H_{\parallel}) \approx \sqrt{2/k} \quad \text{und} \quad KOH(E_{\perp}, E_{\parallel}) \approx \sqrt{2/k} .$$

b. In einem anderen Koordinatensystem (x, y)

$$KOH(H_x, H_y) \approx \sqrt{2/k} \quad \text{und} \quad KOH(E_x, E_y) > \sqrt{4/k} \rightarrow 1 .$$

In der Praxis erhält man folgendes:

Fig. 1 zeigt die Kohärenz zwischen E_x und E_y als Funktion der Orientierung des Koordinatensystems an den zwei Meßorten DAM und WIT im Rheingraben. Periode ist $T = 650$ sec. Die tiefen Einschnitte in beiden Figuren zeigen, daß in diesen Koordinatensystemen keine linearen Beziehungen zwischen den zueinander senkrechten Komponenten des elektrischen Feldes bestehen. In allen anderen Koordinatensystemen ist die Kohärenz fast 1. Das beobachtete elektrische Feld hat also die oben vorhergesagte Eigenschaft, die tiefen Ein-

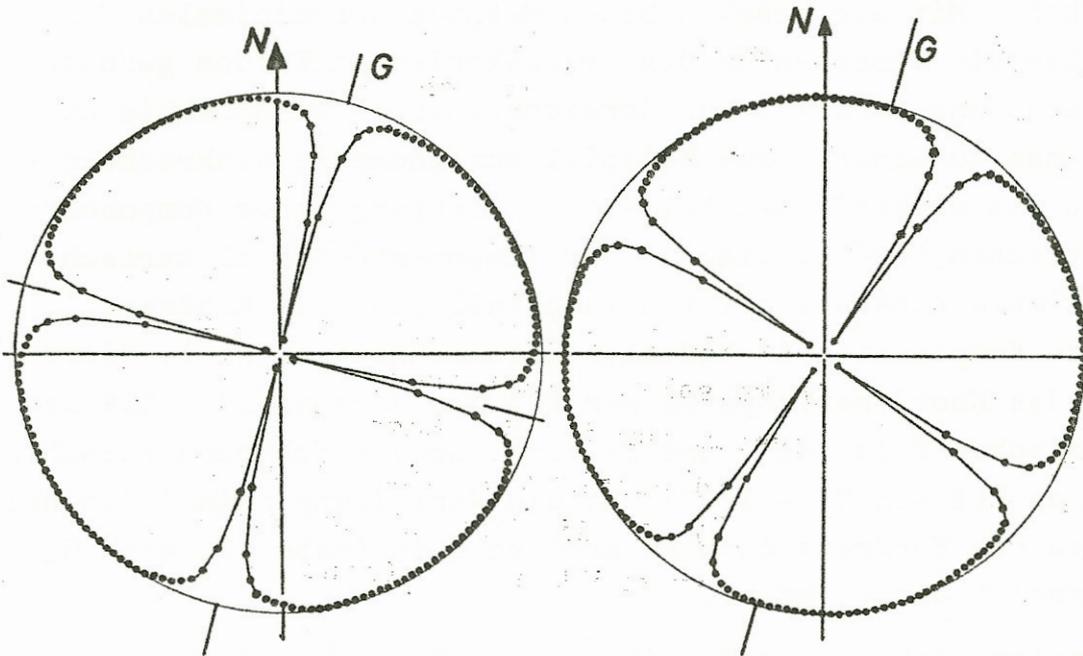


Fig. 1

schnitte geben die Streichrichtung der 2-dimensionalen Anomalie an. Die Orientierung dieser Koordinatensysteme ist praktisch nicht abhängig von der Periode (siehe auch Fig. 4 unten).

Einerseits ergibt sich hieraus, daß sich die elektrischen Felder an jedem Ort verhalten wie in einer zwei-dimensionalen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit, doch andererseits scheint die Streichrichtung dieser 2-dimensionalen Verteilung sich von Ort zu Ort zu verändern (insgesamt also eine 3-dimensionale Verteilung der Leitfähigkeit).

Nach dem man also Koordinatensysteme findet, in denen das elektrische Feld formal jene Eigenschaft hat, die es in einer 2-dimensionalen Verteilung haben würde, wird nun geprüft, inwieweit die Beziehungen zwischen elektrischem und magnetischem Feld diese Eigenschaft besitzen.

2. Methode der maximalen Kohärenz

Ausgangspunkt sei wiederum die rein 2-dimensionale Verteilung der Leitfähigkeit. Mit der beschriebenen Methode der minimalen Kohärenz hat man also die Komponenten des erdelektrischen Feldes gefunden, die senkrecht und parallel zur Streichrichtung der Anomalie liegen. Nun sucht man zu einer - zum Beispiel zur Anomalie senkrechten - Komponente des elektrischen Feldes die Richtung jener Komponente des magnetischen Feldes, die mit der Komponente des elektrischen Feldes maximale Kohärenz hat (im Idealfall also die Kohärenz 1, womit beide Komponenten in kausalem Zusammenhang stehen). Hierzu dreht man das Koordinatensystem nur für das Magnetfeld, hält das vom elektrischen Feld fest, und bestimmt so die Kohärenz zwischen E_{\perp} (fest) zu $H(\theta$ von 0° - 180°): Da die Verteilung rein 2-dimensional ist, sollte die Kohärenz dann am größten sein (nahe 1), wenn H_x genau senkrecht auf E_{\perp} steht.

Dies ergibt sich in der Tat für manche Meßorte, wie hier zum Beispiel für einen Meßort in Süddeutschland (BOL, $T = 150$ sec). Fig. 2 zeigt die Abhängigkeit der Kohärenz zwischen E und H von der Orientierung des Koordinatensystems für das Magnetfeld. (Die offenen Pfeile geben jeweils die Richtung einer der Komponenten des erdelektrischen Feldes im Koordinatensystem minimaler Kohärenz an.) Die dicken Punkte geben an, daß der Wert für die Kohärenz größer ist als $\sqrt{4/k}$, und damit auf einen linearen Zusammenhang zwischen E und H deutet. Die maximale Kohärenz wird erreicht, wenn H genau senkrecht auf einer der beiden E-Feldkomponenten steht.

Für die bereits erwähnten Stationen im Rheingraben ergibt sich etwas anderes. (Fig. 3). Zwar sieht das Resultat auf den ersten Blick dem in Fig. 2 recht ähnlich, doch ist bemerkenswert, daß die Richtung jener Komponente des Magnetfeldes, die die maximale Kohärenz mit der entsprechenden E-Feld-Komponente hat, nicht senkrecht auf dieser steht.

Einerseits kann man davon ausgehen, daß man dieser Unsymmetrie der Figuren keinerlei Bedeutung zumißt (die Unsymmetrie also als Meßfehler betrachtet): dann nimmt man die zu E senkrechte Komponente von H, die ja (wie aus den Figuren ersichtlich) noch eine so hohe Kohärenz hat, daß von einem linearen Zusammenhang gesprochen werden kann.

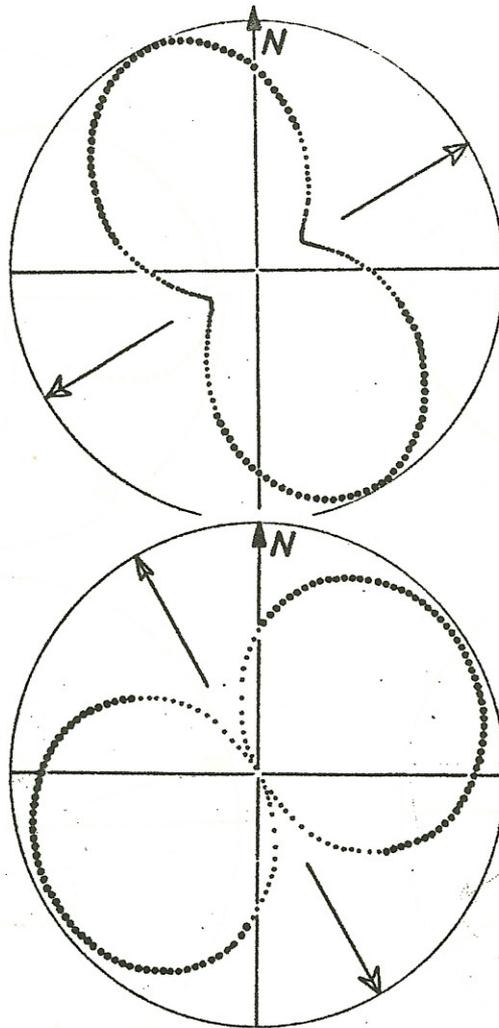


Fig. 2

Andererseits kann man davon ausgehen, daß die Unsymmetrie durch die Physik verursacht wird, dann wird man die zueinander schiefwinkligen Komponenten von E und H aufeinander beziehen.

Um nun zwischen dem "einerseits" und dem "andererseits" entscheiden zu können, werden noch einige weitergehende Beobachtungen diskutiert.

a. Die Richtung der kohärenten Komponenten im Magnetfeld für die beiden Orte DAM und WIT sind gleich, obwohl die korrespondierenden E-Feldkomponenten verschiedene Richtungen haben. Dies bestätigt sich für alle Perioden an den beiden Stationen (fig. 4).

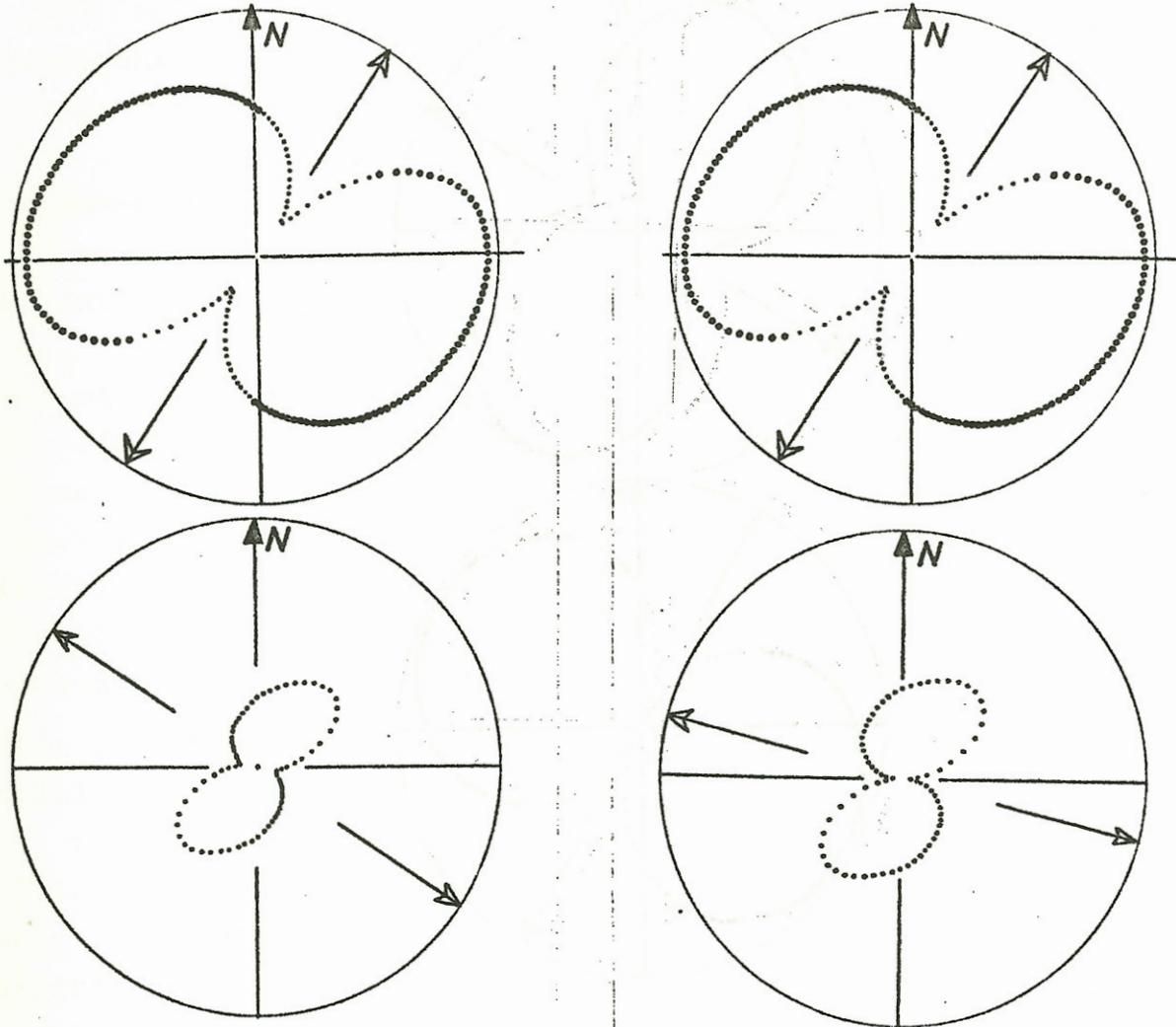


Fig. 3

- a. Links oben: Station WIT, $T=650$ sec. Offener Pfeil ist die Richtung einer Komponente des elektrischen Feldes im Koordinatensystem der minimalen Kohärenz ($N 34^{\circ}E$). Hierzu hat die Komponente des Magnetfeldes ($N 95^{\circ}E$) maximale Kohärenz.
- b. Links unten: Station wie oben. Komponente des elektrischen Feldes ($N 124^{\circ}E$), Magnetfeld ist maximal kohärent bei ($N 44^{\circ}R$). Die Kohärenz erreicht in keinem Koordinatensystem den Wert $\sqrt{4/K}$.
- c. Rechts oben: Station DAM, $T = 650$ sec. Die Richtung der Komponenten des elektrischen Feldes ist ($N 14^{\circ}E$) (FALSCH EINGEZEICHNET), Magnetfeld erreicht maximale Kohärenz bei ($N 92^{\circ}E$), also fast wie bei der Station WIT.
- d. Rechts unten: Komponente des elektrischen Feldes bei ($N 104^{\circ}E$), Magnetfeld erreicht maximale Kohärenz bei ($N 40^{\circ}E$).

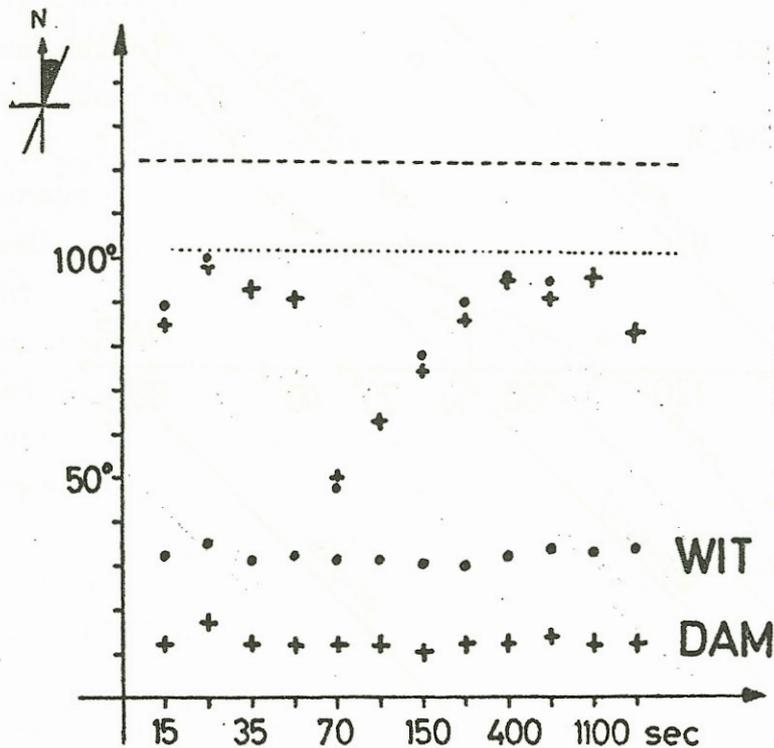


Fig. 4

Fig. 4: Ordinate: Winkel positiv gezählt von N nach E, Abszisse-Periode. Unten die Richtung der großen Komponente des elektrischen Feldes aus dem Koordinatensystem der minimalen Kohärenz an den beiden Orten DAM und WIT, oben (mit den entsprechenden Zeichen) die Richtungen der Komponente des magnetischen Feldes mit der maximalen Kohärenz. Wichtig: Die Richtung der kohärenten Komponenten des Magnetfeldes für DAM und WIT sind praktisch gleich.

b. KIESSLING (1970) gab sich verschiedene Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes im Bereich von 0° bis 180° vor und suchte zu jeder dieser Polarisationsrichtungen die Richtung der kohärenten Richtung im elektrischen Feld (Fig. 5).

Ausgewertet wurden hier Messungen im Kristallin des Bayerischen Waldes. Abszisse: Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes; Ordinate: Richtung der zur jeweiligen Polarisationsrichtung des Magnetfeldes maximal kohärente Komponente des erdelektrischen Feldes.

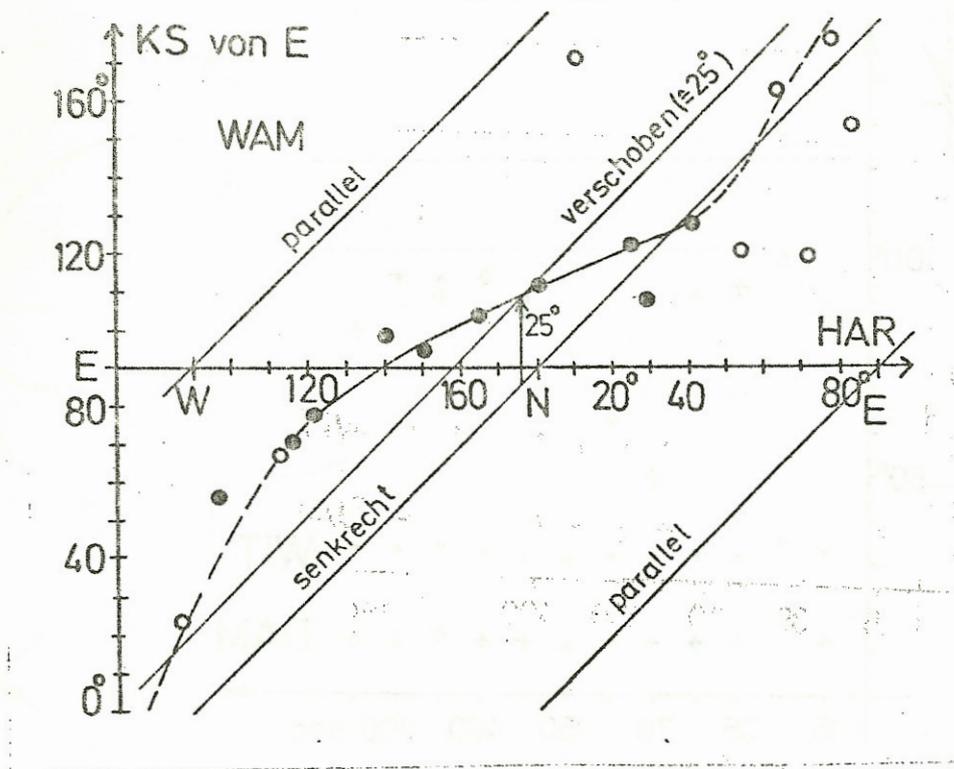


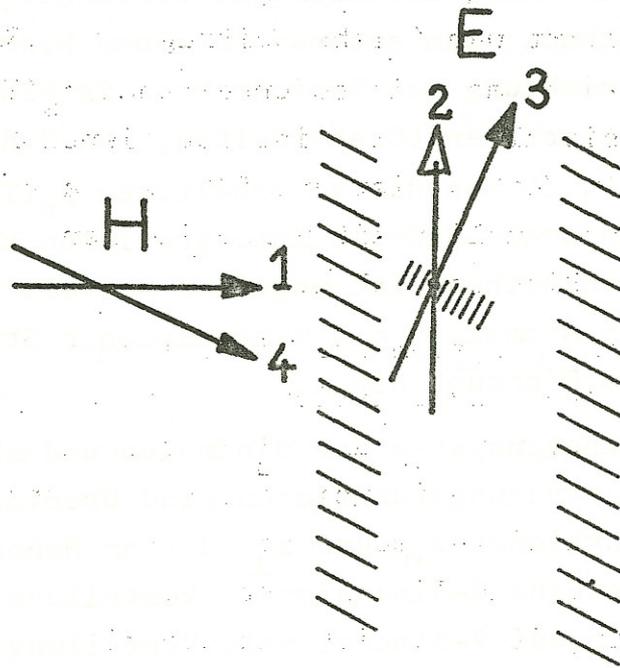
Fig. 5

Diskussion dieser Figur; Wäre die Leitfähigkeit in diesem Gebiet nur eine Funktion der Tiefe ("Cagniard"), dann müßte elektrisches und magnetisches Feld stets senkrecht aufeinander stehen, die Punkte also auf der eingezeichneten Geraden "senkrecht" liegen. Wäre die Leitfähigkeit 2-dimensional verteilt, dann sollten die Punkte auf einer "Schlangenlinie" liegen, die sich symmetrisch um die Gerade "senkrecht" windet, und die sie in jenen Punkten schneidet, in denen das elektrische Feld senkrecht oder parallel zur Streichrichtung der 2-dimensionalen Anomalie gerichtet ist. Die Beobachtung ist aber, daß diese "Schlangenlinie" neben der Geraden "senkrecht" liegt. Verschiebt man aber diese Gerade "senkrecht" um 25° nach links, erhält man formal das Bild einer zwei-dimensionalen Anomalie. Allerdings sind im Schnittpunkt der neuen Geraden mit der Schlangenlinie elektrisches und magnetisches Feld nicht senkrecht zueinander. KIESSLING zeigte nun, daß in diesem Schnittpunkt das elektrische Feld die Richtung der großen Komponente im Koordinatensystem der minimalen Kohärenz hat, und das magnetische Feld die Richtung der maximal kohärenten Komponente hat.

c. Es wurde erwähnt, daß man versucht, aus den Eigenschaften der Übertragungsfunktionen z_{ij} jenes Koordinatensystem zu finden, das sich optimal einer 2-dimensionalen Verteilung anpaßt. Die Schwierigkeit besteht darin, daß die Minima der Übertragungsfunktionen $|z_{xx}|$ und $|z_{yy}|$ bei Drehung des Koordinatensystems nicht im gleichen Koordinatensystem erscheinen (dies führte zu SWIFTs Kriterium, jenes Koordinatensystem zu nehmen, in dem $|z_{xx}|^2 + |z_{yy}|^2$ minimal wird). Geht man nun davon ab, daß die Koordinatensysteme von E und H identisch sein müssen, so findet man tatsächlich, daß die z_{xx} und z_{yy} bei Drehung der Koordinatensysteme gleichzeitig minimal werden, wenn das Koordinatensystem von E einen Winkel mit dem Koordinatensystem von H einschließt. Das Koordinatensystem des elektrischen Feldes ist dann wiederum das Koordinatensystem der minimalen Kohärenz, das des magnetischen Feldes der maximalen Kohärenz (KIESSLING).

3. Physikalisches Modell

Zusammenfassend kann man die diskutierten Beobachtungen mit folgendem Modell einigermaßen erklären.



Die Magnetfeldkomponente H_1 induziert in einer großräumig 2-dimensionalen Anomalie senkrecht zu ihr das elektrische Feld E_2 . Durch eine lokale Anomalie, die eine andere Streichrichtung hat als die großräumige, wird E_2 abgelenkt in Richtung von E_3 . E_3 ist also die kohärente Richtung zu H_1 . Andererseits induziert H_4 senkrecht zu ihr, also in Richtung von E_3 , ebenfalls einen kleinen Anteil zu E_3 . Somit findet man zu E_3 zwei kohärente Richtungen im Magnetfeld (H_1 und H_4), was zu den unsymmetrischen Figuren von **Figur 3** führt.

Aus der Geologie des Gebietes, in dem die beiden Stationen DAM und WIT liegen, ist bekannt, daß WIT am Rande eines lokalen tiefen Troges mit hoher Leitfähigkeit liegt.

4. Schlußfolgerungen

Zunächst einmal fragt man sich, ob die Bestimmung der Übertragungsfunktionen durch diese Methode der minimalen und maximalen Kohärenz besser wird. Formal ist dies zu bejahen, da maximale Kohärenz identisch ist mit minimalem Fehler. Hierfür ein Beispiel: Es wurde die ρ_s -Kurve für die Station WIT berechnet, einmal nach der beschriebenen Methode, zum anderen in einem Koordinatensystem, das nach der Streichrichtung des Rheingrabens in einer geologischen Karte (N 15°E) orientiert war (Siehe Beitrag von G.REITMAYR), Fig.7. Eine andere Frage ist, ob man die so erhaltenen $\rho_s(T)$ -Kurven eindeutig durch 2-dimensionale Modelle interpretieren kann. Die Wirkung der beschriebenen Methode ist ungefähr so, als würden alle in Betracht kommenden Anomalien mit verschiedener Streichrichtung nun eine einheitliche Richtung haben.

Denn die im Koordinatensystem der minimalen und maximalen Kohärenz bestimmten Übertragungsfunktionen sind Überlagerungen der Haupt-Übertragungsfunktionen $z_{||}$ und z_{\perp} der am Meßort wirksamen Anomalien. Somit kann eine 3-dimensionale Verteilung der Leitfähigkeit formal als quasi-2-dimensionale Verteilung betrachtet werden. Ob dies bei allen möglichen Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit zutrifft, ist fraglich, da die hier diskutierten Ergebnisse auf Beobachtungen aus überwiegend 2-dimensional verteilten

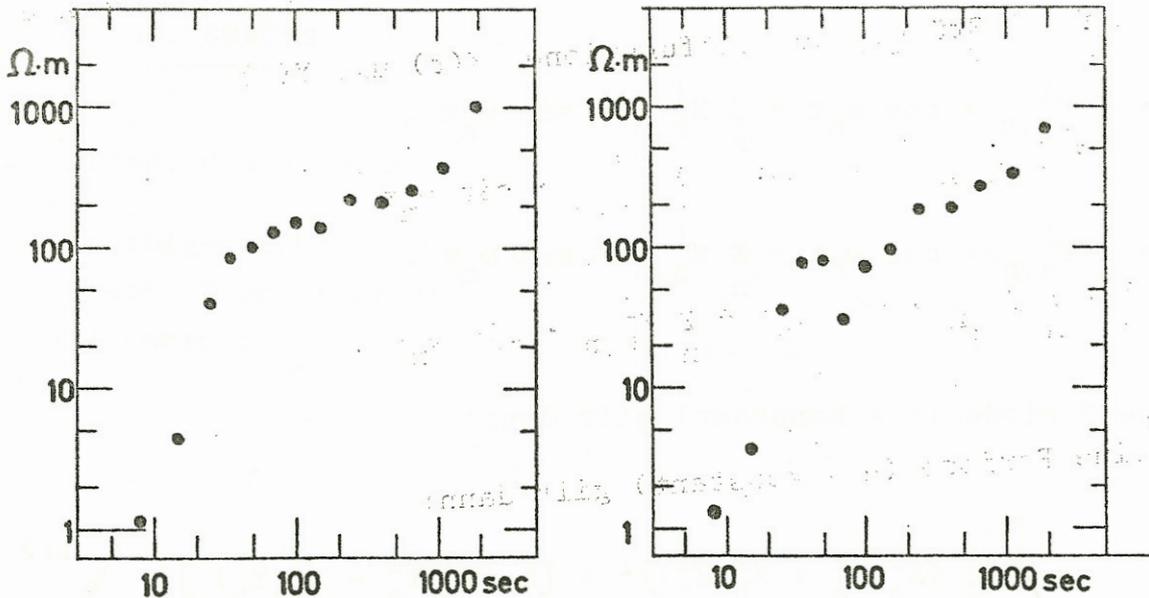


Fig. 7

Links: $\rho_s(T)$ berechnet in den Koordinatensystemen, die mit der Methode der minimalen und maximalen Kohärenz gefunden wurden (siehe hierzu Fig. 4, WIT): rechts $\rho_s(T)$ berechnet im Koordinatensystem N 15°E (= Streichrichtung des Rheingrabens). Man erhält etwa die gleiche Kurve, doch streuen die Werte in der rechten Figur mehr.

Leitfähigkeiten stammen. Es ist zum Beispiel möglich, daß sich der "E-polarisierte" Anteil aus der einen Anomalie mit dem "H-polarisierten" Anteil aus der anderen Anomalie überlagert.

Anhang: Berechnung der Kohärenz zwischen zwei Komponenten X und Y:

Man habe i Stücke der Zeitfunktionen X(t) und Y(t):

$$X^i(t) = \sum_n X_{a,n}^i \cdot \cos \omega_n t + \sum_n X_{b,n}^i \cdot \sin \omega_n t ,$$

$$Y^i(t) = \sum_n Y_{a,n}^i \cdot \cos \omega_n t + \sum_n Y_{b,n}^i \cdot \sin \omega_n t .$$

Für eine Periode (n = konstant) gilt dann:

$$\text{KOH}(X,Y) = \left(\frac{[\sum_i (X_a^i Y_a^i + X_b^i Y_b^i)]^2 + [\sum_i (X_b^i Y_a^i - X_a^i Y_b^i)]^2}{\sum_i (X_a^{i2} + X_b^{i2}) \cdot \sum_i (X_a^{i2} + Y_b^{i2})} \right)^{1/2}$$