

R. WINTER, Göttingen

"Modellrechnungen und Inversionsverfahren angewandt auf Registrierungen erdmagnetischer Variationen auf einem Profil über den Oberrheingraben"

Mittwoch, den 15.9.1971

In den Jahren 1966 und 1967 wurden erdmagnetische Variationen mit insgesamt 16 Variographen-Stationen auf einem 380 km langen Profil von Trier bis Fürstenfeldbruck registriert (WINTER 1967, 1970). Die Registrierungen dienen der Untersuchung des Oberrheingrabens als Anomalie der elektrischen Leitfähigkeit mit Methoden der Erdmagnetischen Tiefensondierung.

Zur Analyse wurden ausgesuchte bayartige Störungen verschiedener Periode digitalisiert und harmonisch analysiert. Amplituden und Phasen - bezogen auf den Zeitpunkt des Z-Maximums - wurden, unterteilt in fünf Periodengruppen, einem Ausgleichsverfahren unterworfen, um die komplexen Übertragungskoeffizienten der linearen Beziehung

$$\tilde{Z} = A \cdot \tilde{H} + B \cdot \tilde{D} \quad (1)$$

zu bestimmen.

Dabei sind

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0 e^{i\xi}, \\ \tilde{D} &= D_0 e^{i\eta}, \\ \tilde{Z} &= Z_0 e^{i\zeta} \end{aligned} \quad (2a)$$

die komplexen Amplituden der mit der Kreisfrequenz ω harmonisch auftretende Nord-, Ost- und Vertikalkomponente

$$\begin{aligned} H(\underline{r}, t) &= \text{Re} \{ \tilde{H}(\underline{r}, \omega) e^{i\omega t} \}, \\ D(\underline{r}, t) &= \text{Re} \{ \tilde{D}(\underline{r}, \omega) e^{i\omega t} \}, \\ Z(\underline{r}, t) &= \text{Re} \{ \tilde{Z}(\underline{r}, \omega) e^{i\omega t} \} \end{aligned} \quad (2b)$$

an einem festen Beobachtungsort. Die Übertragungskoeffizienten sind nur noch orts- und periodenabhängig. Für jede Periodengruppe bestimmt sich A und B dadurch, daß bei Verwendung von mehr als zwei Effekten die Summe der Abweichquadrate

$$Q = [\delta\tilde{Z} \ \delta\tilde{Z}^*]^1) \quad \text{mit} \quad \delta\tilde{Z} = A\tilde{H} + B\tilde{D} - \tilde{Z} \quad (3)$$

zu einem Minimum gemacht wird.

Mit (1) und den Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial A^*} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial B^*} = 0 \quad (4)$$

erhält man ein System von zwei linearen Gleichungen für A und B

$$\begin{aligned} A [\tilde{H}\tilde{H}^*] + B [\tilde{D}\tilde{H}^*] &= [\tilde{Z}\tilde{H}^*], \\ A [\tilde{H}\tilde{D}^*] + B [\tilde{D}\tilde{D}^*] &= [\tilde{Z}\tilde{D}^*] \end{aligned} \quad (5)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} A &= \frac{[\tilde{Z}\tilde{H}^*] [\tilde{D}\tilde{D}^*] - [\tilde{Z}\tilde{D}^*] [\tilde{D}\tilde{H}^*]}{[\tilde{H}\tilde{H}^*] [\tilde{D}\tilde{D}^*] - [\tilde{H}\tilde{D}^*] [\tilde{D}\tilde{H}^*]}, \\ B &= \frac{[\tilde{Z}\tilde{D}^*] [\tilde{H}\tilde{H}^*] - [\tilde{Z}\tilde{H}^*] [\tilde{H}\tilde{D}^*]}{[\tilde{H}\tilde{H}^*] [\tilde{D}\tilde{D}^*] - [\tilde{H}\tilde{D}^*] [\tilde{D}\tilde{H}^*]}. \end{aligned} \quad (6)$$

1) Schreibweise nach GAUSS: $[a \cdot b] = \sum a_v b_v$

Der nicht korrelierte Anteil von \tilde{Z} , in dem auch sämtliche Fehler enthalten sind, läßt sich ausdrücken durch

$$\epsilon_Z = \sqrt{1 - \frac{A [\tilde{H}\tilde{Z}^*] + B [\tilde{D}\tilde{Z}^*]}{[\tilde{Z}\tilde{Z}^*]}} \quad (7)$$

Aufgespalten in Real- und Imaginärteil

$$A = A_u + i A_v, \quad (8)$$

$$B = B_u + i B_v \quad (9)$$

läßt sich zur graphischen Darstellung ein 0° - Pfeil

$$C_u = \sqrt{A_u^2 + B_u^2}, \quad \tan \theta_u = \frac{B_u}{A_u} \quad (10)$$

und 90° - Pfeil

$$C_v = \sqrt{A_v^2 + B_v^2}, \quad \tan \theta_v = \frac{B_v}{A_v} \quad (11)$$

mit jeweils angegebener Länge und Richtung bestimmen (SCHMUCKER 1970, p. 21-29).

In Fig. 1 wurden 0° - und 90° -Pfeile für fünf Periodengruppen über dem Profil dargestellt. In Übereinstimmung mit dem geomagnetischen Induktionspfeil wird der Winkel θ_u , resp. θ_v unter Berücksichtigung der Deklination von geographisch Nord über Ost aufgetragen. Im Fall einer streng zweidimensionalen Leitfähigkeitsanomalie stimmt die Richtung von 0° - und 90° -Pfeil mit der des geomagnetischen Induktionspfeils überein und zeigt von Gebieten hoher Leitfähigkeit weg und zu solchen niedriger Leitfähigkeit hin (SIEBERT 1969, vgl. auch den Beitrag von SIEBERT in diesem Band). Der überwiegende Teil der in Fig. 1 dargestellten Pfeile hat eine starke Südkomponente, was vielleicht auf eine großräumige Anomalie, wahrscheinlicher jedoch auf einen Nord-Süd-Gradienten des inhomogenen

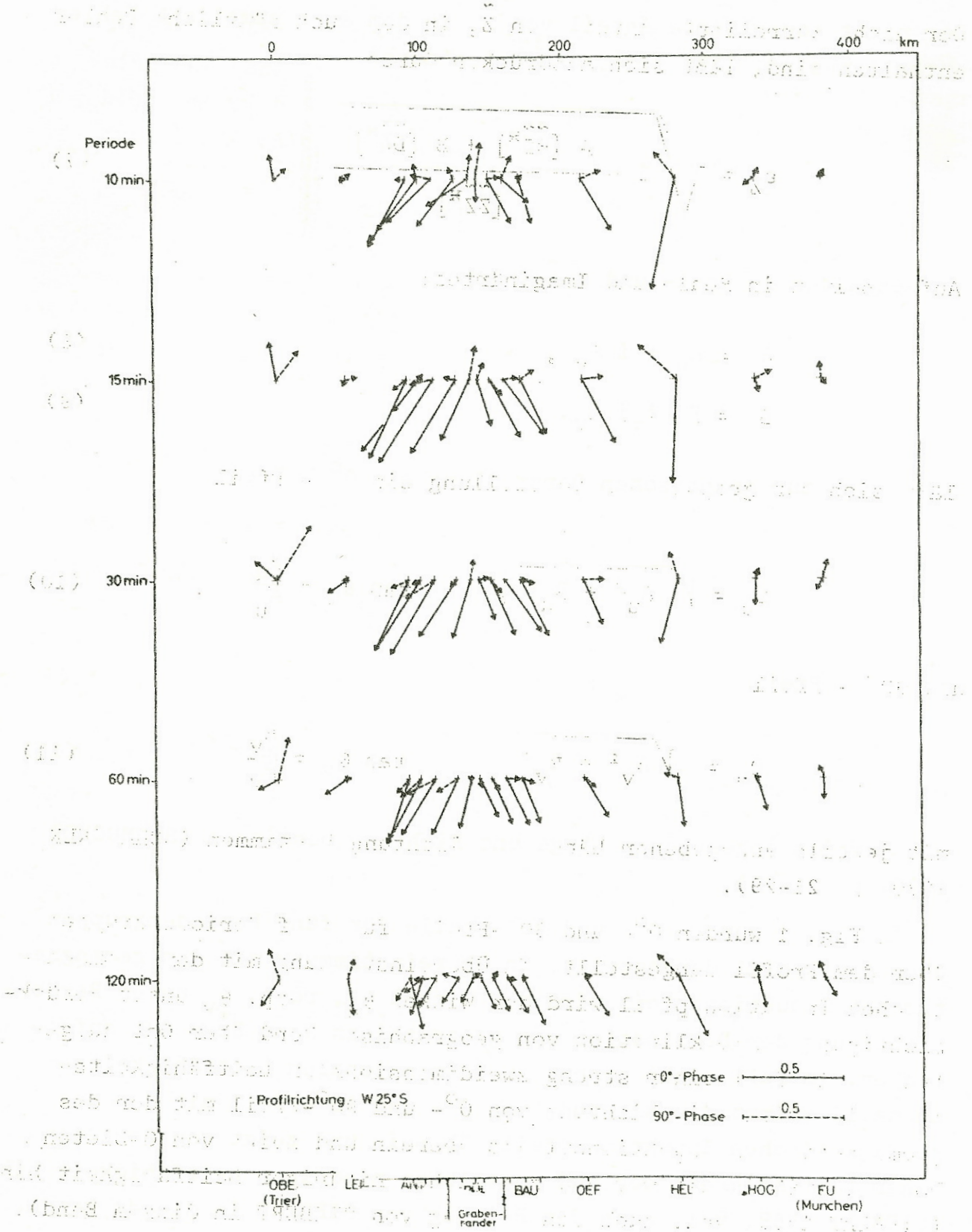


Fig. 1: Graphische Darstellung der komplexen Übertragungs-koeffizienten für 16 Stationen auf einem Profil quer zum Oberrheingraben. Änderungen von Länge und Richtung mit dem Ort und der Periode geben den anomalen Anteil der Z-Variationen wieder.

genen Anteils der H-Komponente schließen läßt. Abweichungen von dieser Lage geben den anomalen inneren Anteil insbesondere der Z-Variationen wieder, der auf den Oberrheingraben als Leitfähigkeitsanomalie im Untergrund zurückzuführen ist.

Man betrachtet die vorliegende Anomalie als zweidimensionale Leitfähigkeitsstruktur, deren Vorzugsrichtung mit dem Winkel α gegen magnetisch Nord, positiv von Nord über Ost zählend, streicht. Eine Aufteilung des Horizontalfeldes parallel und senkrecht zur Streichrichtung wird durch folgende Drehung des Koordinatensystems erreicht:

$$\begin{aligned}\tilde{H}' &= \tilde{H} \cos \alpha + \tilde{D} \sin \alpha \\ \tilde{D}' &= \tilde{D} \cos \alpha - \tilde{H} \sin \alpha\end{aligned}\tag{12}$$

Ebenso transformieren sich die Übertragungskoeffizienten.

$$\begin{aligned}A' &= A \cos \alpha + B \sin \alpha \\ B' &= B \cos \alpha - A \sin \alpha\end{aligned}\tag{13}$$

Fig. 2 zeigt das Ergebnis dieser Drehung für den Real- und Imaginärteil des Übertragungskoeffizienten ¹⁾, der im Fall des Oberrheingrabens vorwiegend wirksamen Magnetfeldkomponente. Es soll hier deutlich gemacht werden, wie stark die räumliche Änderung insbesondere des Realteils B_u von der Bestimmung des Drehwinkels α abhängt. Die Forderung, im zweidimensionalen Fall für A geringe, für B starke räumliche Änderung über dem Profil zu erreichen führt zu keiner eindeutigen Richtung und zumindest für bestimmte Periodenbereiche zu unrealistischen Drehwinkeln im negativen Bereich. Die Ursache liegt wahrscheinlich in dem Einfluß des überwiegenden großräumigen Anteils und seiner starken unsystematischen Streuung über dem Profil (ausgedrückt durch A), verbunden mit der Tatsache, daß eine Trennung des ortsabhängigen Anteils der Variationen in seinen inhomogenen äußeren und seinen anomalen inneren Anteil erforderlich wird. Im folgenden wird davon ausgegangen,

1) Der Apostroph wird weggelassen, wenn aus dem Zusammenhang die Zuordnung eindeutig hervorgeht.

Die Abbildung zeigt den Real- und Imaginärteil des Übertragungskoeffizienten B der Magnetfeldkomponente senkrecht zur Grabenrichtung über dem Profil bei Drehung des Koordinatensystems um $\alpha = -15^\circ, 0^\circ, +15^\circ$. Die starke Abhängigkeit von der Wahl des Drehwinkels α wird besonders im Realteil B_u deutlich.

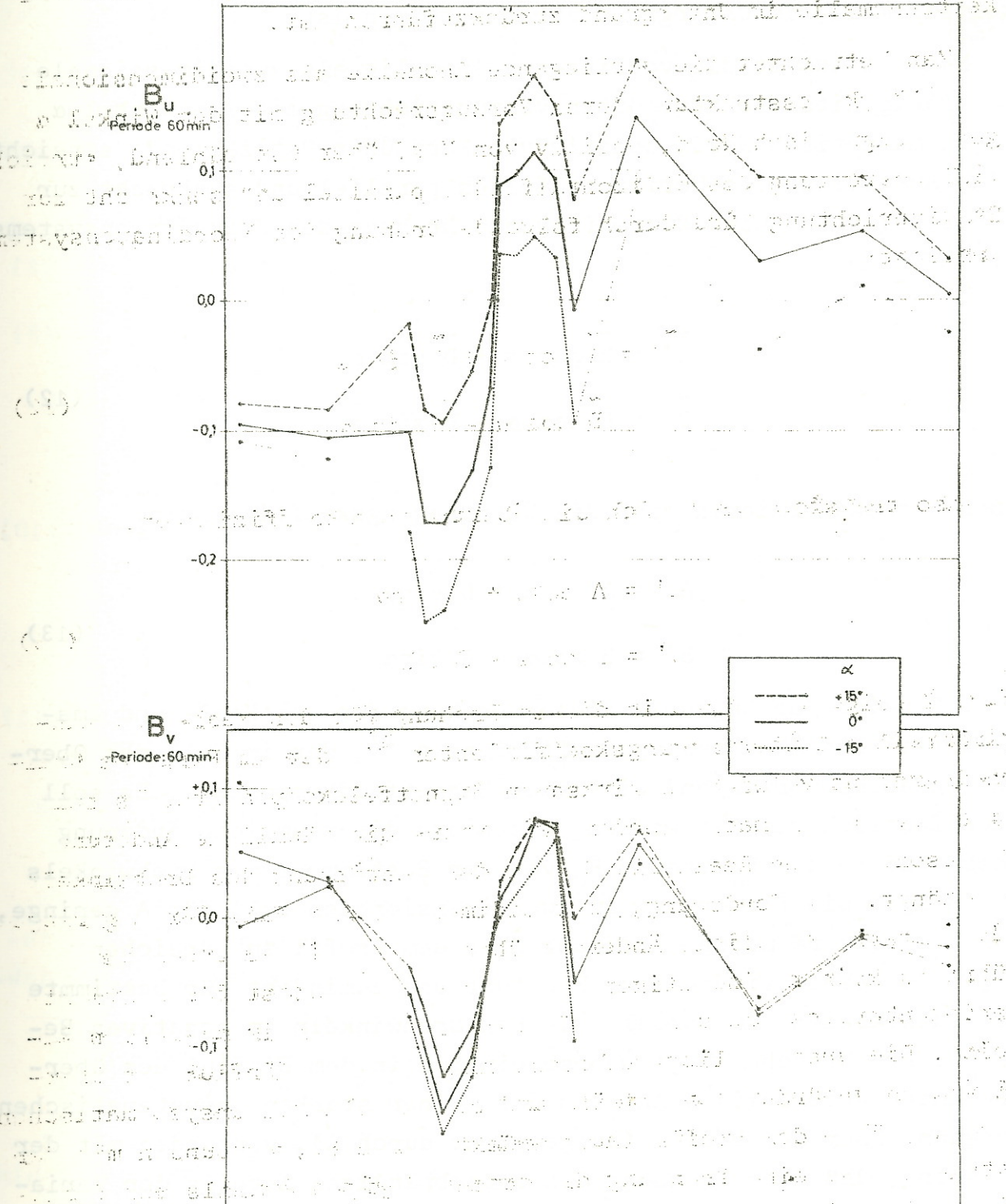


Fig. 2: Real- und Imaginärteil des Übertragungskoeffizienten B der Magnetfeldkomponente senkrecht zur Grabenrichtung über dem Profil bei Drehung des Koordinatensystems um $\alpha = -15^\circ, 0^\circ, +15^\circ$. Die starke Abhängigkeit von der Wahl des Drehwinkels α wird besonders im Realteil B_u deutlich.

daß der äußere inhomogene Anteil der wirksamen horizontalen Magnetfeldkomponente senkrecht zur Streichrichtung der Grabenanomalie nur einen geringen räumlichen Gradienten hat, der besonders dann vernachlässigt werden kann, wenn durch entsprechende Auswahl der Baystörungen alle Polarisationsrichtungen gleich häufig vorkommen.

Trägt man Amplitude und Phase von B als Funktion der vorkommenden Frequenzen 0,5, 1, 2, 4 und 6 cph¹⁾ für die Grabenrandstationen - wo |B| ein Maximum hat - auf und läßt als Kurvenparameter den Drehwinkel die Werte $\alpha = -5^\circ, 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ annehmen, so erhält man Fig. 3. Das Verhalten läßt sich als eine verschieden starke Bewichtung des anomalen Anteils für bestimmte Frequenzen interpretieren. Wenn sowohl am westlichen Grabenrand (Station MOD = Modenbacher Hof) als auch am östlichen Grabenrand (Station JÖH = Jöhlingen) die Änderung von Amplitude B und Phase ϕ_B mit der Frequenz möglichst gering sein soll, so ist der Drehwinkel zu $\alpha = 5^\circ$ zu wählen. Diese Richtung stimmt ungefähr mit der Richtung überein, die durch die Randverwerfungen und Sedimentgrenzen des Oberrheingrabens in seiner gesamten Länge angedeutet wird.

Die Koordinatentransformation (13) der Übertragungskoeffizienten für $\alpha = 5^\circ$ ist in Fig. 4 durchgeführt. Da die Drehung um $\alpha = 5^\circ$ die tatsächliche Profilrichtung $\alpha' = 25^\circ$ nicht erreicht, sind die Stationsabstände von Grabenmitte mit $\cos(\alpha' - \alpha) = 0,94$ zu multiplizieren. Der Realteil A_u nimmt im Verhältnis zu B_u große negative Werte an, überlagert von unsystematischen Streuungen über dem Profil. Da der Imaginärteil A_v um Null schwankt, erhält auch die Phase $\phi_A = \arctan(A_v / A_u)$ nur kleine Werte. In B_u und B_v erkennt man die erwartete räumliche Änderung des anomalen Anteils der durch den Oberrheingraben induzierten Z-Variationen, bezogen auf das lokale (beobachtete) Horizontalfeld. Eine Periodenabhängigkeit von Amplitude und Phase ist besonders am westlichen Grabenrand zu erkennen.

Der Übertragungskoeffizient B (nach Drehung um α) enthält noch den anomalen Anteil des Horizontalfeldes:

1) cph = cycles per hour

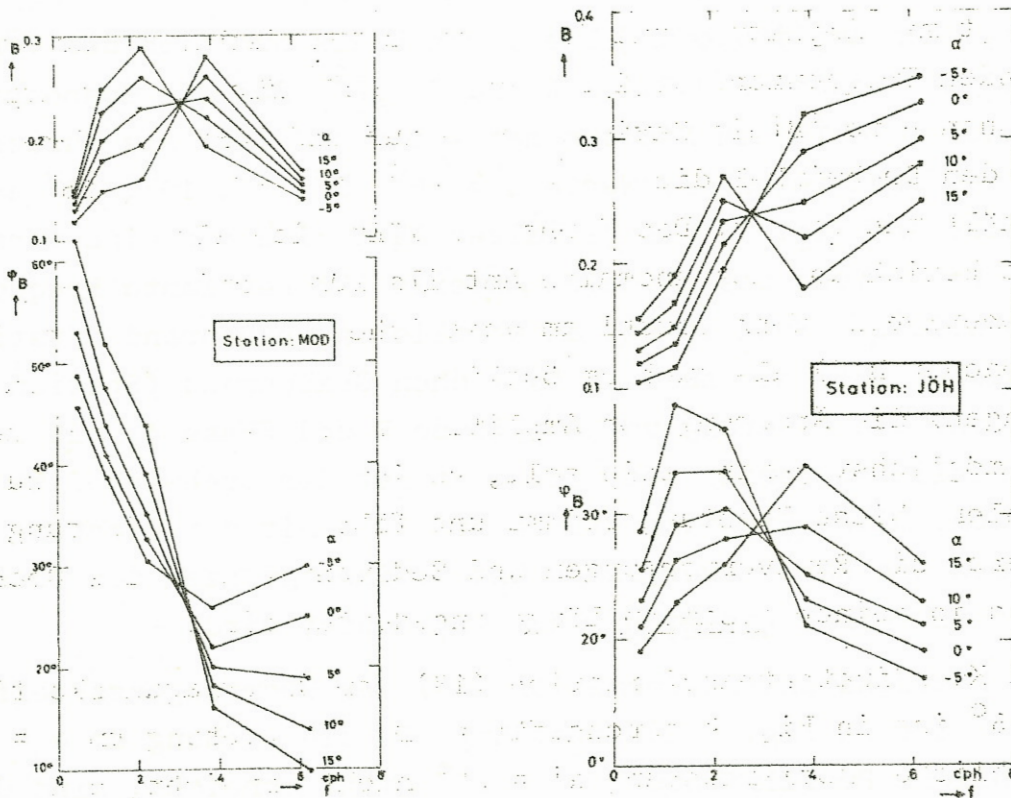


Fig. 3: Betrag B und Phase ϕ_B des Übertragungskoeffizienten der Komponente senkrecht zum Graben für die am westlichen, resp. östlichen Grabenrand liegenden Stationen MOD und JÖH in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Darstellungen zeigen die geringste Änderung mit der Frequenz bei einem Kurvenparameter im Mittel von $\alpha = 5^\circ$.

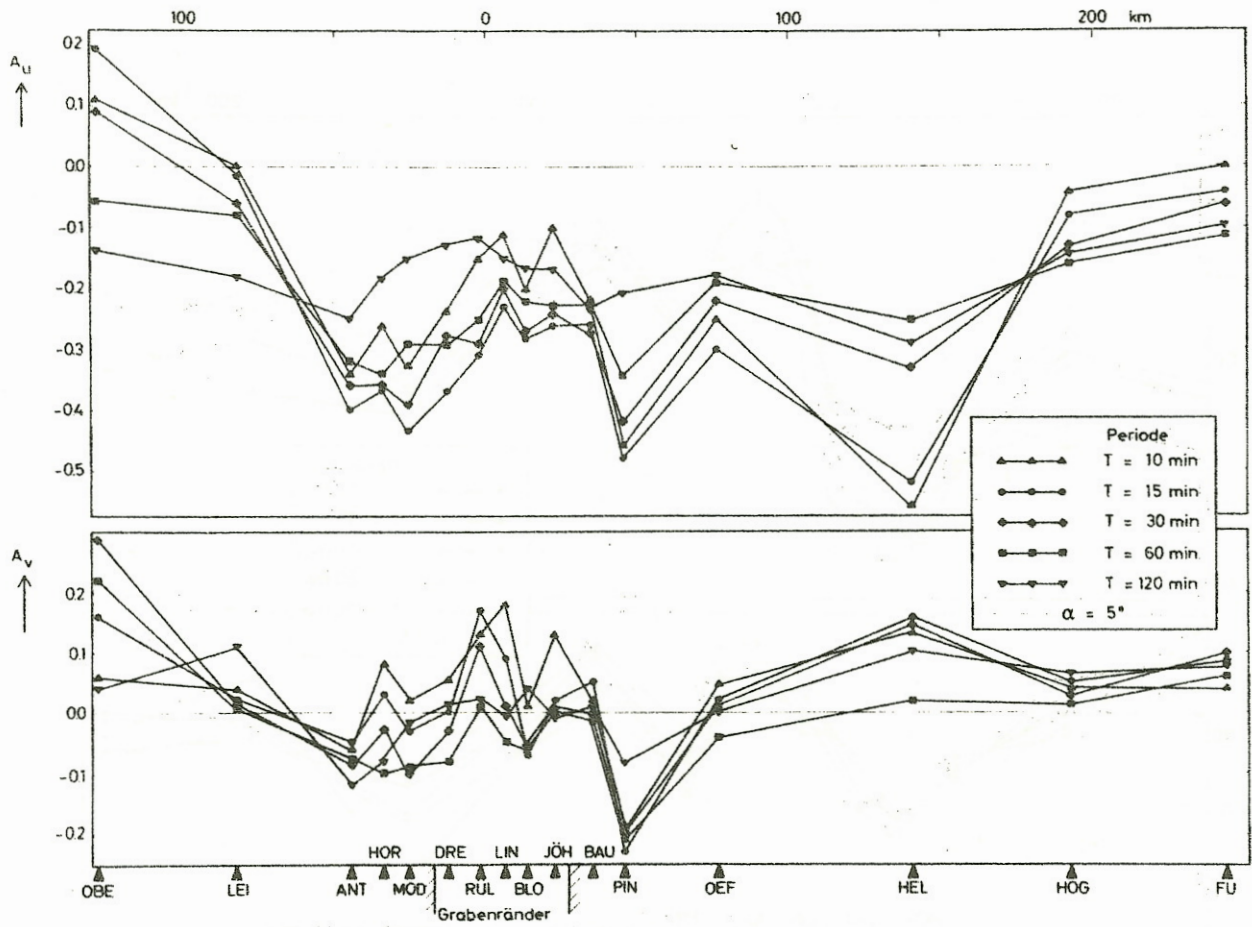


Fig. 4a: Real- und Imaginärteil der Übertragungskoeffizienten $A = A_u + iA_v$ parallel und $B = B_u + iB_v$ senkrecht zu der von magn.^n Nord über Ost um $\alpha = 5^\circ$ gedrehten Streichrichtung der Grabenanomalie für fünf Periodenbereiche über dem Profil. Die räumliche Änderung des anomalen Anteils der durch den Oberrheingraben induzierten Z-Variationen, normiert auf das lokale Horizontalfeld wird durch $B = \frac{Z_a}{(H_a + H_n)}$ wiedergegeben.

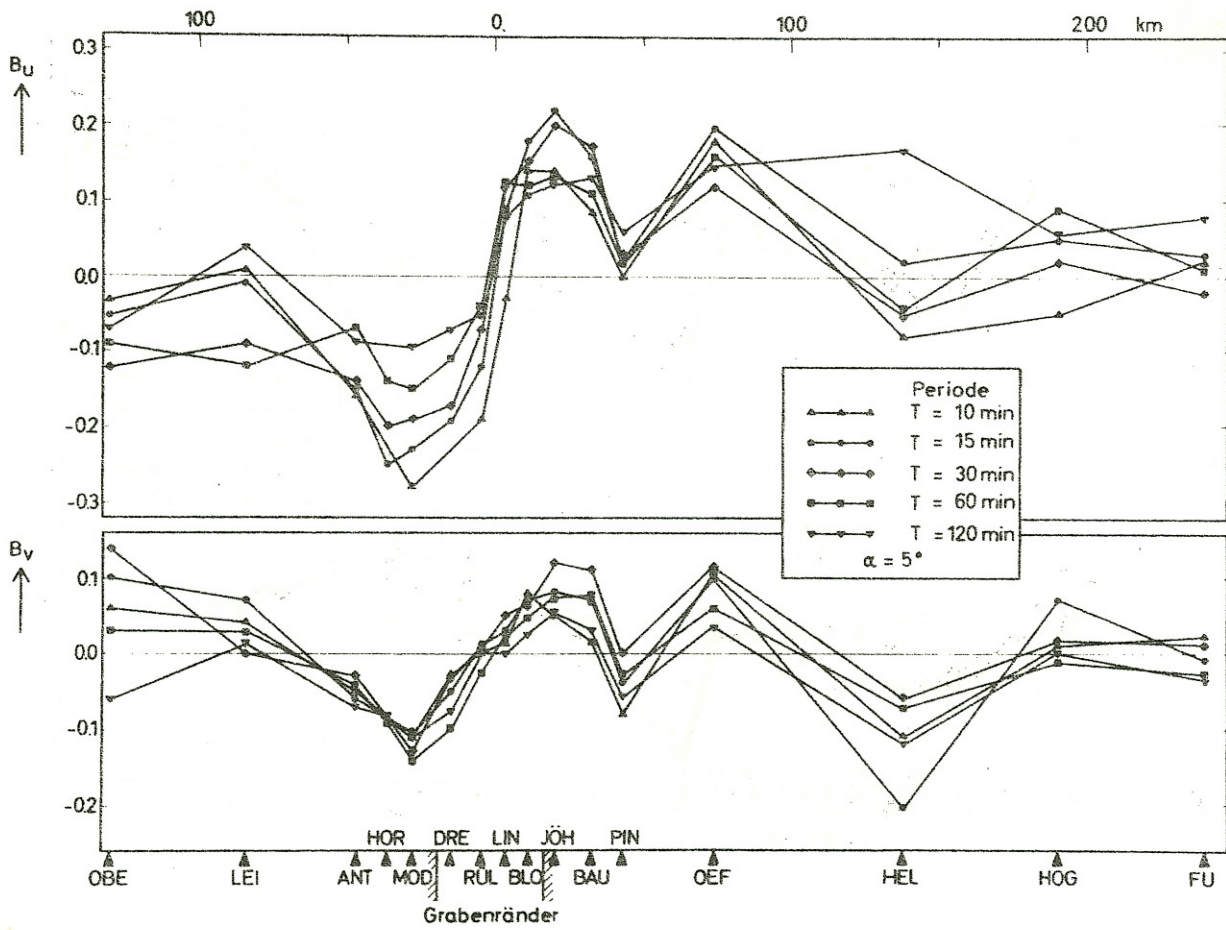


Fig. 4b: Text s. Fig. 4a

$$B = \frac{\tilde{Z}_a}{\tilde{H}_a + \tilde{H}_n} \quad (14)$$

\tilde{H}_a läßt sich mit Hilfe des KERTZ-Operators K angewandt auf \tilde{Z}_a eliminieren¹⁾ (KERTZ 1954)

$$\tilde{H}_a = -K \times \tilde{Z}_a \quad (15)$$

Zu diesem Zweck wurden 48 äquidistante Werte für B mit Hilfe des Interpolationsverfahren nach LAGRANGE über das Profil verteilt. Dabei wurde durch je vier beobachtete Stützstellen (y_k, B_k), $k = 0, 1, 2, 3$, ein Polynom dritten Grades gelegt, wodurch zusätzlich eine sinnvolle Glättung des Beobachtungsmaterials erreicht wird.

$$b(y) = \sum_{k=0}^n B_k \frac{L_k(y)}{L_k(y_k)}, \quad n = 3 \quad (16)$$

$$L_k(y) = (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{k-1})(y - y_{k+1}) \dots (y - y_n) \quad (17)$$

$L_k(y_k)$ nimmt den Wert von $L_k(y)$ in (17) für $y = y_k$ an. Mit $N = 48$ Werten ist (14) und (15) ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $z = \tilde{Z}_a / \tilde{H}_n$:

$$z + (K \times Z) \cdot b = b \quad (18)$$

$$z_1 - \frac{3b_1}{2\pi} z_2 - \frac{b_1}{2\pi} z_3 - \frac{b_1}{3\pi} z_4 - \dots - \frac{b_1}{(N-1)\pi} z_{N-1} - \frac{b_1}{N\pi} z_N = b_1,$$

$$\frac{3b_2}{2\pi} z_1 + z_2 - \frac{3b_2}{2\pi} z_3 - \frac{b_2}{2\pi} z_4 - \dots - \frac{b_2}{(N-1)\pi} z_{N-1} - \frac{b_2}{N\pi} z_N = b_2,$$

1) Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren wird für Realteil und Imaginärteil von B getrennt ausgeführt.

$$\frac{b_3}{2\pi} z_1 + \frac{3b_3}{2\pi} z_2 + z_3 - \frac{3b_3}{2\pi} z_4 - \dots - \frac{b_3}{(N-1)\pi} z_{N-1} - \frac{b_3}{N\pi} z_N = b_3,$$

$$\frac{b_N}{N\pi} z_1 + \frac{b_N}{(N-1)\pi} z_2 + \frac{b_N}{(N-2)\pi} z_3 + \frac{b_N}{(N-3)\pi} z_4 + \dots + \frac{3b_N}{2\pi} z_{N-1} + z_N = b_N.$$

Die gewonnene Lösung z_p ist das anomale Vertikalfeld, um $\alpha = 5^\circ$ in Profilrichtung gedreht und normiert mit dem normalen Horizontalfeld. Aus z_p läßt sich mit (15) $h_p = -K \cdot z_p$ ermitteln (Fig. 5). Außer einem geglätteten Verlauf sind für z_p insbesondere für höhere Frequenzen Abweichungen bei den Extrema gegenüber dem Verlauf von B(14) festzustellen. Diese letzte Präparation der Ausgangsdaten ist notwendig für die Anwendung des später angegebenen Inversionsverfahrens.

Die zur Interpretation angewandten Verfahren zur Modellrechnung und Inversion nach SCHMUCKER (1970, 1971) sollen hier kurz beschrieben werden. Von den drei Komponenten eines rechtwinkligen Koordinatensystems zeige x in Richtung der langgestreckten Anomalie, y in der Horizontalebene senkrecht dazu und Z vertikal nach unten. Eine erste Vereinfachung besteht in der Annahme einer Zweidimensionalität von Leitfähigkeitsstruktur und äußerem Magnetfeld. In diesem Fall (E - Polarisation) hat das elektrische, bzw. magnetische Feld die Komponenten

$$\underline{E} = (E_x, 0, 0) \text{ und } \underline{H} = (0, H, Z). \tag{19}$$

Der normale äußere Anteil der Vertikalkomponente wird durch einen entgegengerichteten normalen inneren Anteil kompensiert:

$$Z_{in} = - Z_{en}. \tag{20}$$

Aufgespalten in normalen und anomalen Anteil haben die Felder (19) in der Ebene $z=0$ die Form:

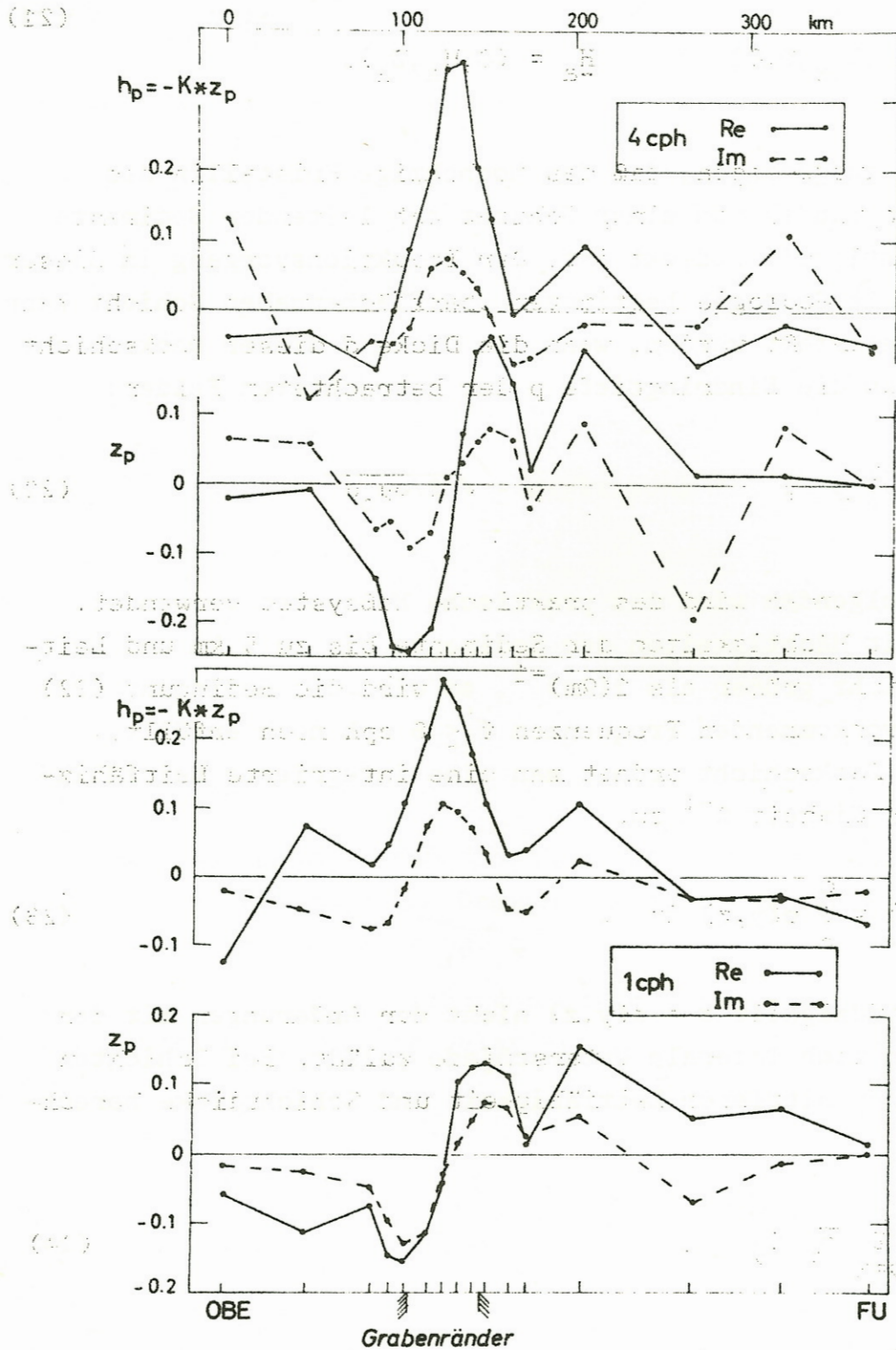


Fig. 5: Räumliche Änderung des anomalen Vertikal- und Horizontalfeldes, um $\alpha=5^\circ$ in Profilrichtung gedreht und normiert mit dem normalen Anteil des Horizontalfeldes für die Frequenzen 1 cph und 4 cph: $z_p = Z_a/H_n$ und $h_p = H_a/H_n$. Ausgeprägte Extrema von h_p und z_p befinden sich über der Grabenmitte, resp. den Grabenrändern.

$$\begin{aligned} \underline{E}_n &= (E_{nx}, 0, 0) , & \underline{H}_n &= (0, H_n, 0) , \\ \underline{E}_a &= (E_{ax}, 0, 0) , & \underline{H}_a &= (0, H_a, Z_a) . \end{aligned} \quad (21)$$

Es wird davon ausgegangen, daß das hochohmige Kristallin des tieferen Untergrundes von einer Schicht gut leitender Sedimente variabler Mächtigkeit bedeckt ist. Der Induktionsvorgang in dieser durch die lokale Geologie bestimmten oberflächennahen Schicht kann näherungsweise erfaßt werden, wenn die Dicke d dieser Deckschicht klein ist gegen die Eindringtiefe p der betrachteten Felder:

$$d \lesssim \frac{1}{3} p , \quad p = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma} . \quad (22)$$

Hier und im folgenden wird das praktische Maßsystem verwendet. Rechnet man mit Mächtigkeiten der Sedimente bis zu 5 km und Leitfähigkeiten nicht größer als $1(\Omega\text{m})^{-1}$, so wird die Bedingung (22) für die hier vorkommenden Frequenzen $f \leq 6$ cph noch erfüllt. Dieser dünnen Deckschicht ordnet man eine integrierte Leitfähigkeit τ mit der Einheit Ω^{-1} zu:

$$\tau(y) = \int_0^d \sigma(y,z) dz , \quad (23)$$

wobei die Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(y,z)$ nicht nur Änderungen mit der Tiefe, sondern auch laterale Unterschiede zuläßt. Bei Schichten mit vorgegebener mittlerer Leitfähigkeit und Schichtdicke berechnet sich τ zu

$$\tau = \sum_{v=1}^n \bar{\sigma}_v d_v . \quad (24)$$

Mit dem Ansatz

$$\tau(y) = \tau_n + \tau_a(y) \quad (25)$$

wird die integrierte Leitfähigkeit in einen normalen (hier $\tau_n = \tau(-\infty)$) und einen anomalen Anteil $\tau_a(y)$ aufgespalten. Mit der Annahme

$$E_x(y,z) = \text{const} \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq d \quad (26)$$

wird die Schichtstromdichte mit (23) zu

$$j_{sx}(y) = \int_0^d \sigma(y,z) E_x(y,z) dz,$$

$$j_{sx}(y) = \tau(y) \cdot E_x(y). \quad (27)$$

Dann läßt sich mit (25) unter Weglassung des Index x schreiben:

$$j_{sn} + j_{sa} = (\tau_n + \tau_a) \cdot (E_n + E_a),$$

$$j_{sa} = \tau_a E_n + (\tau_n + \tau_a) E_a \quad (28)$$

mit $j_{sn} = \tau_n E_n$. (29)

Die Materialgleichung für die dünne Schicht (28) enthält im ersten Glied den Anteil nach dem Ohmschen Gesetz, im zweiten den Anteil der lokalen Selbstinduktion.

Die Maxwell'schen Gleichungen unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms und der relativen Permeabilität $\mu_r = 1$ erhalten die Form:

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j}, \quad (30a)$$

$$\text{rot } \underline{E} = - \mu_0 \dot{\underline{H}}, \quad (30b)$$

$$\text{div } (\mu \underline{H}) = 0. \quad (30c)$$

Mit dem Ansatz (21) folgen aus (30a) und (30b) die Induktionsgleichungen für die dünne Schicht:

$$H^+(y, -0) - H^-(y, +0) = j_{sx}(y) , \quad (31)$$

$$\frac{\partial E_x(y)}{\partial y} = \mu_0 Z(y) . \quad (32)$$

Unter Verwendung von (26) folgt aus der letzten Gleichung

$$Z(y, z) = \text{const für } 0 \leq z \leq d . \quad (33)$$

Diese Gleichungen gelten auch getrennt für den normalen und anomalen Anteil.

Bezeichnet man die Faltung einer Funktion $f(\omega, y)$ mit dem Faltungskern $F(\omega, y)$ durch

$$F \ast f = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y - \eta) f(\eta) d\eta , \quad (35)$$

so haben die weiter unten erklärten Faltungskerne G , K und K^- folgende Bedeutung:

$$E_a = i\omega\mu_0 (G \ast Z_a) , \quad (36)$$

$$H_a^+ = K \ast Z_a , \quad (37)$$

$$H_a^- = K^- \ast Z_a . \quad (38)$$

Die Beziehung (38) erhält man unter Berücksichtigung von (33). Die in (36) und (37) vorkommenden Kernfunktionen haben folgendes Aussehen:

$$G = \frac{1}{2} \text{sgn } y , \quad (39)$$

$$K = \frac{1}{\pi y} . \quad (40)$$

Die Faltung mit dem Kern K ist identisch mit dem in (15) angewandten KERTZ-Operator. Die Kernfunktion K^- läßt sich für den Fall

eines homogen geschichteten Halbraums über eine Fouriertransformation im Wellenzahlbereich (ω, k) berechnen (SCHMUCKER 1971, vgl. auch den Beitrag von SCHMUCKER in diesem Band):

$$K^-(\omega, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ky)}{k C^-(\omega, k)} dk \quad (41)$$

Die komplexe Größe $C^-(\omega, k)$, gemessen in km, kann als induktive Skalenlänge betrachtet werden und wird mit folgender Rekursionsformel bestimmt:

$$C_n = \frac{C_{n+1} K_n + \tanh(d_n K_n)}{K_n (1 + C_{n+1} K_n \tanh(d_n K_n))} \quad (42)$$

mit

$$K_n^2 = i\omega\mu_0 \sigma_n + k^2 \quad (43)$$

und der Annahme eines homogen geschichteten Untergrundes mit N Schichten, den Leitfähigkeiten σ_n und den Dicken d_n für $n = 1, 2, \dots, N$ und $d_N = \infty$. Man beginnt mit $C_N = 1/K_N$ und berechnet sukzessive alle C_n bis $C_1 = C^-$. Im Fall eines quasi-homogenen induzierenden Feldes kann k vernachlässigt werden (Cagniard-Fall). Werden die Skalenlängen über und unter der dünnen Schicht mit C^+ resp. C^- bezeichnet, so erhält man mit (42) und (43) für $k = 0$:

$$C^+(\omega, 0) = C^-(\omega, 0) / [1 + i\omega\mu_0 \tau_n C^-(\omega, 0)] \quad (44)$$

Der Zusammenhang zwischen \tilde{E}_n und \tilde{H}_n^+ ist nach SCHMUCKER (1970, 1971) gegeben durch $\tilde{E}_n =$

$$\tilde{E}_n = i\omega\mu_0 C^+(\omega, 0) \tilde{H}_n^+ \quad (46)$$

Setzt man diese Größen unter Berücksichtigung von (31) in (28) ein,

so erhält man:

$$-(K + K^-) \times \tilde{Z}_a = i\omega\mu_0 [\tau_a C_{n,n}^+ + \tau(G \times \tilde{Z}_a)]$$

oder mit $z_p = \tilde{Z}_a / \tilde{H}_n$ für $\tilde{H}_n = \text{const}$

$$-(K + K^-) \times z_p = i\omega\mu_0 [\tau_a C_n^+ + (\tau_a + \tau_n)(G \times z_p)] \quad (47)$$

Mit vorgegebenen Werten von τ_n und τ_a für die dünne Schicht und einer lateral homogenen Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund lassen sich Modellrechnungen durchführen, in dem das lineare Gleichungssystem (47) nach z_p aufgelöst wird und somit den direkten Vergleich mit den Beobachtungen zuläßt. Löst man andererseits (47) nach τ_a auf, so führt

$$\tau_a = - \frac{(K + K^-) \times z_p + i\omega\mu_0 \tau_n (G \times z_p)}{i\omega\mu_0 [C_n^+ + (G \times z_p)]} \quad (48)$$

zur Lösung der Umkehraufgabe für die dünne Schicht. Dies Inversionsverfahren wird in der Weise durchgeführt, daß für vorgegebene Werte von τ_n und einen vorgegebenen tieferen Untergrundmodell bei Eingabe der Beobachtungen z_p die Verteilung von $\tau_a(y)$ ermittelt wird.

Für die Anwendung von (47) zur Modellrechnung wurde zunächst ein symmetrisches Zweischichtenmodell zugrunde gelegt, etwa in der Form von Fig. 6 oben rechts. Bei einer Profillänge von etwa 400 km springt der Wert τ_n auf $\tau = \tau_n + \tau_a$ über dem Graben (40km). Die vorzugebenden Parameter wurden für 5 Frequenzen in folgenden Schranken variiert:

$$500 \leq \tau \leq 4000 \Omega^{-1},$$

$$0,1 \leq \tau_n / \tau \leq 0,4,$$

$$0 \leq h \leq 90 \text{ km},$$

$$1 < \rho_2 \leq 250 \Omega \text{m}$$

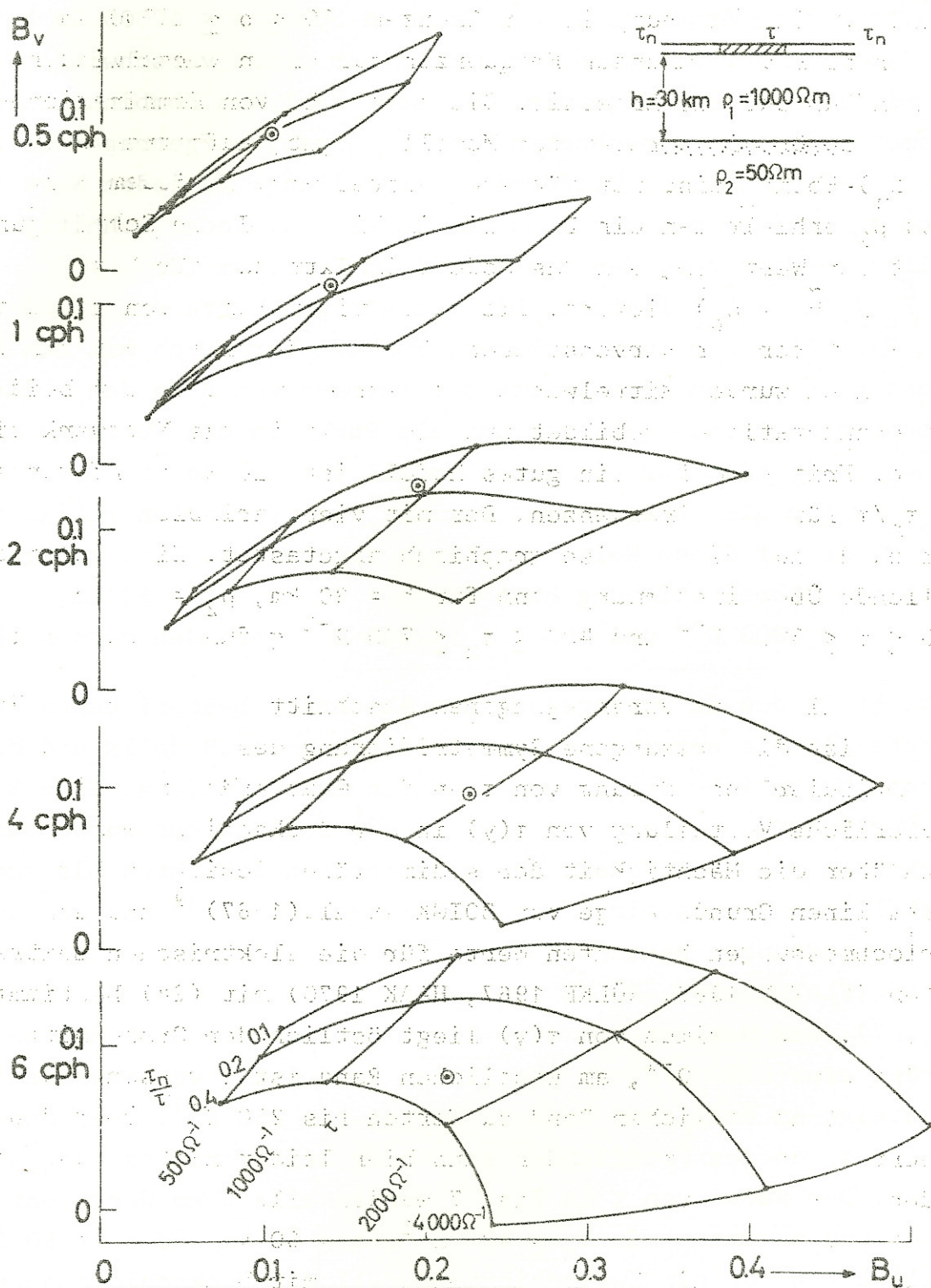


Fig. 6: Extremwerte des normierten Vertikalfeldes an den Grabenrändern in der B_u, B_v -Ebene für Zweischichtenmodelle bei festem h, ρ_1, ρ_2 und Variation der integrierten Längsleitfähigkeit τ für die Grabenfüllung und τ_n an den Profilenden; Die beste Übereinstimmung von Modell (τ -Kurvennetz) und Beobachtung (eingetragener Punkt) läßt sich für $1600 \leq 2000 \Omega^{-1}$ und $400 \leq \tau_n \leq 600 \Omega^{-1}$ ablesen.

Für das Kristallin wurde, auch im folgenden, $\rho_1 = 1000 \Omega\text{m}$ festgehalten; eine Änderung in den Grenzen $500 \leq \rho \leq 10000 \Omega\text{m}$ hatte bei den hier vorkommenden Frequenzen nur einen verschwindend kleinen Einfluß auf das Ergebnis. Die hohe Zahl von Kombinationen der Parameter für die gerechneten Modelle ergab, aufgetragen in der (B_v, B_u) -Ebene, eine netzförmige Darstellung. Zu jedem Wert von h und ρ_2 erhielt man ein Bild wie in Fig. 6. Jeder Schnittpunkt stellt den Wert dar, den das Modell im Extremum für $B = \tilde{Z}_a / (\tilde{H}_a + \tilde{H}_n)$ liefert. Die zugehörigen Werte von τ und τ_n/τ sind Parameter der Kurvenscharen. Für den Vergleich mit den Beobachtungen wurden Mittelwerte der Extrema von B an den beiden Grabenrandstationen gebildet und als Punkt in das Netzwerk eingetragen. Kriterium für ein gutes Modell ist die Konstanz von τ und τ_n/τ für alle Frequenzen. Der mit vier Variablen gebildete Raum wurde auf diese Weise graphisch abgetastet. Eine zufriedenstellende Übereinstimmung kann für $h = 30 \text{ km}$, $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$, $2000 \leq \tau \leq 3000 \Omega^{-1}$ und $400 \leq \tau_n \leq 700 \Omega^{-1}$ gefunden werden (Fig.6).

Nachteil des im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Verfahrens ist die erzwungene Symmetrisierung des Modells und der diskontinuierliche Sprung von τ an den Grabenrändern. Eine kontinuierliche Verteilung von $\tau(y)$ in der Deckschicht wurde aus Angaben über die Mächtigkeit der sedimentären Schichten bis zum kristallinen Grundgebirge von BOIGK et al.(1967)¹⁾ und den aus Bohrlochmessungen bekannten Werte für die elektrischen Leitfähigkeiten (FLATHE 1967, RÜLKE 1967, HAAK 1970) mit (24) bestimmt (Fig. 7). Das Maximum von $\tau(y)$ liegt östlich der Grabenmitte und beträgt etwa $2000 \Omega^{-1}$, am westlichen Rand ist τ verschwindend klein und steigt am östlichen Rand zu Werten bis $250 \Omega^{-1}$. Über den Normalwert τ_n an den Profilenden kann hier leider nichts ausgesagt werden. Der Kurve von τ in Fig. 7 wurden alle 6 km Werte entnommen und zusammen mit $\tau_n = 400 \Omega^{-1}$, $h = 30 \text{ km}$ und $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ Modellkurven für ein Zweischichtenmodell mit Deckschicht nach (47) gerechnet, die mit den Beobachtungen verglichen, eine annähernde

1) Das geologische Profil durch den Oberrheingraben ist veröffentlicht von CLOSS und PLAUMANN(1968).

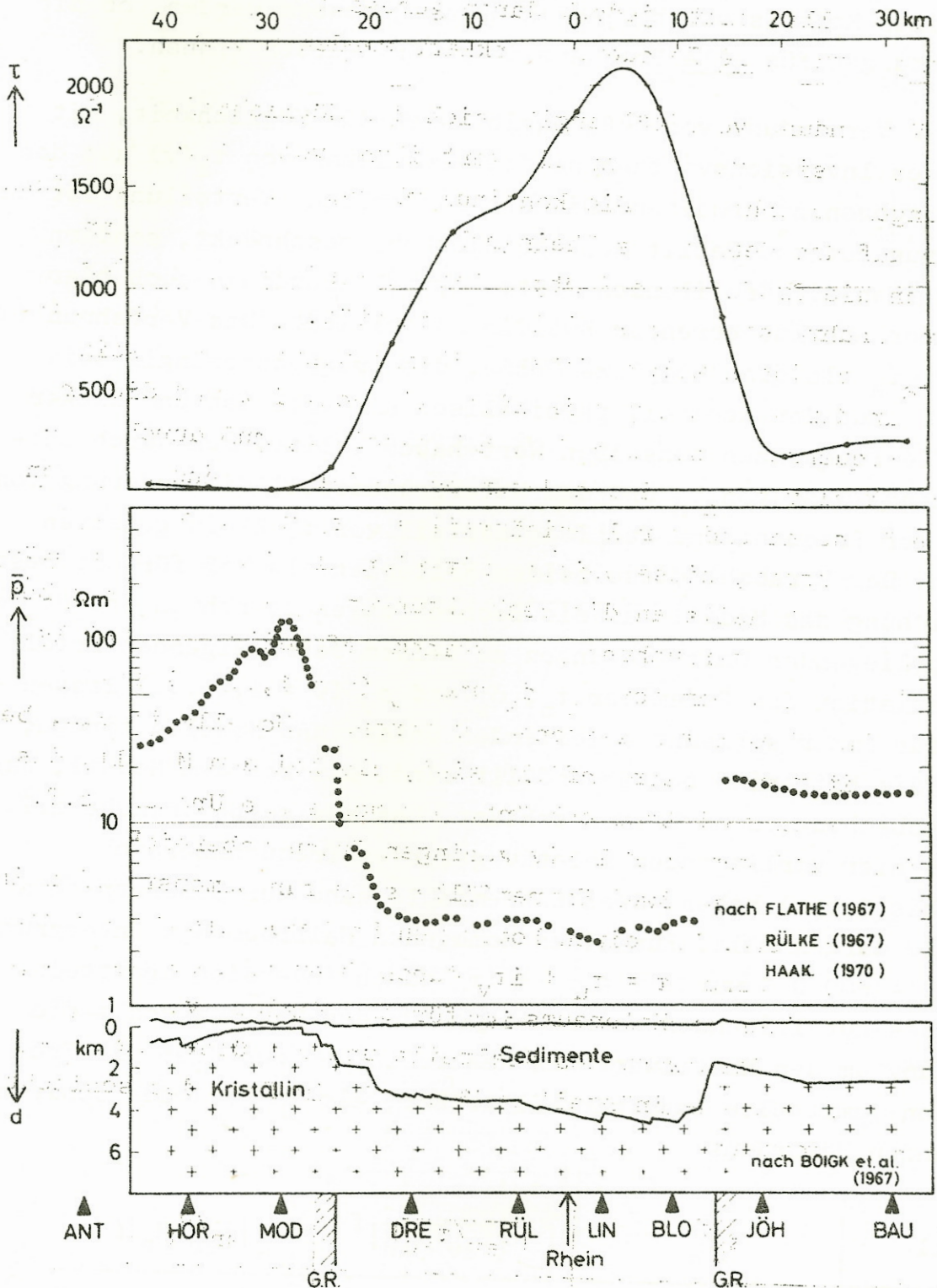


Fig. 7: Die kontinuierliche Verteilung der integrierten Längsleitfähigkeit $\tau = \tau(y)$ in der Deckschicht über dem Profil ermittelt aus Angaben der Sedimentmächtigkeit und dem zugehörigen mittleren spezifischen Längswiderstand.

Übereinstimmung für $T = 60$ min (Fig. 8), eine weniger zufriedenstellende Approximation für $T = 15$ min (Fig. 9) darstellen. Die Güte eines Modells sollte jedoch daran gemessen werden, ob die Beobachtungen für alle Frequenzen erklärt werden können.

Unter Verwendung von (48) ergibt sich die Möglichkeit, mit Hilfe des Inversionsverfahrens die Verteilung von $\tau_a(y)$ aus den Beobachtungen zu erhalten. Die kontinuierliche Verteilung ist dann nicht nur auf das Gebiet des Rheingrabens beschränkt, sondern wird bis an die Profilenden fortgesetzt, allerdings auch hier unter der Annahme strenger Zweidimensionalität. Das Verfahren (48) liefert τ_a als eine komplexe Größe, die frequenzabhängig sein kann. Da nur der Realteil physikalisch sinnvoll ist und dieser für alle Frequenzen denselben Wert haben sollte, muß durch entsprechende Wahl von τ_n und dem Untergrundmodell die Änderung von τ mit der Frequenz und der Imaginärteil von τ_a klein gehalten werden. Der Versuch, diese beiden Kriterien als Maß für die beste Angleichung des Modells an die Beobachtungen zu nehmen, führt bei den vorliegenden Untersuchungen zu keinem befriedigenden Erfolg. Bei Variation der Parameter τ_n , d_v und ρ_v ($v = 1, 2, \dots$) lassen sich für immer schlechter leitenden Untergrund Modelle finden, bei denen die Kriterien besser erfüllt sind, als bei dem Modell, das die Beobachtungen am besten erklärt. Das mag seine Ursache z.T. in dem hier vorliegenden relativ geringen Frequenzbereich (0,5 bis 6 cph) haben. Zwei Extremfälle sind zur Demonstration in Fig. 10 dargestellt. Für einen homogenen Halbraum als Untergrund und $\tau_n = 600 \Omega^{-1}$ wurde $\tau = \tau_u + i\tau_v$ durch Inversion ermittelt. Im Fall des gut leitenden Halbraums ist für das Maximum von τ die Streuung um den Mittelwert des Realteils und der über die Frequenzen gemittelte Imaginärteil größer, als im Fall des schlecht leitenden Halbraums:

Modell	$\frac{f}{\tau_u}$	$ \frac{\tau_{av}}{\tau_{au}} ^f$	$ j_{sn}/H_n $
$\rho = 5\Omega m$	$6460 \pm 2000 \Omega^{-1}$	0,165	0,08
$\rho = 1000\Omega m$	$1220 \pm 80 \Omega^{-1}$	0,112	0,60

Tab. 1

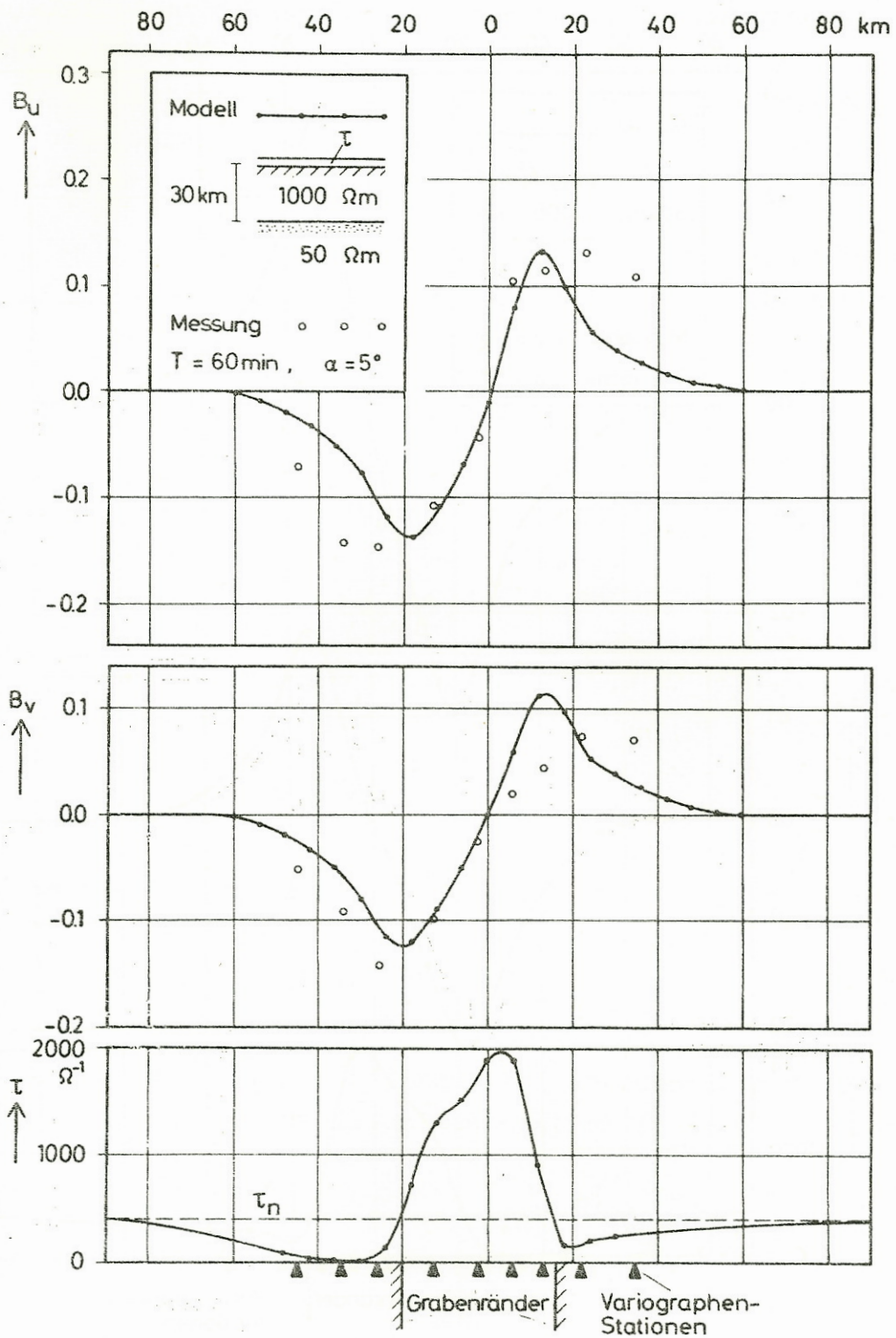


Fig. 8: Modellkurven eines Zweisichtenmodells mit der nach Fig. 7 vorgegebenen kontinuierlichen Verteilung der integrierten Leitfähigkeit in der Deckschicht (Fig. 7) und Vergleich mit den Beobachtungen für die Periode $T = 60 \text{ min}$.

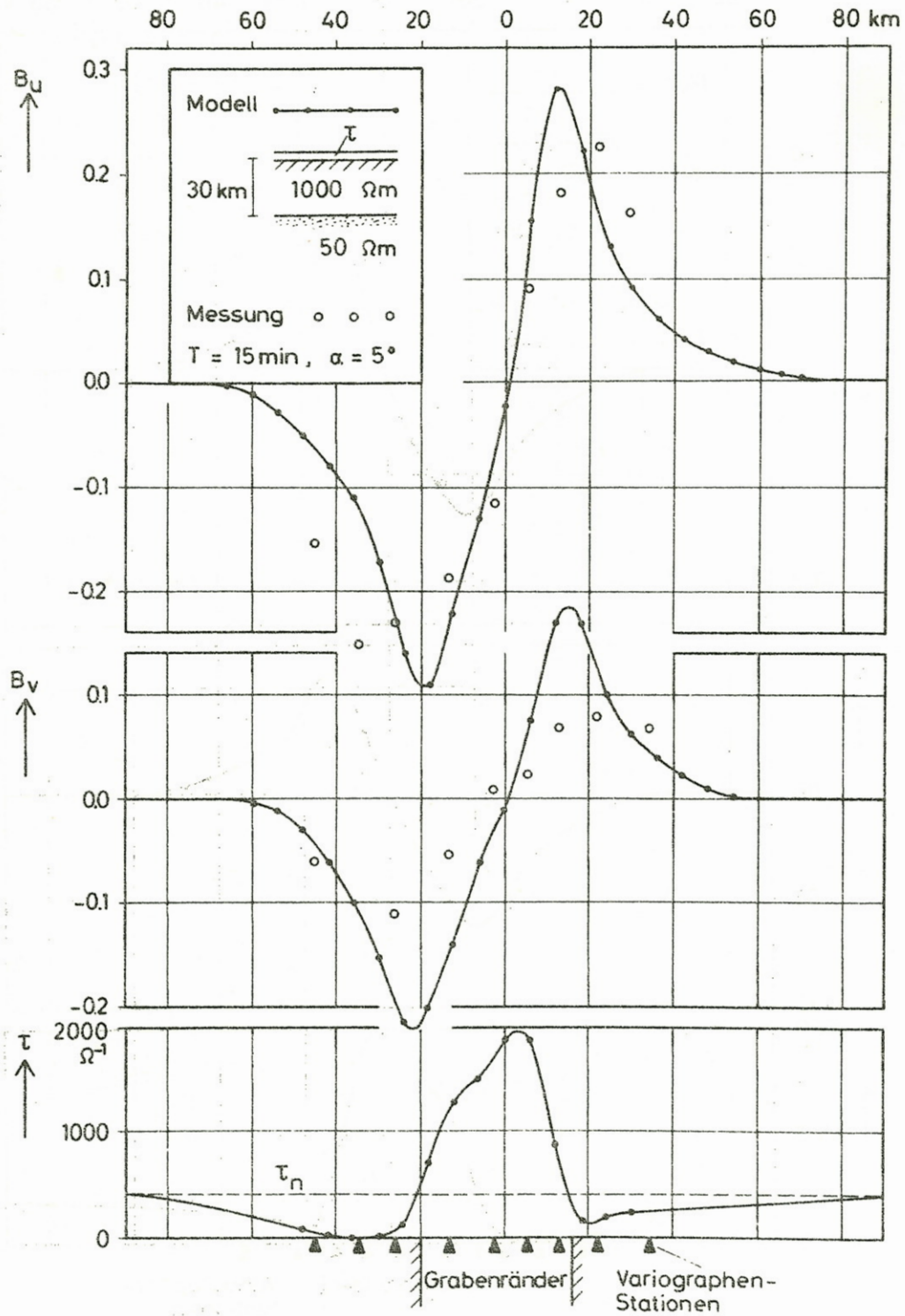


Fig. 9: Modellkurven des Zweischichtenmodells von Fig. 8 und Vergleich mit den Beobachtungen für die Periode $T = 15 \text{ min}$.

Der in Fig. 10 dargestellte Verlauf des Imaginärteils scheint die kleinräumigen Asymmetrien der Beobachtungen wiederzuspiegeln und erfährt keine wesentliche Änderung für $\rho = 1000 \Omega\text{m}$.

In der letzten Spalte ist der in der Deckschicht fließende normal induzierte Anteil des Gesamtstroms eingetragen. Er läßt sich mit (31) errechnen:

$$\begin{aligned}
 j_{sn} &= \frac{H_n^+ - H_n^-}{H_n^+} && \text{(mit (29) und (46))} \\
 &= \tau_n \frac{E_n}{H_n^+} \\
 &= i\omega\mu_0\tau_n C^+(\omega,0) && \text{(mit (44))} \\
 &= \frac{i\omega\mu_0\tau_n C^-(\omega,0)}{1 + i\omega\mu_0\tau_n C^-(\omega,0)} \\
 &= \frac{i\eta_s}{1 + i\eta_s} && (49)
 \end{aligned}$$

mit dem Induktionsparameter

$$\eta_s = \omega\mu_0\tau_n C^-(\omega,0) . \quad (50)$$

Während der gutleitende Halbraum beinahe den Gesamtstrom (92 %) führt, beträgt der Anteil am Gesamtstrom im schlecht leitenden Halbraum nur 40%.

Für die Praxis wurde ein Weg eingeschlagen, der nacheinander sowohl das Inversionsverfahren als auch Modellrechnungen berücksichtigt:

1. Mit vorgegebenen Werten für das Untergrundmodell und τ_n wird mit (48) die Verteilung von $\tau_a(y)$ aus den Beobachtungen errechnet.
2. Das über alle Frequenzen gemittelte $\tau_a(y)$ liefert zusammen mit vielen Kombinationen von τ_n , ρ_v und d_v Modelle, aus deren Viel-

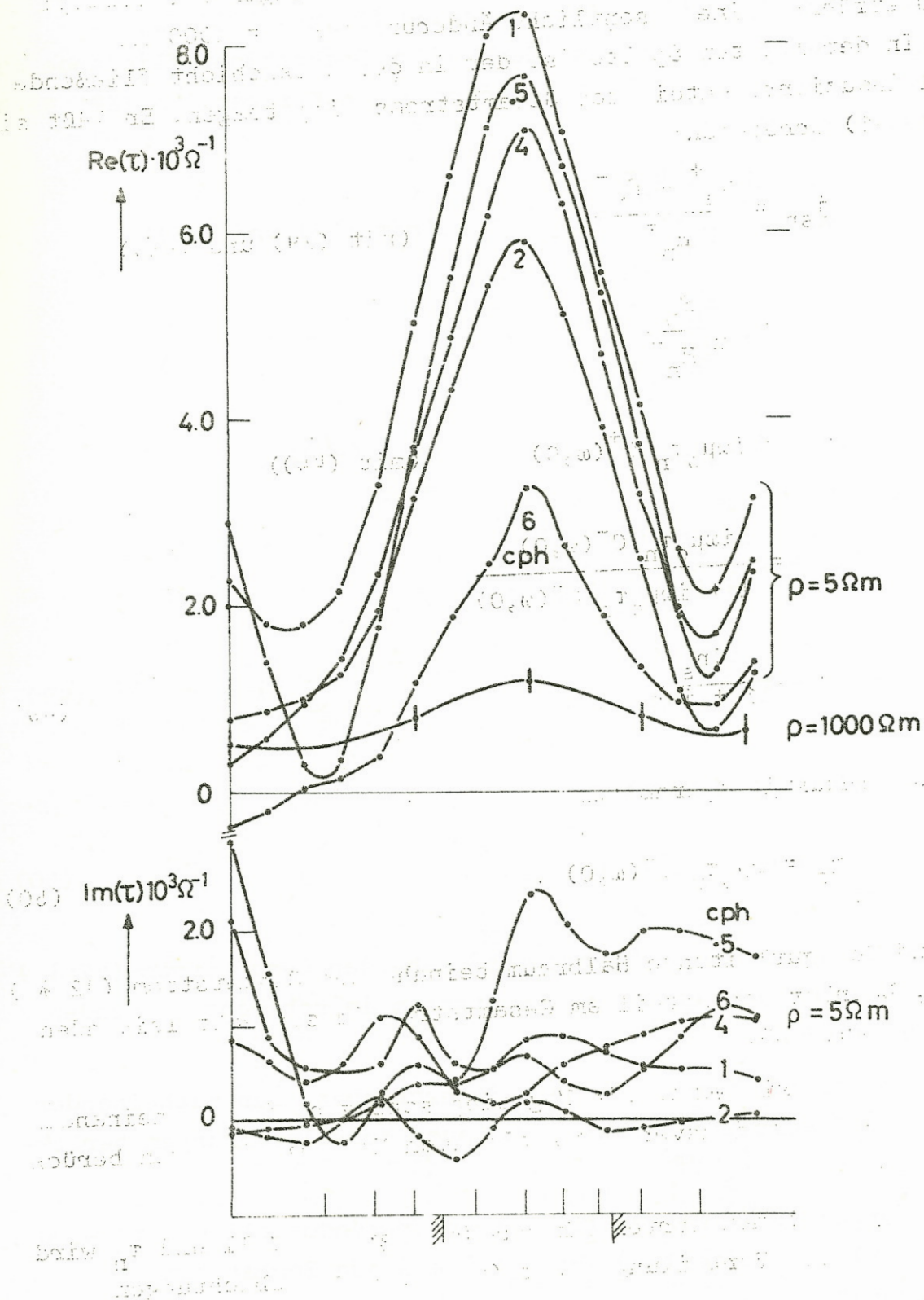


Fig. 10: Verteilung der integrierten Leitfähigkeit $\tau = \tau_n + \tau_a$ mit $\tau_n = 600 \Omega^{-1}$ in der Deckschicht, ermittelt durch Inversion bei Annahme eines homogenen Halbraums als Untergrund mit $\rho = 5 \Omega m$, bzw. $\rho = 1000 \Omega m$.

falt das beste mit Hilfe der Bestimmung der Abweichung der Beobachtungen z_p in bezug auf die Werte der Modellkurven z_p' (48) gefunden wird.

So hat z.B. mit $\tau_{\max} = 2600 \Omega^{-1}$ und $\tau_n = 800 \Omega^{-1}$ das beste Zweischichtenmodell die Werte $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ und $d_1 = 30 \text{ km}$ (Fig. 11). Die durchschnittliche Abweichung s wurde für ein etwa 100 km langes Stück des Profils über dem Graben wie folgt berechnet:

$$s = \frac{1}{N_f \cdot N_p} \sum \sum |z_p - z_p'| \quad (51)$$

N_f = Anzahl der Frequenzen

N_p = Anzahl der Punkte .

Trägt man s als Funktion von $d_1 = h_1$ und ρ_2 auf, so liefern die Kurvenscharen mit veränderlichem ρ_2 , resp. d_1 ein Minimum der Abweichung mit $s \approx 0,045$ für $20 \leq h_1 \leq 35 \text{ km}$ und $40 \leq \rho_2 \leq 70 \Omega\text{m}$ (Fig. 12).

Die Anregung des Teilnehmerkreises am Kolloquium in Rothenberge, eine untere Grenze der zweiten Schicht zu suchen, zeitigte ein erfreuliches Ergebnis. In Fig. 13 oben rechts sieht man den Aufbau dieses Vierschichtenmodells. Eine mittels des Inversionsverfahrens errechnete Leitfähigkeitsverteilung mit $\tau_{\max} = 2100\Omega^{-1}$ liefert die geringste Abweichung mit $\tau_n = 500 \Omega^{-1}$ und einer in $20 \leq d_1 \leq 30 \text{ km}$ beginnenden gut leitenden Zwischenschicht mit einer Mächtigkeit von $50 \leq d_2 \leq 100 \text{ km}$ und einem spezifischen Widerstand von $30 \leq \rho_2 \leq 60 \Omega\text{m}$.

Auch Tiefe und Leitfähigkeit des Substratums wurde variiert und liefert minimale Abweichung s für $h_3 \geq 280 \text{ km}$ und $S \leq \rho_4 \leq 20 \Omega\text{m}$. Der in der Deckschicht fließende Anteil des Gesamtstroms beträgt hier 0,24. Der Vergleich von $s \approx 0,040$ mit einer mittleren Amplitude $\bar{z}_p = 0,2$ zeigt die Verbesserung vom Zweischichten- zum Vierschichtenmodell:

$$s / \bar{z}_p \text{ (2 - Sch.)} = 0,23 ,$$

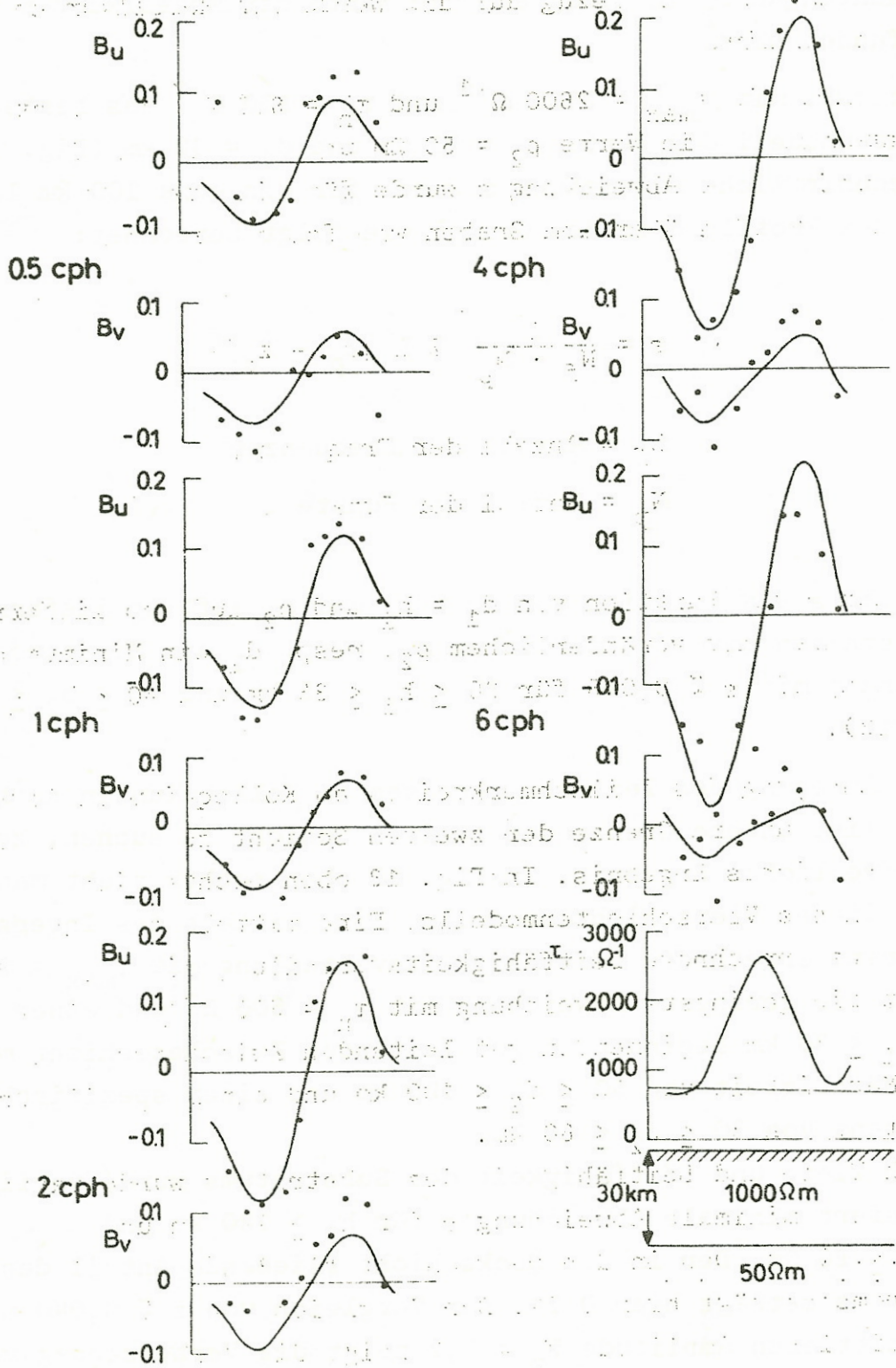


Fig. 11: Vergleich von Beobachtungen und Modellkurven für ein Zweisichtenmodell und fünf Periodenbereiche. Die Verteilung der integrierten Leitfähigkeit in der Deckschicht wurde durch Inversion gewonnen.

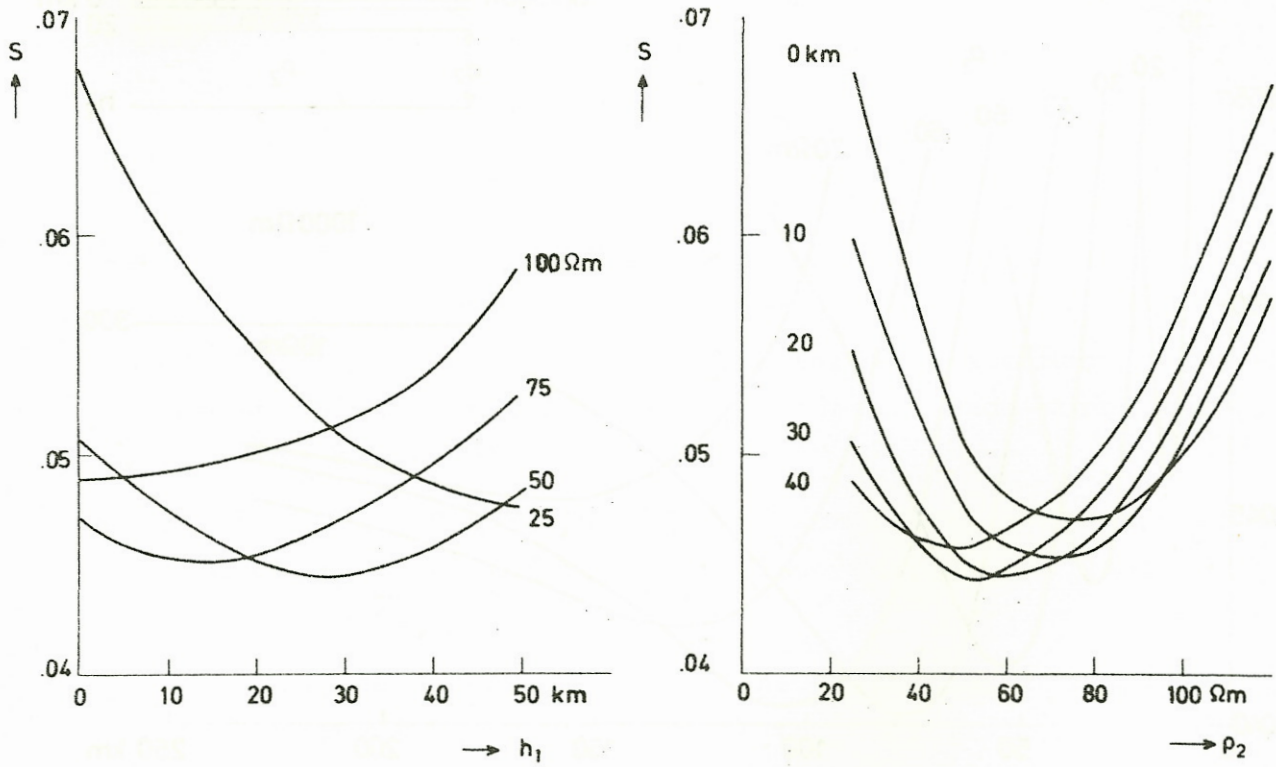


Fig. 12: Abweichung s der Beobachtungen in bezug auf die Werte der Modellkurven als Funktion der Tiefe der zweiten Schicht, bzw. ihres spezifischen Widerstandes. Zugrunde liegt ein Zweiseichtenmodell mit einer durch Inversion gewonnenen Leitfähigkeitsverteilung in der Deckschicht.

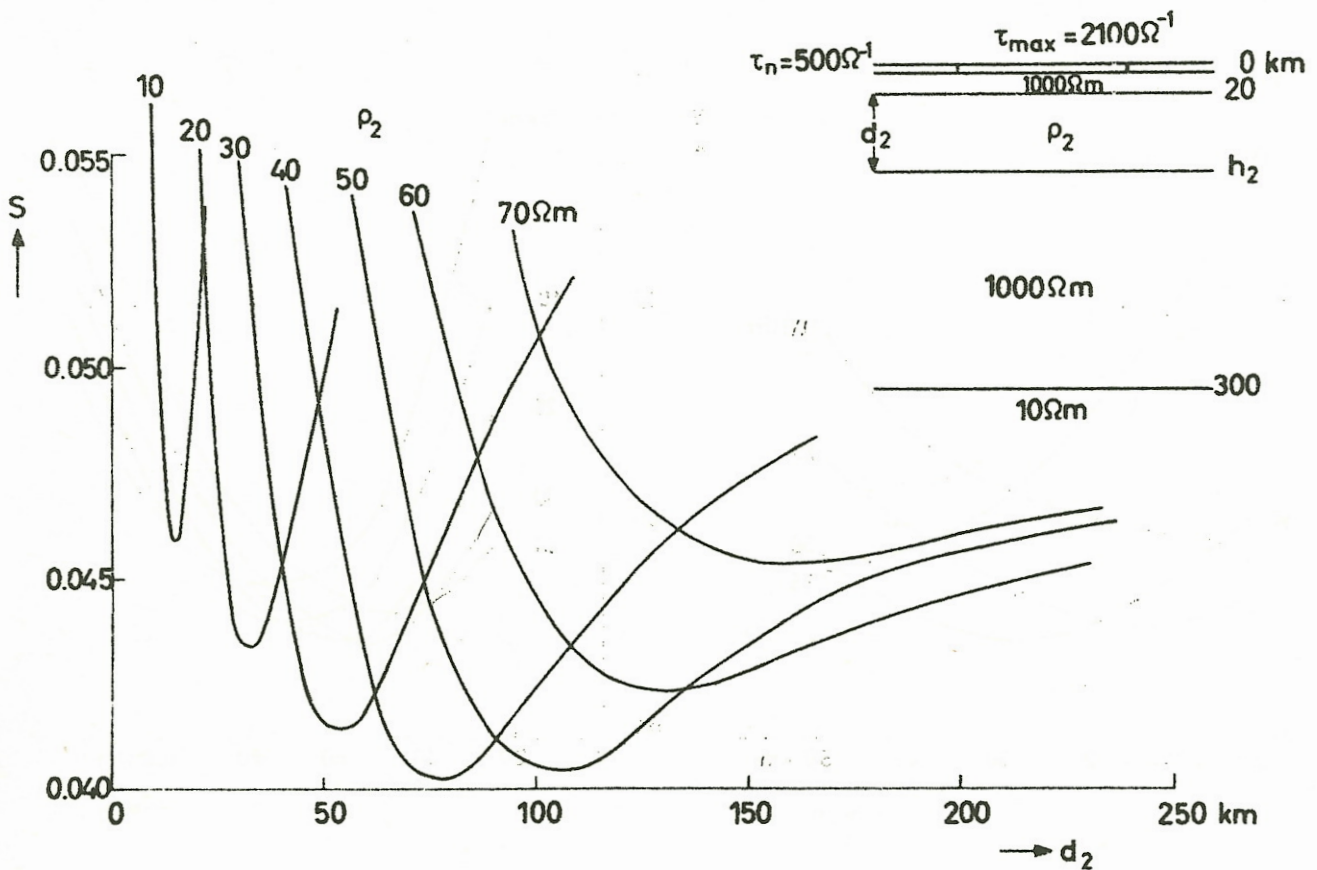


Fig. 13: Abweichung s der Beobachtungen in bezug auf die Werte der Modellkurven als Funktion der Dicke der zweiten Schicht und ihres spezifischen Widerstandes als Kurvenparameter. Zugrunde liegt ein Vierschichtenmodell mit einer durch Inversion gewonnenen Leitfähigkeitsverteilung in der Deckschicht.

$$s / \bar{z}_p (4 - \text{Sch.}) = 0,18 .$$

Die Tatsache, daß die Minima der Kurven in Fig. 13 steil ausgeprägt sind, sichert die Existenz der unteren Grenze der Zwischenschicht.

Mit dem beschriebenen Verfahren ist im vorliegenden Fall - neben den Beobachtungen - nur noch die Kenntnis von τ_a im Maximum der Grabenanomalie nötig, um ein optimales Vierschichtenmodell mit Deckschicht und den Parametern τ_n , ρ_v , und d_v , $v = 1, 2, 3, 4$ zu errechnen.

Literatur.

- BOIGK, H.: The thickness of the pre-tertiary sediments in the Upper Rhinegraben. Abh. Geol. Landesamt Bad.-Württemberg, 6, 39 - 41 (1967).
- CLOSS, H. und S. PLAUMANN: Gedanken zur Tektonik der Kruste im Oberrheingraben aufgrund von Schweremessungen. Geol. Jb., 85, 371 - 382 (1968).
- FLATHE, H.: The determination of the electrical resistivity of the crust within the region of the Rheingraben. Abh. Geol. Landesamt Bad.-Württemberg, 6, 96 - 97 (1967).
- HAAK, V.: Das zeitlich sich ändernde, erdelektrische Feld, beobachtet auf einem Profil über den Rheingraben; eine hiervon abgeleitete Methode der Auswertung mit dem Ziel, die elektrische Leitfähigkeit im Untergrund zu bestimmen. Dissertation, Nat. Fakultät München (1970).
- KERTZ, W.: Modelle für erdmagnetisch induzierte elektrische Ströme im Untergrund. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Abt. IIa, 101 - 110 (1954).
- RÜLKE, O.: Specific resistivity of the graben fill. Abh. Geol. Landesamt Bad.-Württemberg, 6, 66 - 67 (1967).
- SCHMUCKER, U.: Anomalies of geomagnetic variations in the southwestern United States. Bull. Scripps Inst. Oceanography, 13 (1970).

SCHMUCKER, U.: An Introduction to Induction Anomalies.

J. Geomag. Geoelect., 22, 9 - 33 (1970).

SCHMUCKER, U.: Interpretation of induction anomalies above nonuniform surface layers. Geophysics, 36, 156 - 165 (1971).

SIEBERT, M.: Zur Verwendung von Induktionspfeilen bei der erdmagnetischen Tiefensondierung. Protokoll Kolloquium "Erdmagnetische Tiefensondierung". Reinhausen, 163 - 176 (1969).

WINTER, R.: Geomagnetic Deep-Sounding at the Rhinegraben:
1. Measurements of the Magnetic Variations. Abh. geol. Landesamt Bad.-Württemberg, 6, 127 - 130 (1967).

WINTER, R.: Erdmagnetische Tiefensondierung im Gebiet des Oberrheingrabens. Graben Problems "Schweizerbart" sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 244 - 248 (1970).