

V. HAAK, München

"Probleme bei der Interpretation der Ergebnisse der Magnetotellurik von Äthiopien"

Montag, den 11.3.1974

1. Der Einfluß des räumlich inhomogenen, induzierenden Magnetfeldes in der Nähe des magnetischen Äquators auf die Interpretation der Magnetotellurik

Induziert ein räumlich homogenes Magnetfeld, so wird die Eindringtiefe der induzierenden und induzierten Felder nur durch die Leitfähigkeit und die Periode der zeitlichen Variationen begrenzt. Induziert aber ein räumlich inhomogenes Magnetfeld, so kommt zu der nur durch Induktion bedingten Abnahme der Feldamplituden mit der Tiefe zusätzlich noch die Abnahme der Feldamplituden durch die Geometrie des induzierenden Magnetfeldes<sup>hinzu</sup>. Die Eindringtiefe der induzierenden und induzierten Felder wird also nicht nur durch den Induktions-Effekt begrenzt, sondern kann zusätzlich durch die Geometrie des induzierenden Magnetfeldes verringert werden. Eine solche zusätzliche Verringerung der Eindringtiefe könnte man formal auch durch eine zusätzliche Verringerung des spezifischen Widerstandes ab einer bestimmten Tiefe erklären. Deshalb macht sich ein räumlich inhomogenes induzierendes Magnetfeld durch eine Verringerung des scheinbaren spezifischen Widerstandes mit wachsender Periode bemerkbar.

Man kann deshalb nur dann vom scheinbaren spezifischen Widerstand auf die Verteilung des wahren spezifischen Widerstand schließen, wenn die geometrische Struktur des anregenden Magnetfeldes bekannt ist und damit quantitativ in Rechnung gesetzt werden kann.

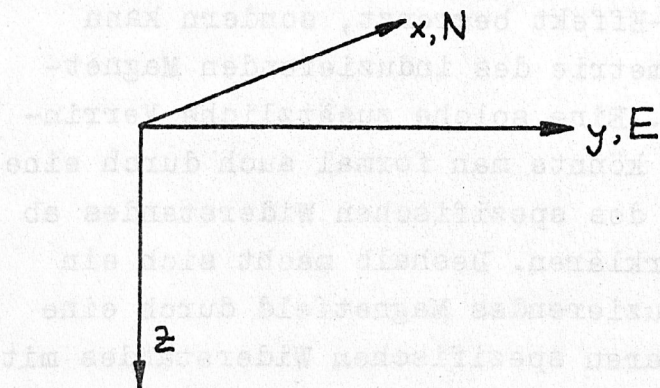
1.1 Die geometrische Struktur des induzierenden Magnetfeldes am magnetischen Äquator in Äthiopien

Der magnetische Äquator ist in Äthiopien parallel zum EW

streichenden Escarpment des SE-Plateaus. Aus Untersuchungen der täglichen  $S_q$ -Variationen, die in der Nähe des Äquators registriert wurden, ist bekannt, daß sich den normalen elektrischen Strömen in der Ionosphäre am magnetischen Äquator zusätzlich ein relativ stark gebündeltes Stromsystem überlagert (Äquatorialer Electrojet: EEJ). Da das Stromsystem des EEJ EW gerichtet ist, ist das Magnetfeld des EEJ in EW Richtung homogen, dagegen in NS Richtung inhomogen. So kann man z.B. die Variation der Amplitude der NS-Komponente des an der Erdoberfläche beobachtbare Magnetfeldes längs eines Profils senkrecht zum Äquator durch eine "Glocken"-Kurve beschreiben (UNTIEDT, 1968):

$$(1) \quad H_x(x) = H_{x0} e^{-(x^2/(2L^2))}$$

Es wird folgendes Koordinatensystem zugrundegelegt, wobei N in der positiv zu zählenden x-Richtung, E in der positiv zu zählenden y-Richtung liegt.



Allerdings sind außer solchen räumlich inhomogenen, induzierenden Magnetfeldern in der Nähe der magnetischen Äquators auch räumlich homogene induzierende Magnetfelder zu erwarten. Hierbei kann man die induzierenden Magnetfelder ihrem Ursprung nach unterscheiden, nämlich einerseits als Magnetfelder elektrischer Ströme in der Ionosphäre, andererseits als Magnetfelder elektrischer Ströme in der Magnetosphäre. (siehe: PAPA-MASTORAKIS 1974, im gleichen Band). Die Magnetfelder, die von elektrischen Strömen in der Ionosphäre - und zwar speziell tagsüber - erzeugt werden, können wie das Magnetfeld des EEJ räumlich inhomogen sein. Dagegen sind Magnetfelder von Strömen



in der Magnetosphäre mehr oder weniger homogen.  
Die Registrierungen der zeitlichen Variationen des magnetischen Feldes in Äthiopien auf einem etwa 1000 km langen Profil quer zum magnetischen Äquator haben bestätigt, daß man tagsüber meist mit räumlich inhomogenen Magnetfeldern<sup>n</sup>, nachtsüber mit räumlich homogenen Magnetfeldern zu rechnen habe (BENNETT, 1974).

### 1.2. Die Leitfähigkeits-Verteilung in Äthiopien

Die Leitfähigkeits-Verteilung (siehe den Artikel von BERKTOLD in diesem Band) wurde aus  $\varrho_s$ -Kurven abgeleitet, für die nur die nachts registrierten zeitlichen Variationen des elektrischen und magnetischen Feldes ausgewertet wurden. Damit konnte man räumlich homogene induzierende Magnetfelder der Interpretation zugrundelegen.

Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluß ein räumlich inhomogenes induzierendes Magnetfeld auf den scheinbaren spezifischen Widerstand als Funktion der Periode hat. Für die Berechnung der  $\varrho_s(T)$ -Kurven werden vereinfachte Modelle der Leitfähigkeitsverteilung in Äthiopien zugrunde gelegt.

### 1.3 Scheinbarer spezifischer Widerstand bei einem räumlich cosinus-förmig variierenden, induzierenden Magnetfeld über einem geschichteten Untergrund

Das induzierende Magnetfeld habe die folgende räumliche Geometrie

$$(2) \quad H_x(x) = H_{x0} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{4 \cdot L}\right)$$

(Zur Bedeutung von L siehe Abbildung 3)

Der Induktionsvorgang wird dann beschrieben durch die Diffusionsgleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 E_y(x, z, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x, z, \omega)}{\partial z^2} = 4\pi i \omega \sigma(z) \cdot E_y(x, z, \omega)$$

Eine Lösung für die Schicht Nr. i ist dann

$$(4) \quad E_{y,i}(x, z, \omega) = (A_i e^{-\vartheta_i \cdot z} + B_i e^{\vartheta_i \cdot z}) \cos \lambda x$$

mit

$$(5) \quad \vartheta_i^2 = \lambda^2 + 4\pi i \omega \sigma_i$$

Setzt man an der Erdoberfläche  $A_1 = 1$ , und an der Grenze zwischen der tiefsten Schicht und dem homogenen Halbraum unter ihr  $B_N = 0$ , dann kann man das elektrische Feld  $E_y(x, z, \omega)$  - unter Beachtung der Stetigkeitsbedingungen an den Schichtgrenzen - ausrechnen. Die hierzu korrespondierende Komponente des Magnetfeldes kann man mithilfe einer der Maxwell'schen Gleichungen ausrechnen:

$$(5) \quad H_x(x, z, \omega) = \frac{1}{i \cdot \omega} \frac{dE_y(x, z, \omega)}{dz}$$

Hieraus folgt der scheinbare spezifische Widerstand:

$$(6) \quad \rho_s(T) = 0.2 \cdot T \cdot |E_y / H_x|^2$$

Für die Berechnung des scheinbaren spezifischen Widerstandes wurde ein verhältnismäßig einfacher Algorithmus von SCHMUCKER 1971 verwendet. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 1 und 2 wiedergegeben.

#### 1.4 Vergleich eines cosinus-förmig variierenden mit einem glockenförmig variierenden, induzierenden Magnetfeld

Um nun erkennen zu können, ob das Magnetfeld des EEJ auf die  $\rho_s(T)$ -Kurven der in Abb. 2 und 3 wiedergegebenen Modelle der Leitfähigkeitsverteilung einen meßbaren Einfluß haben könnte, müßte man der durch Gl. (1) definierten Glocken-Kurve eine Breite zuordnen, die durch <sup>die</sup> Wellenlänge der Cosinus-Funktion in Gl. (2) definiert ist. In Abbildung 3 ist solch eine mögliche Zuordnung von Glockenkurve und Cosinus-Funktion demonstriert. Da der Abstand der Wendepunkte der Glocken-Kurve für den EEJ  $2L = \text{ca. } 600 \text{ km}$  ist, würden nach Abb. 3 hierzu eine Wellenlänge von ca. 1000 km korrespondieren. Aus den beiden Abbildungen 1 und 2 erkennt man, daß man für die hier diskutierten Leitfähigkeits-Modelle bei einer Wellenlänge von etwa 1000 km noch in jenem Bereich, <sup>ist</sup> in dem der scheinbare spezifische Widerstand nur durch die Verteilung des wahren spezifischen Widerstandes bestimmt wird, aber nicht durch die Geometrie der Felder ("Quasi-homogene Anregung").

Man erkennt allerdings außerdem aus beiden Abbildungen, daß tiefere Strukturen der elektrischen Leitfähigkeit nur dann noch bestimmt werden können, wenn die Anregung räumlich sehr homogen ist ( $2L > \text{mehrere Tausend km}$ ).



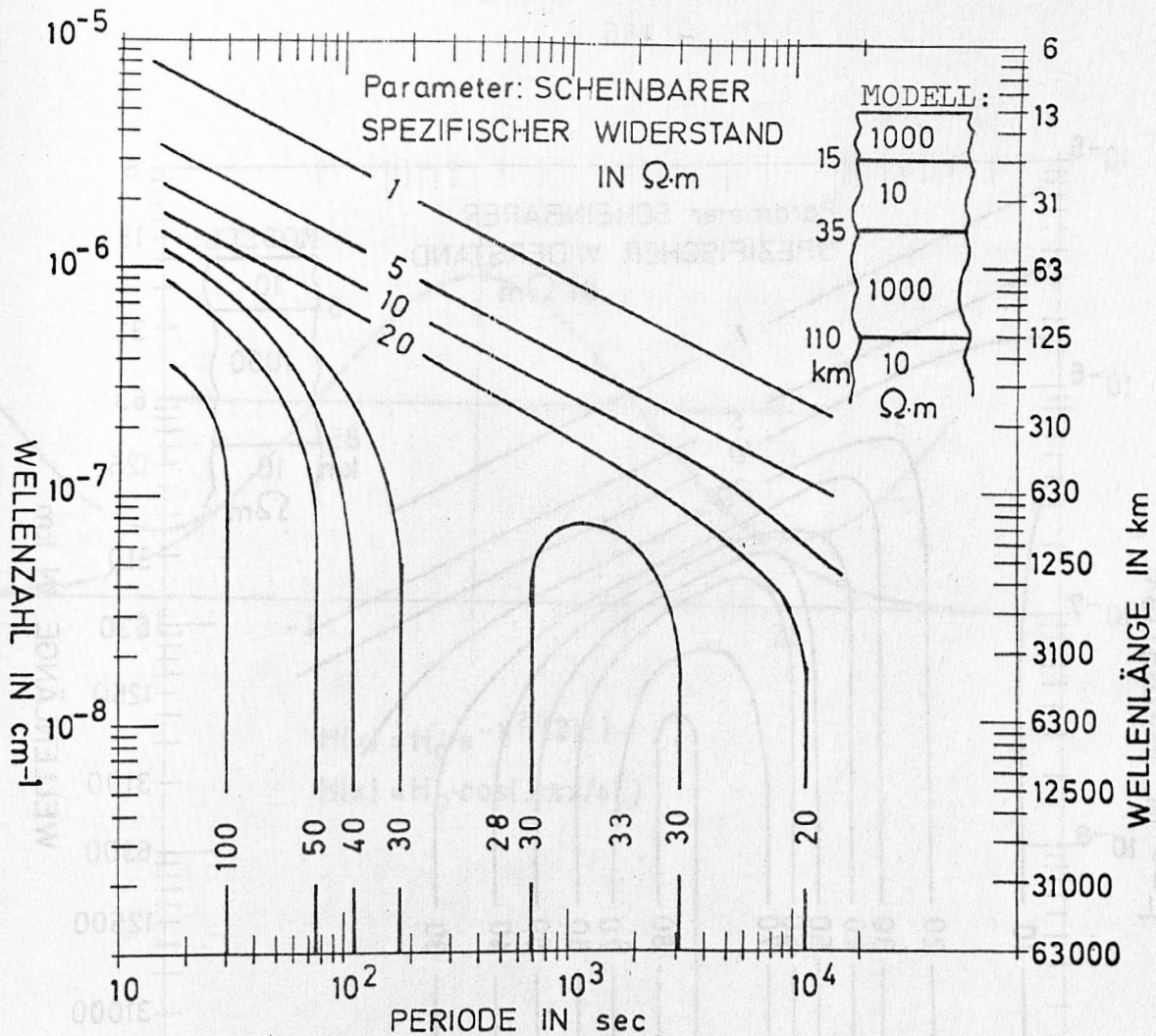


Abbildung 1: Scheinbarer spezifischer Widerstand als Funktion von Periode  $T$  (Abszisse) und Wellenzahl  $k$  (linke Ordinate), bzw. Wellenlänge  $L = 2\pi/k$ , (rechte Ordinate). Das hier der Berechnung zugrundegelegte Leitfähigkeits-Modell der Afarsenke in Äthiopien ist stark vereinfacht. Man kann in der Abbildung zwei Bereiche voneinander unterscheiden, die durch eine Diagonale von links oben nach rechts unten zu trennen sind. Im linken unteren Bereich ("quasi-homogene Anregung") ist der scheinbare spezifische Widerstand eine Funktion nur der Leitfähigkeits-Verteilung. Im Bereich rechts oben ("inhomogene Anregung") ist der scheinbare spezifische Widerstand nur noch eine Funktion der Wellenlänge des induzierenden Magnetfeldes.

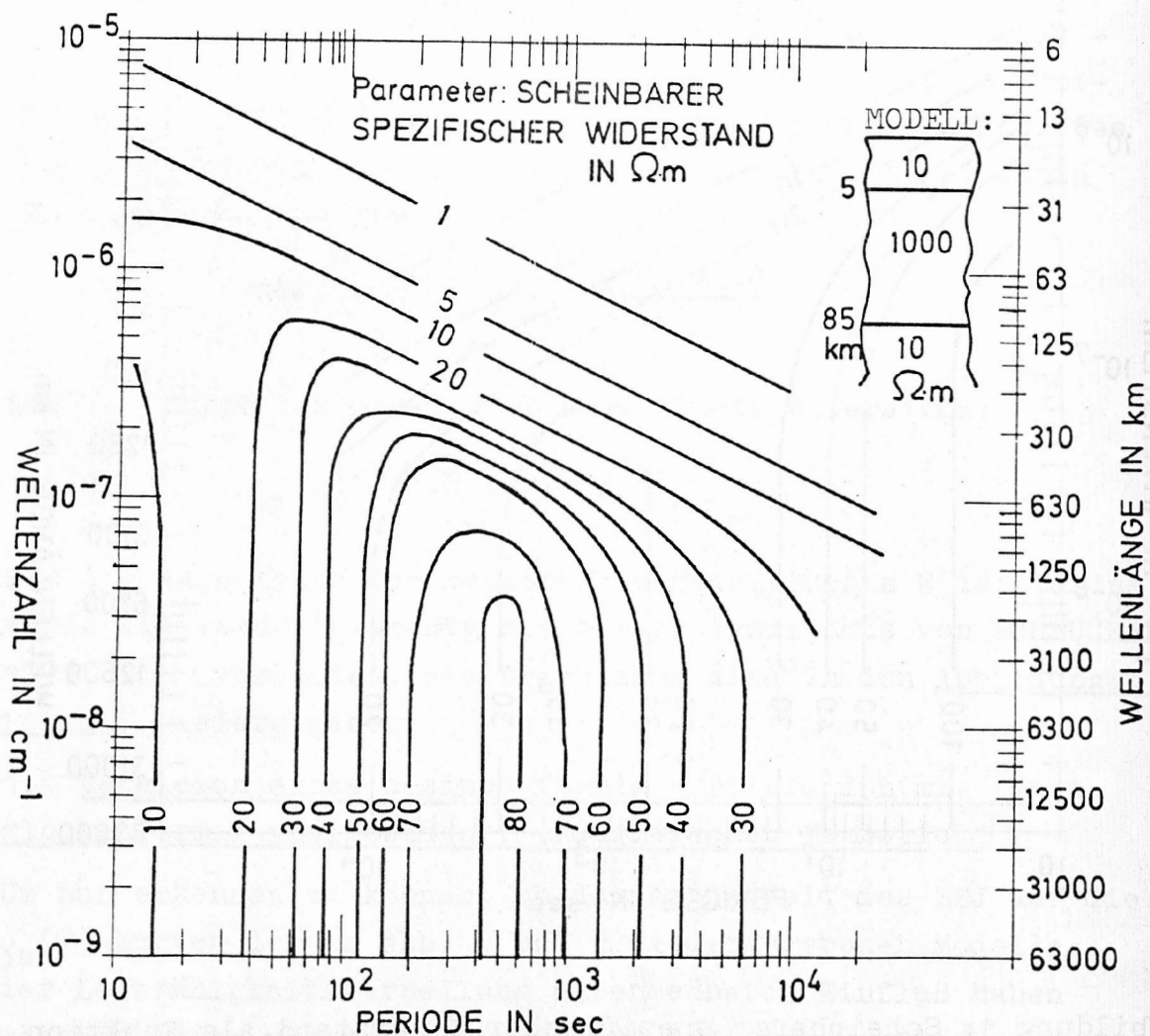


Abbildung 2: Scheinbarer spezifischer Widerstand als Funktion von Wellenzahl und Periode. Das Modell der Leitfähigkeits-Verteilung unterscheidet sich von dem in Abb.1 insbesondere durch die 5 km mächtige Deckschicht mit einem sehr niedrigen spezifischen Widerstand.



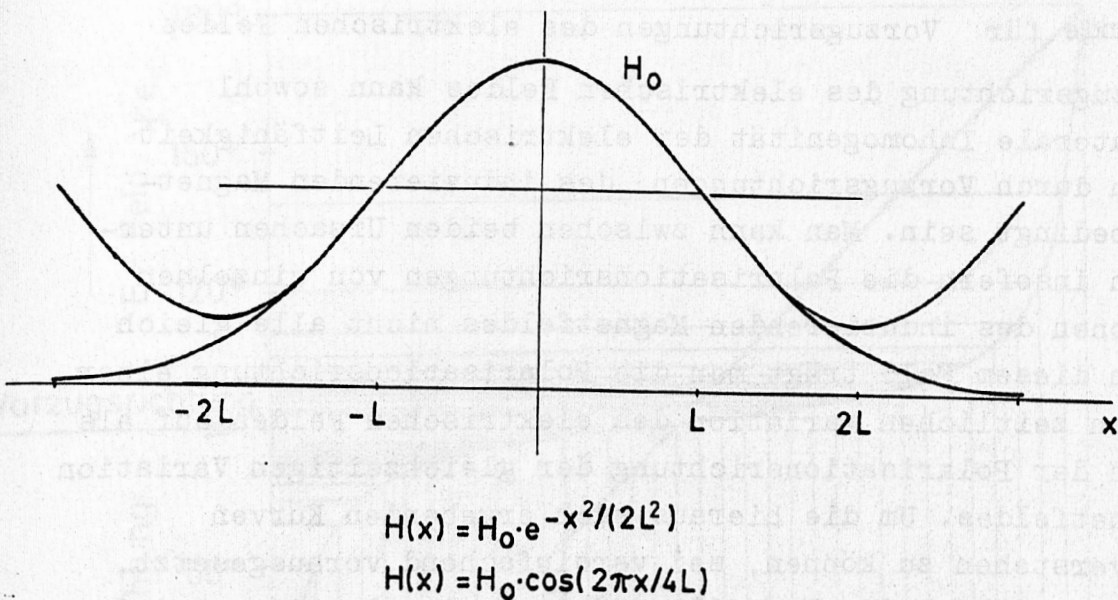


Abbildung 3 : Vergleich einer Glóckenkurve und einer Cosinus-Funktion. Man kann beide Funktionen in einem größeren Bereich relativ gut zur Deckung bringen, wenn man die Wendepunkte der beiden Funktionen übereinanderlegt. Es ergibt sich hierbei, daß die Wellenlänge der Cosinus-Funktion doppelt so groß ist wie der Abstand der Wendepunkte der Glockenkurve.

## 2. Interpretationen der Verteilung der Vorzugsrichtung des induzierten elektrischen Feldes in der Afarsenke

### 2.1 Gründe für Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes

Die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes kann sowohl durch laterale Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit als auch durch Vorzugsrichtungen des induzierenden Magnetfeldes bedingt sein. Man kann zwischen beiden Ursachen unterscheiden insofern die Polarisationsrichtungen von einzelnen Variationen des induzierenden Magnetfeldes nicht alle gleich sind. In diesem Fall trägt man die Polarisationsrichtung einer einzelnen zeitlichen Variation des elektrischen Feldes auf als Funktion der Polarisationsrichtung der gleichzeitigen Variation des Magnetfeldes. Um die hieraus sich ergebenden Kurven besser verstehen zu können, sei vereinfachend vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeits-Verteilung 2-dimensional sei, und daß die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes aufgespalten wurden in Komponenten parallel und senkrecht zur Streichrichtung der Anomalie:

$$(7) \quad \begin{aligned} E_{\parallel} &= z_{\parallel} \cdot H_{\perp} \\ E_{\perp} &= z_{\perp} \cdot H_{\parallel} \end{aligned}$$

Es sei weiterhin vereinfachend vorausgesetzt, daß die zeitlichen Variationen der Felder linear polarisiert seien:

$$(8) \quad \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \tan \psi_E = \frac{z_{\parallel}}{z_{\perp}} \cdot \frac{1}{\tan \psi_H} = \frac{z_{\parallel}}{z_{\perp}} \cdot \tan(\psi_H - 90^\circ)$$

Trägt man  $\psi_E$  als Funktion von  $\psi_H$  für ein bestimmtes Verhältnis von  $z_{\parallel}/z_{\perp}$  auf, bekommt man z.B. das in Abb. 4 dargestellte Ergebnis. Man erhält also eine Gerade mit der Steigung  $45^\circ$ , wenn  $z_{\parallel} = z_{\perp}$  ("Cagniard"), dagegen eine sich um diese Gerade windende, symmetrische Schlangenlinie:

$$(9) \quad \psi_E = \arctan \left\{ \frac{z_{\parallel}}{z_{\perp}} \cdot \tan(\psi_H - 90^\circ) \right\}$$

Bei einer Gleichverteilung der Polarisations-Richtungen des Magnetfeldes würden also Häufigkeits-Maxima der Polarisations-Richtungen des Magnetfeldes existieren. Die Mittelwerte dieser Häufigkeits-Maxima sind die Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes.



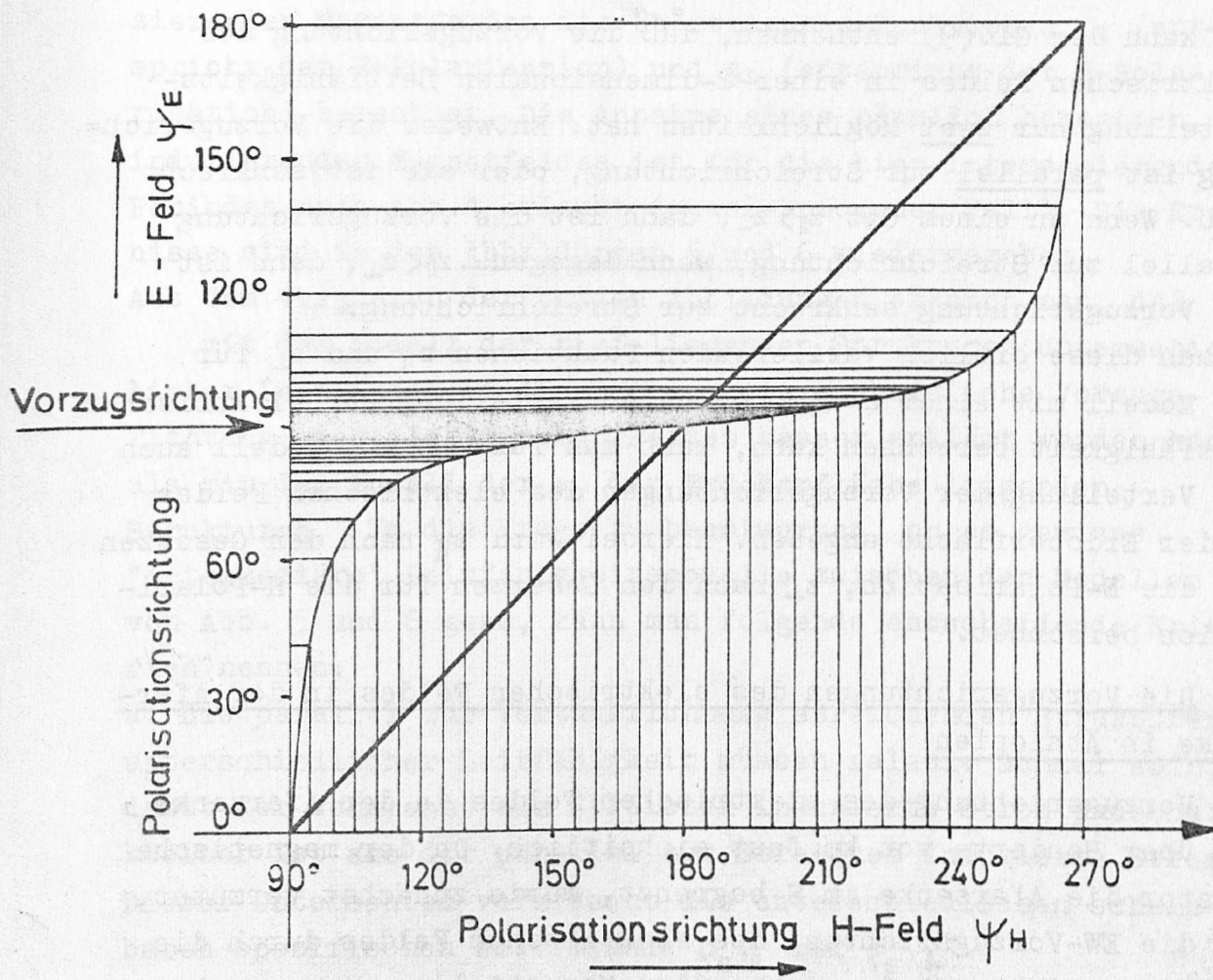


Abbildung 4: Die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes  $\psi_E$  als Funktion der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes  $\psi_H$ . Die Winkel werden beide von der Streichrichtung im Uhrzeigersinn gezählt:

$\psi_E = 0^\circ$  ist identisch mit der Streichrichtung  
 $\psi_H = 90^\circ$  ist senkrecht zur Streichrichtung  
 $z_1/z_4 = 10$ . Bei einer Gleichverteilung der Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes erhält man ein Häufigkeitsmaximum der Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes. Der Mittelwert dieses Häufigkeits-Maximums ist die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes (in diesem Fall senkrecht zum Streichen der Anomalie)

## 2.2 Berechnung der Verteilung von Vorzugsrichtungen in einem Modell mit 2-dimensionaler Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit.

Man kann der Gl.(9) entnehmen, daß die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes in einer 2-dimensionalen Leitfähigkeitsverteilung nur zwei Möglichkeiten hat: Entweder die Vorzugsrichtung ist parallel zur Streichrichtung, oder sie ist senkrecht dazu. Wenn an einem Ort  $z_{\parallel} > z_{\perp}$ , dann ist die Vorzugsrichtung parallel zur Streichrichtung, wenn dagegen  $z_{\parallel} < z_{\perp}$ , dann ist die Vorzugsrichtung senkrecht zur Streichrichtung.

Da man diese örtlich variierenden Funktionen  $z_{\parallel}$  und  $z_{\perp}$  für ein Modell mit einer 2-dimensionalen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit berechnen kann, kann man für dieses Modell auch die Verteilung der Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes an der Erdoberfläche angeben. Hierbei wird  $z_{\parallel}$  nach den Gesetzen für die E-Polarisation,  $z_{\perp}$  nach den Gesetzen für die H-Polarisation berechnet.

## 2.3 Die Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes in der Afarsenke in Äthiopien

Die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes in der Afarsenke ist über Hunderte von km fast einheitlich. Da der magnetische Äquator die Afarsenke im S begrenzt, wurde zunächst vermutet, daß die EW-Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes durch die NS Vorzugsrichtung des anregenden Magnetfeldes verursacht wurde. BERKTOLD (siehe seinen Artikel in diesem Band) hat durch eine Methode ähnlich der in Abb.4 dargestellten bewiesen, daß die Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes in der Afarsenke durch Leitfähigkeits-Anomalien verursacht werden. Auch GREINWALD 1972 hat anhand von Häufigkeits-Maxima für die Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes und magnetischen Feldes gezeigt, daß die Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes eine kleinere Streubreite haben als die entsprechenden Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes, was ebenfalls auf laterale Änderungen der Leitfähigkeit deutet. An der von ihm untersuchten Station ist die Vorzugsrichtung bis zu mittleren Perioden (von 15 - 500 sec) am <sup>f</sup>schönsten ausgeprägt, dagegen weniger scharf bei längeren Perioden.



## 2.4 Modelle der Leitfähigkeitsverteilung zur Interpretation der Vorzugsrichtungen in der Afarsenke

Es wurden unter der Annahme eines räumlich homogenen, induzierenden Magnetfeldes die Übertragungsfunktionen  $z_{||}$  (entspricht der E-Polarisation) und  $z_{\perp}$  (entspricht der H-Polarisation) berechnet. Die Annahme eines räumlich homogenen, induzierenden Magnetfeldes ist für die hier interessierenden Perioden nach Abb. 1 erlaubt (quasi-homogener Fall). Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5 und 6 wiedergegeben.

Aus dem Vergleich der beiden Abbildungen erkennt man, daß mit dem Modell der tief-liegenden Strukturen unterschiedlicher Leitfähigkeit die beobachtete einheitliche Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes besser erklärt werden kann als mit dem Modell der an der Erdoberfläche liegenden Strukturen. Um die Frage zu beantworten, ob es gewisse "intermediäre" Leitfähigkeitsmodelle zwischen den Modellen von Abb. 5 und 6 gebe, kann man folgende entscheidende Kriterien nennen:

- a. Die parallel zur Vorzugsrichtung streichenden Strukturen unterschiedlicher Leitfähigkeit müssen relativ schmal sein, damit der senkrecht zum Streichen induzierte Strom pauschal kleiner ist als der parallel zum Streichen induzierte Strom. Dieser Unterschied verursacht die unterschiedlichen scheinbaren spezifischen Widerstände  $\rho_{S,||}$  und  $\rho_{S,\perp}$ .
- b. Diese Strukturen unterschiedlicher Leitfähigkeit verursachen eine örtlich variable Zusammendrängung des senkrecht zu diesen Strukturen fließenden Stromes. Die Schwankungshöhe des elektrischen Feldes an der Erdoberfläche (in der Abbildung 6 durch die kurzwelligen Schwankungen des scheinbaren spezifischen Widerstandes wiedergegeben) ist umso größer, je näher man diese Strukturen an die Erdoberfläche legt. Dabei kann es passieren, daß an einigen Orten, wo die Ströme besonders dicht zusammengedrängt werden, die Vorzugsrichtung wieder senkrecht zur Streichrichtung ist. Dies könnte man zwar noch verhindern, indem man diesen Strukturen eine spezielle Geometrie gibt, aber man kann folgern, daß tiefe Strukturen, die pauschal parallel zur Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes streichen, aber deren spezielle, lokale Geometrie beliebig angenommen werden kann, die einheitliche Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes in der Afarsenke am einfachsten erklären.

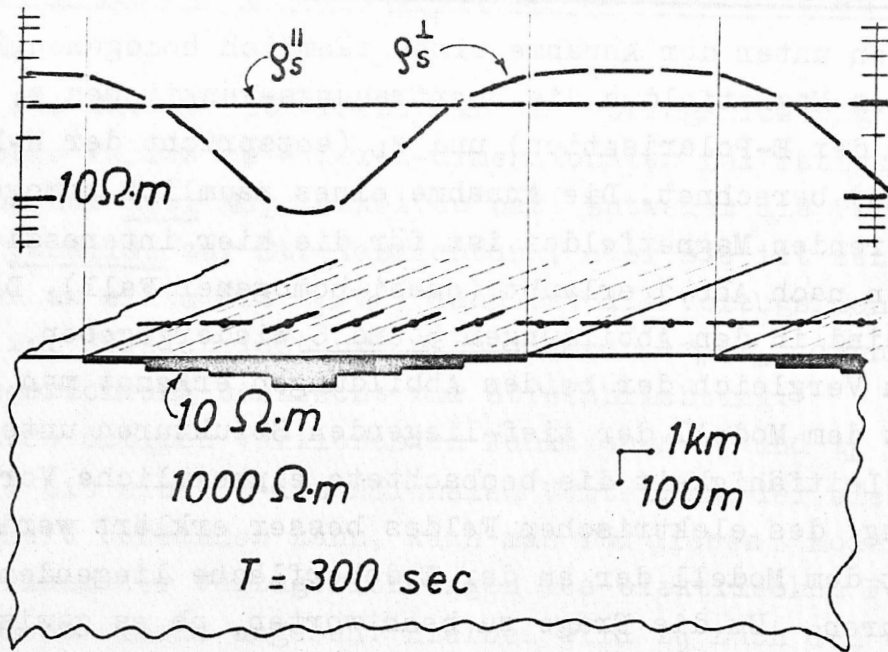


ABBILDUNG 5

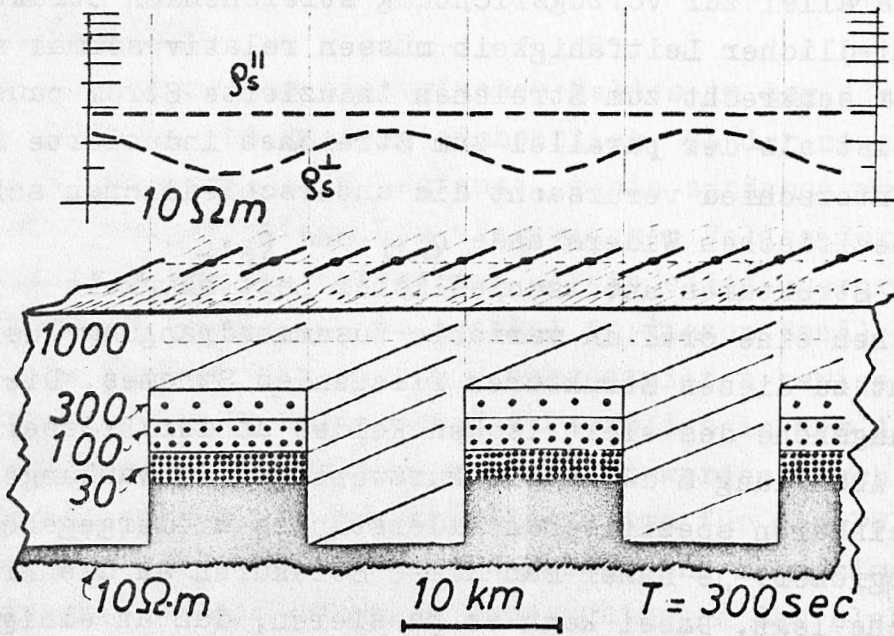


ABBILDUNG 6



Abbildungen 5 und 6 :

In beiden Abbildungen ist jeweils im unteren Teil das Modell einer vereinfachten Leitfähigkeitsverteilung für die Afarsenke wiedergegeben. In Abb.5 wurde angenommen, daß die Strukturen unterschiedlicher Leitfähigkeit, die die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes verursachen sollen, an der Erdoberfläche liegen. In Abb.6 wurde angenommen, daß diese Strukturen viel tiefer liegen. Im oberen Teil der Abbildungen ist jeweils die Variation des scheinbaren spezifischen Widerstandes - statt der Übertragungsfunktionen  $z_{||}$  und  $z_{\perp}$  -  $\rho_{S,||}$  und  $\rho_{S,\perp}$  entlang eines Profils senkrecht zu den Strukturen wiedergegeben. Wenn  $\rho_{S,||} > \rho_{S,\perp}$  dann ist die Vorzugsrichtung parallel zur Streichrichtung, ist dagegen  $\rho_{S,||} < \rho_{S,\perp}$  so ist die Vorzugsrichtung senkrecht zur Streichrichtung. Andere Vorzugsrichtungen können in einer 2-dimensionalen Leitfähigkeitsverteilung nicht existieren.

Die Geometrie der gut-leitfähigen Strukturen in Abb. 6 ist nicht wichtig, dagegen aber ihre räumliche Ausdehnung: Wären die Strukturen kleiner, so wäre  $\rho_{S,||} \approx \rho_{S,\perp}$ , was zu einer Auflösung der durch den Untergrund bedingten Vorzugsrichtung führen würde. Auch dürfen diese Körper nicht zu weit und nicht zu nahe voneinander entfernt sein, da dann ebenfalls  $\rho_{S,||} \approx \rho_{S,\perp}$ . Bei längeren Perioden könnte man bei diesem Modell ebenfalls eine Auflösung der durch die Strukturen bedingten Vorzugsrichtung erwarten (was aber nicht bei dem Modell in Abb. 5 sein kann), was mit dem Ergebnis von GREINWALD für eine Station in der Afarsenke übereinstimmen würde.

Literaturverzeichnis

- BENNETT, D.J. : Vortrag auf dem Symposium: Afar and related rift structures, in Bad Bergzabern 1974.
- SCHMUCKER, U.: Interpretation of Induction Anomalies above non-uniform surface layers. Geophysics, 36, S.156 - 165, 1971.
- GREINWALD, S.: Ein Gerät zur Registrierung von Variationen des erdmagnetischen und erdelektrischen Feldes und die Bearbeitung der damit gewonnenen Meßwerte, demonstriert an zwei Stationen aus der Afarsenke.- Diss. Fak. Geowissenschaften Univ. München, S.90 ff. 1972.

J. UNTIEDT, Münster

"Fehlerquellen bei der Bestimmung von  
Übertragungskoeffizienten"

Dienstag, den 12.03.1974

1. Einleitung

Unter "Übertragungskoeffizienten" werden hier speziell die Komponenten a und b des komplexen Induktionspfeils in der Erdmagnetischen Tiefensondierung verstanden.

Bezeichnen an einem festen Ort  $\tilde{X}(t)$ ,  $\tilde{Y}(t)$  und  $\tilde{Z}(t)$  die kartesischen Komponenten des magnetischen Variationsvektors im Zeitbereich und  $X(w)$ ,  $Y(w)$  und  $Z(w)$  die entsprechenden Komponenten im Frequenzbereich ( $w$  Kreisfrequenz), so vermitteln a(w) und b(w) im Idealfall zwischen X, Y und Z den linearen Zusammenhang

$$(1) \quad Z = a X + b Y$$

Im folgenden soll, falls nicht etwas anderes gesagt wird, diese Beziehung als streng gültig angenommen werden, sofern es sich bei X, Y und Z um fehlerfreie (wahre) Feldkomponenten handelt.

Wir wollen nun von isolierten Einzelvariationen (z.B. Baystörungen) ausgehen; "isoliert" insofern, als für die i-te dieser Variationen mit den wahren Komponenten  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  (im w-Bereich) jeweils einzeln (1) erfüllt sein soll:

$$(2) \quad Z_i = a X_i + b Y_i$$

Von der wahren, im Einzelfall unbekanntem Variation ist die gemessene, mit Fehlern behaftete i-te Variation mit den Komponenten  $X'_i$ ,  $Y'_i$ ,  $Z'_i$  (ebenfalls im w-Bereich) zu unterscheiden. Nur diese gemessenen Variationen können für die Bestimmung von a und b herangezogen werden.



Als wahren, ebenfalls im Einzelfall i.a. unbekanntem Fehler der i-ten Variation haben wir

$$(3a) \quad \delta X_i = X_i' - X_i$$

$$(3b) \quad \delta Y_i = Y_i' - Y_i$$

$$(3c) \quad \delta Z_i = Z_i' - Z_i$$

Wegen dieser Fehler erfüllen die gemessenen Variationen  $(X_i', Y_i', Z_i')$  die Beziehung (2) nicht. Dementsprechend müssen "Fehler", "Streuungen" in den Ergebnissen auftreten, wenn versucht wird, aus den  $(X_i', Y_i', Z_i')$  Übertragungskoeffizienten zu berechnen.

## 2. Fehlereinteilung

Die in (3) definierten Fehler lassen sich in grober Weise so klassifizieren:

1. SUZ = Signalunabhängige, zufällige Fehler

Beispiele: Störsignale der Technik

Ablesefehler, Digitalisierungsfehler

2. SUS = Signalunabhängige, systematische Fehler.

Beispiel: Nullpunktsfehler

3. SAZ = Signalabhängige, zufällige Fehler

Beispiel: Fehlerhafte Fouriertransformation (s.u.)

4. SAS = Signalabhängige, systematische Fehler

Beispiel: Verwendung falscher Skalenwerte oder Verstärkungsfaktoren

Hier zwei Beispiele dafür, was im Falle von SAZ unter "fehlerhafter Fouriertransformation" verstanden wird:

a) Fehlerhafte Trendeliminierung

Eine "isolierte Variation" (s.o.) wird etwa dadurch gewonnen, daß von der wirklichen Variation  $(X, Y, Z)$  im Zeitbereich eine Trendvariation  $(X_0, Y_0, Z_0)$  abgezogen wird (Abb. 1).

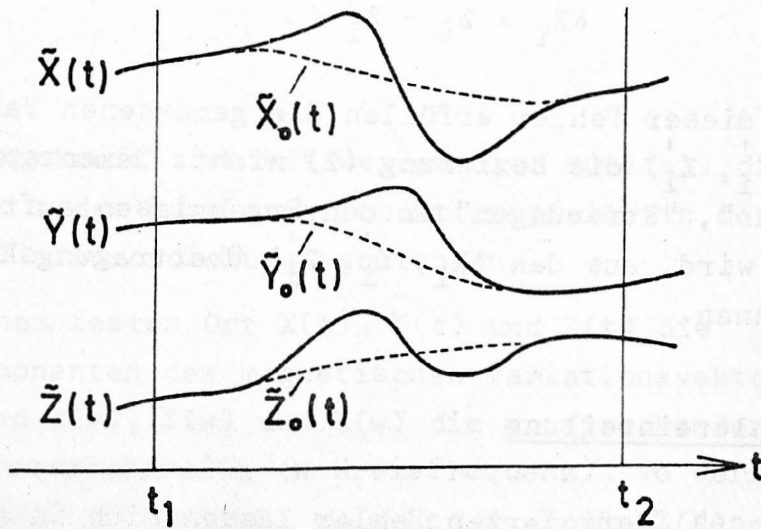


Abb. 1

Im Frequenzbereich müssen die drei Komponenten der Trendkurve zueinander "passen", d.h. sie müssen die Beziehung

$$(4) \quad Z_0 = a X_0 + b Y_0$$

erfüllen. Wird hierauf nicht geachtet, erfüllen i.a. auch die Komponenten der übrigbleibenden Variation die Beziehung (2) nicht und sind in diesem Sinne fehlerhaft.

b) Einfluß der Vorgeschichte

Die Verwendung eines isolierten Ereignisses bedeutet auch, daß im i-ten Fall vom gesamten Zeitbereich nur der Teilbereich  $(t_1, t_2)$  betrachtet und angenommen wird, daß die Variation außerhalb dieses Bereiches identisch verschwindet.

Bei schlechter Wahl des Intervalles  $(t_1, t_2)$  kann im Extremfall das geschehen, was Abb. 2 darstellt:



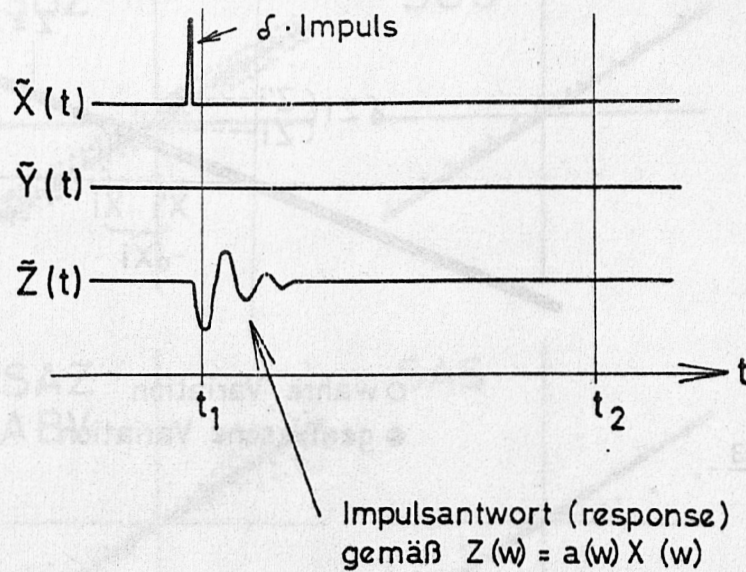


Abb. 2

Ein  $\delta$ -Impuls in der  $\tilde{X}$ -Komponente direkt vor  $t = t_1$  bewirkt gemäß (1) eine  $\tilde{Z}$ -Variation, die im wesentlichen im Intervall  $(t_1, t_2)$  von Null verschieden ist. Für die  $i$ -te Variation, die diesem Intervall entnommen wird, gilt offenbar im  $w$ -Bereich

$$X'_i = Y'_i = 0, \quad Z'_i \neq 0$$

d.h. es ist (2) nicht erfüllt und die Variation  $(X'_i, Y'_i, Z'_i)$  ist in diesem Sinne fehlerhaft.

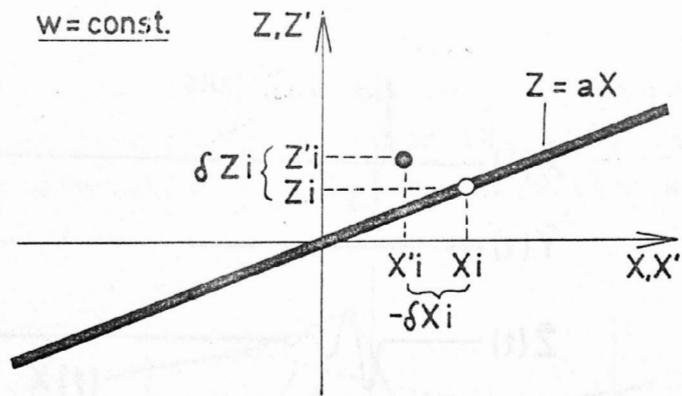
Diese beiden Beispiele verdeutlichen gleichzeitig, inwiefern eine Variation "isoliert" (vgl. Abschnitt 1) sein muß, damit von ihr vorausgesetzt werden darf, daß sie (2) erfüllt.

### 3. Der spezielle Fall $b = 0$ , $a$ reell

In diesem Fall werden die Dinge besonders einfach und übersichtlich. Es gilt an Stelle von (2) für die wahre Variation

$$(5) \quad Z_i = a X_i$$

wobei  $X_i$  und  $Z_i$  ebenfalls als reell angesehen werden dürfen.



○ wahre Variation  
● gemessene Variation

Abb. 3.

Während in der  $(X, Z)$ -Ebene die wahre Variation auf der durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden  $Z = aX$  liegt, ist die gemessene Variation  $(X'_i, Z'_i)$  kein Punkt dieser Geraden (Abb. 3). Im folgenden soll von wahren (unbekannten) bzw. gemessenen Punkten gesprochen werden.

Abb. 4 veranschaulicht, wiederum in schematischer Weise und mit dem gleichen Achsensystem wie in Abb. 3, wie im Falle der in Abschnitt 2 eingeführten Fehlerklassen die Verteilung der gemessenen Punkte in der  $(X, Z)$ -Ebene aussieht. Bestimmung des Übertragungskoeffizienten  $a$  für die betreffende Frequenz  $w$  heißt, die eingezeichnete, jedoch zunächst nicht bekannte Gerade  $Z = aX$  zu finden. Im Falle SAS ist das offensichtlich nicht möglich.

In Abb. 4 unten links findet sich zusätzlich zur Aufschrift SAZ noch die Bezeichnung ABV ("a, b variabel"). Sie soll hinweisen auf den bisher nicht vorausgesetzten Fall, daß  $a(w)$  keine Konstante, sondern in gewissen Grenzen variabel ist.

Für die Übertragungskoeffizienten in der Erdmagnetischen Tiefensondierung rührt eine derartige Variabilität bekanntlich von der Variabilität der Wellenlänge des induzierenden Magnetfeldes her. Abb. 4 unten links macht deutlich, daß der gemessenen Punktverteilung nach die Fälle SAZ (mit  $a = \text{const.}$ ) und ABV ( $a$  variabel) nicht zu unterscheiden sind.



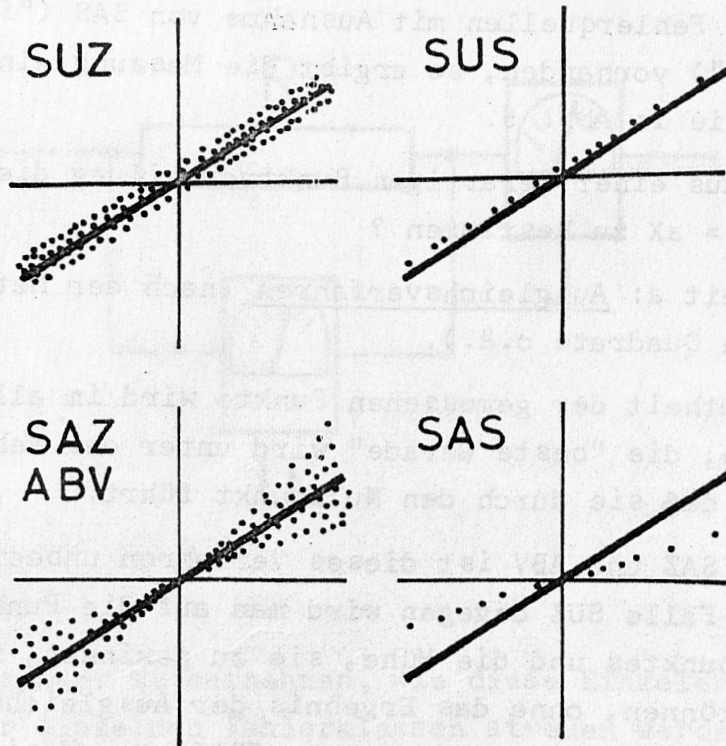


Abb. 4

Selbstverständlich stellt der Fall ABV keine Fehlerquelle im eigentlichen Sinne dar. Wegen der Äquivalenz mit SAZ wollen wir ihn jedoch in unserem Zusammenhang gelegentlich mit zu den Fehlern rechnen.

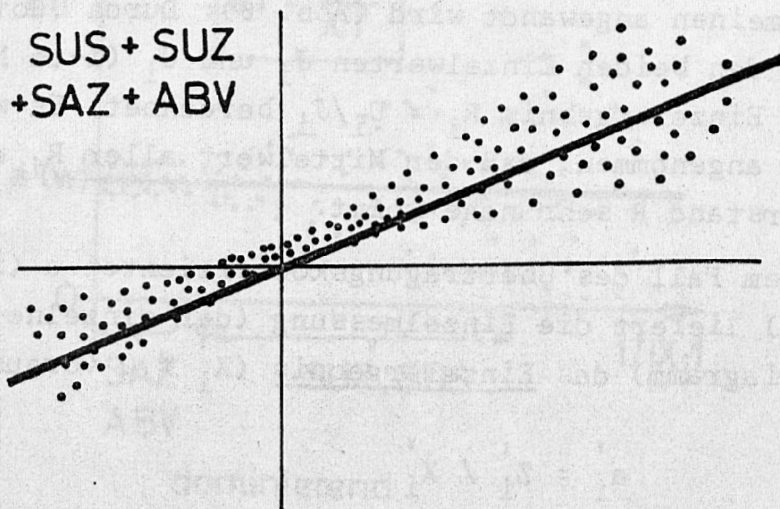


Abb. 5

Sind alle Fehlerquellen mit Ausnahme von SAS ("falscher Skalenfaktor") vorhanden, so ergibt die Messung eine Punktverteilung wie in Abb. 5.

Wie ist aus einer derartigen Punktverteilung die gesuchte Gerade  $Z = aX$  zu bestimmen ?

Möglichkeit a: Ausgleichsverfahren (nach der Methode der kleinsten Quadrate o.ä.).

Die Gesamtheit der gemessenen Punkte wird im allgemeinen herangezogen; die "beste Gerade" wird unter der Nebenbedingung gesucht, daß sie durch den Nullpunkt führt.

Im Falle SAZ und ABV ist dieses Verfahren unbedingt naheliegend. Im Falle SUZ dagegen wird man auf die Punkte in der Nähe des Nullpunktes und die Mühe, sie zu gewinnen, vielfach verzichten können, ohne das Ergebnis der Ausgleichsrechnung wesentlich zu verändern oder zu verfälschen. Wenige Punkte mit großen  $|X|$ -Werten können in diesem Fall nur durch sehr viele Punkte in der Nähe des Nullpunktes ersetzt werden. Erstere sind in diesem Sinne "wertvoller", ganz anders als im Fall SAZ/ABV.

Möglichkeit b: Einzelauswertung.

Gemeint ist diejenige Auswertung, die z.B. bei der Bestimmung eines Widerstandes  $R$  (entsprechend unserem  $a$ ) durch Messung von Strom  $J$  (entsprechend  $X$ ) und Spannung  $U$  (entsprechend  $Z$ ) im allgemeinen angewandt wird (Abb. 6): Durch Quotientenbildung aus den beiden Einzelwerten  $J_i$  und  $U_i$  ( $i$ -te Messung) wird ein Einzelergebnis  $R_i = U_i/J_i$  berechnet. Es wird im allgemeinen angenommen, daß der Mittelwert aller  $R_i$  dem gesuchten Widerstand  $R$  sehr nahe kommt.

In unserem Fall des Übertragungskoeffizienten  $a$  (immer bei festem  $w$ ) liefert die Einzelmessung (der einzelne Punkt im  $(X, Z)$ -Diagramm) das Einzelergebnis ( $X_i' \neq 0$  vorausgesetzt)

$$(6) \quad a_i' = Z_i' / X_i'$$



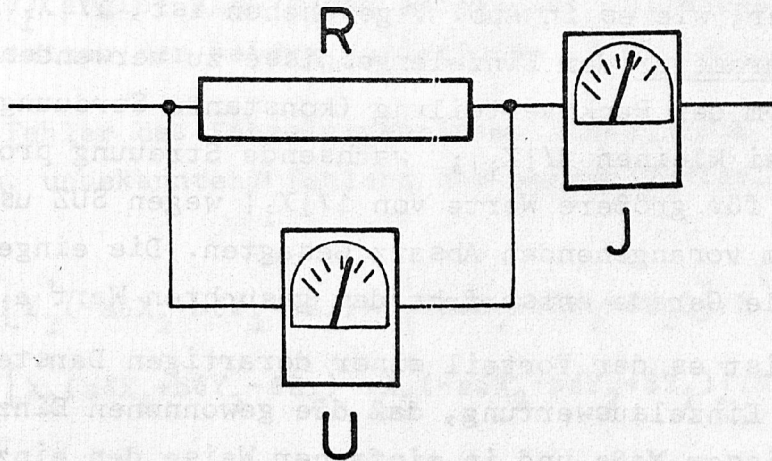


Abb. 6

Der Abb. 4 ist unschwer zu entnehmen, wie diese Einzelergebnisse im Falle der einzelnen Fehlerklassen streuen werden: Im Falle SUZ wird die Streuung umgekehrt proportional zu  $|X_i'|$  wachsen, im Falle SAZ/ABV dagegen unabhängig von  $|X_i'|$  sein. Bei kleinen  $|X_i'|$  ist also SUZ, bei großen  $|X_i'|$  ist SAZ/ABV dominierend (d.h. die Streuung bestimmend). Im Falle von SUS würde das Einzelergebnis eineindeutig von  $|X_i'|$  abhängen und insofern variieren.

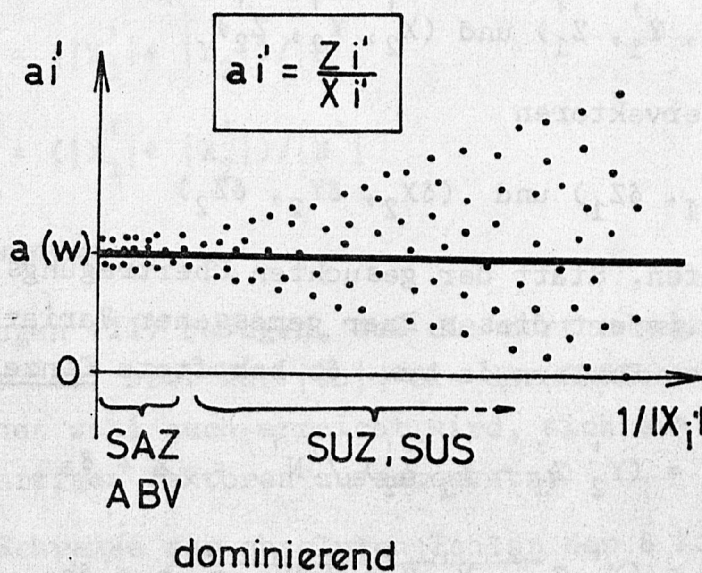


Abb. 7

dominierend

Diese Abhängigkeit der Streuung von  $|X_i'|$  legt es nahe,  $|X_i'|$  oder besser, wie es in Abb. 7 geschehen ist,  $1/|X_i'|$  als Ordnungsparameter der Einzelergebnisse zu verwenden. Die genauere Form der Punktverteilung (konstante Streuung wegen SAZ/ABV bei kleinen  $1/|X_i'|$ ; wachsende Streuung proportional zu  $1/|X_i'|$  für größere Werte von  $1/|X_i'|$  wegen SUZ usw.) folgt aus dem im vorangehenden Absatz Gesagten. Die eingezeichnete horizontale Gerade entspricht dem gesuchten Wert a.

Offenbar ist es der Vorteil einer derartigen Darstellung und damit der Einzelauswertung, daß die gewonnenen Einzelergebnisse in gewissem Maße und in einfacher Weise den einzelnen Fehlerklassen zugeordnet werden können. Läßt sich etwa durch sehr sorgfältige Behandlung der ursprünglichen Meßdaten SAZ ausschließen, kann auf diese Weise die Variabilität von a (ABV) unter Umständen auch bei starkem SUZ-Einfluß auf die Mehrzahl der Messungen bestimmt werden.

#### 4. Einzelauswertung im allgemeinen Fall

Nun soll wieder Gleichung (2) zugrundegelegt werden, wobei wie stets  $w = \text{const.}$  angenommen wird. Aus der Gesamtheit der isolierten Einzelvariationen  $(X_i', Y_i', Z_i')$  sei willkürlich ein Variationspaar

$$(X_1', Y_1', Z_1') \text{ und } (X_2', Y_2', Z_2')$$

mit den Fehlervektoren

$$(\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1) \text{ und } (\delta X_2, \delta Y_2, \delta Z_2)$$

herausgegriffen. Statt der gesuchten Übertragungskoeffizienten a und b liefert dieses Paar gemessener Variationen das mit den wahren Fehlern  $\delta a$  bzw.  $\delta b$  behaftete Einzelergebnis

$$(7a) \quad a' = (Y_2' Z_1' - Y_1' Z_2') / N' = a + \delta a$$

$$(7b) \quad b' = (X_1' Z_2' - X_2' Z_1') / N' = b + \delta b$$

mit

$$(8) \quad N' = X_1' Y_2' - X_2' Y_1'$$



vorausgesetzt, daß  $N' \neq 0$  ist. Alle Größen sind i.a. komplex. Gleichung (7) ergibt sich durch aufeinanderfolgendes (fälschliches) Einsetzen der beiden Variationen in Gleichung (2).

Die wahren Fehler des Einzelergebnisses lassen sich aus den wahren (i.a. unbekanntem) Fehlern der beiden Variationen berechnen:

$$(9a) \quad \delta a = [Y_2'(-a\delta X_1 - b\delta Y_1 + \delta Z_1) + Y_1'(a\delta X_2 + b\delta Y_2 - \delta Z_2)]/N'$$

$$(9b) \quad \delta b = [X_2'(a\delta X_1 + b\delta Y_1 - \delta Z_1) + X_1'(-a\delta X_2 - b\delta Y_2 + \delta Z_2)]/N'$$

Diese Gleichungen folgen aus (7) mit (2) und (3).

Mit

$$(10) \quad \delta F = \text{Max} (|\delta X_1|, |\delta Y_1|, |\delta Z_1|, |\delta X_2|, |\delta Y_2|, |\delta Z_2|)$$

läßt sich aus (9) folgende Abschätzung gewinnen:

$$(11a) \quad |\delta a| \leq M_a (1 + |a| + |b|) \delta F$$

$$(11b) \quad |\delta b| \leq M_b (1 + |a| + |b|) \delta F$$

wobei die Abkürzungen

$$(12a) \quad M_a = (|Y_1'| + |Y_2'|)/|N'|$$

$$(12b) \quad M_b = (|X_1'| + |X_2'|)/|N'|$$

eingeführt wurden.

Die Gleichungen (11) besagen, daß die dort angegebene obere Schranke für  $|\delta a|$  bzw. für  $|\delta b|$ , die der Größenordnung nach im allgemeinen wohl auch erreicht wird, sich aus drei sehr verschiedenartigen Faktoren zusammensetzt:

1. Obere Schranke der absoluten Fehler der 6 Komponenten des betreffenden Variationspaares. Dimension:  $\gamma/\text{Hz}$ .

2. Ein allein von den Absolutbeträgen der beiden Übertragungskoeffizienten abhängiger Faktor der Größenordnung 1.
3. Ein Faktor  $M_a$  bzw.  $M_b$ , der allein von den 4 gemessenen Horizontalkomponenten (im w-Bereich) des Variationspaares abhängt. Dieser Faktor kann um Größenordnungen variieren und bestimmt im wesentlichen, inwieweit die Fehler des Variationspaares, repräsentiert durch  $\delta F$ , auf den Fehler ( $\delta a$ ,  $\delta b$ ) des Einzelergebnisses durchschlagen. Dimension: Hz/ $\gamma$ .

Aus der Gesamtzahl von  $n$  gemessenen Variationen lassen sich  $n(n-1)/2$  derartiger Paare und daher dieselbe Anzahl von Einzelergebnissen ( $a'$ ,  $b'$ ) gewinnen. Wie aus (11) ersichtlich, bestimmen im wesentlichen  $M_a$  und  $M_b$ , welche dieser Paare "gute" und welche sehr fehlerhafte Einzelergebnisse erbringen. Es ist vielleicht wichtig zu betonen, daß i. a. nicht Einzelvariationen diese Eigenschaften zuerkannt werden können.

Offensichtlich bieten sich  $M_a$  bzw.  $M_b$  als Ordnungsparameter der Einzelergebnisse  $a'$  bzw.  $b'$  an. Das gilt auch für aus  $a'$  und  $b'$  abzuleitende Größen, z. B.  $\text{Re}(a')$ ,  $\text{Im}(b')$ ,  $|a'|$ ,  $\phi(a')$  ( $\phi$  Phasenwinkel einer komplexen Zahl).

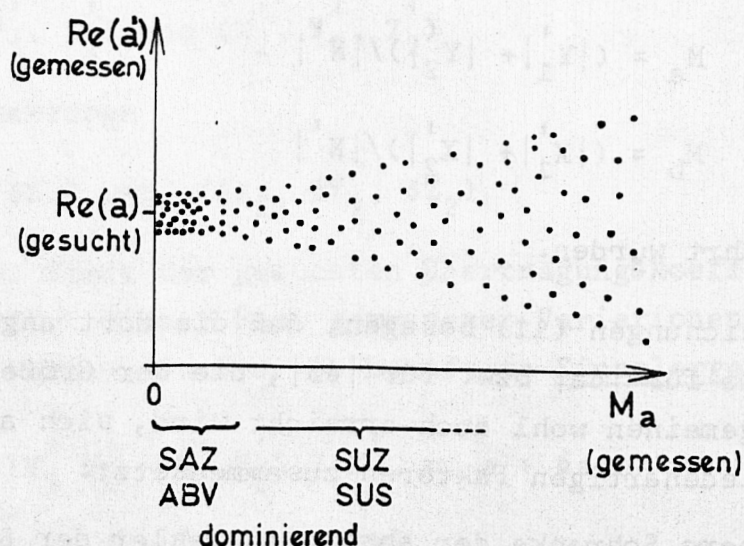


Abb. 8



Beispielsweise ist in Abb. 8 eine erwartete Punktverteilung für den Fall dargestellt, daß die Einzelergebnisse  $\text{Re}(a')$  nach  $M_a$  geordnet sind. Die genauere Form der Punktverteilung ergibt sich aus folgender Überlegung: Für SUZ und SUS ist  $\delta F$  signalunabhängig, hängt also nicht von  $M_a$  ab. Daher wird nach (11)  $|\delta a|$  und damit auch die Streuung von  $\text{Re}(a')$  etwa proportional mit  $M_a$  wachsen. Für SAZ und ABV andererseits kann angenommen werden, daß  $\delta F$  etwa proportional zur Signalamplitude, daher aber auch etwa umgekehrt proportional zu  $M_a$  (vgl. Abschnitt 5, Fall 2) wächst. In diesem Fall ist das Produkt  $M_a \cdot \delta F$  im wesentlichen von konstanter Größenordnung, die Streuung der Einzelergebnisse also von  $M_a$  unabhängig. Selbst für die "günstigsten" Variationspaare mit verschwindendem  $M_a$  bleibt im Falle von SAZ und ABV eine gewisse Streuung der Einzelergebnisse übrig.

#### 5. Eigenschaften der Ordnungsparameter $M_a$ und $M_b$

$M_a$  und  $M_b$  beschreiben die Güte eines Signalpaares im Hinblick auf die Bestimmung der Übertragungskoeffizienten  $a$  und  $b$ . Folgende Eigenschaften von  $M_a$  und  $M_b$  sind hervorzuheben:

1.  $M_a$  und  $M_b$  sind von  $Z_1'$  und  $Z_2'$  nicht abhängig. Aus diesem Grunde sollten auch bei anderen Verfahren Größe oder Kleinheit der Z-Komponenten eines Signals kein Kriterium dafür sein, ob dieses Signal zur (a, b)-Bestimmung herangezogen werden soll oder nicht.

2. Falls  $|X_1'| = O(S)$ ,  $|Y_1'| = O(S)$   
 $|X_2'| = O(S)$ ,  $|Y_2'| = O(S)$

mit  $O(S)$  Größenordnung des Signals,  $S$  in  $\gamma/\text{Hz}$ , gilt

$$M_a \geq O(S^{-1})$$

$$M_b \geq O(S^{-1})$$

d.h.  $M_a, M_b \rightarrow 0$  nur für  $S \rightarrow \infty$ .

Der Ursprung der Abszissenachse in Abb. 8 entspricht also unendlich großen Signalen.

3. Falls  $X'_1 = Y'_1 = 0$ , folgt wegen  $N' = 0$

$$M_a = M_b = \infty$$

Einzelvariationen mit Horizontalkomponenten unter einer gewissen Schranke sind also von vornherein zu verwerfen.

4. Es sei  $X'_2/Y'_2 = X'_1/Y'_1$ , d.h. die beiden Variationen des Paares seien bei i.a. verschiedenen Amplituden in gleicher Weise polarisiert. Abb. 9 zeigt für ein Beispiel

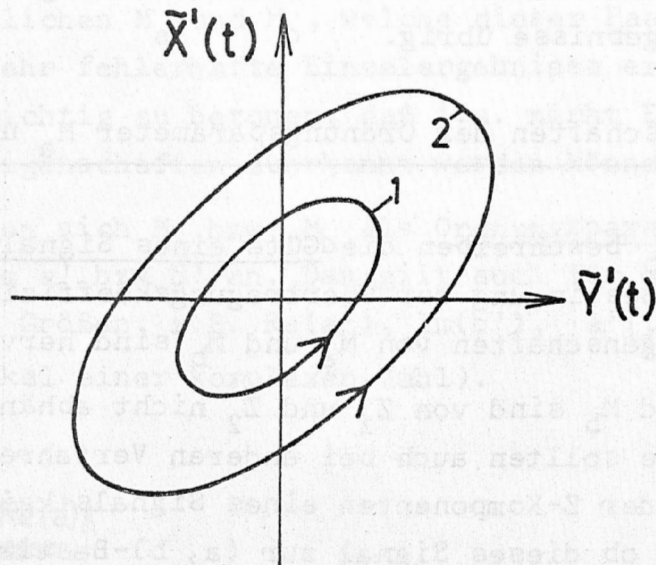


Abb. 9

die aus den entsprechenden Zeitfunktionen zu konstruierenden Polarisationsellipsen im Horizontalvektogramm.

In diesem Fall folgt  $N' = 0$  und daher

$$M_a = M_b = \infty$$

Diese beiden Signale bilden, auch wenn sie große Amplitude besitzen und sehr fehlerfrei sind, wegen gleicher Polarisation kein geeignetes Paar. Jedes der beiden



Signale kann natürlich mit weiteren Signalen anderer Polarisation sehr günstige Paare (mit kleinen M-Werten) bilden.

5. Es sei

$$X_2' = Y_1' = 0$$

$$|X_1'| = O(S/m)$$

$$|Y_2'| = O(Sm)$$

mit  $m \gg 1$ . Das entsprechende Ellipsenbild zeigt Abb. 10.

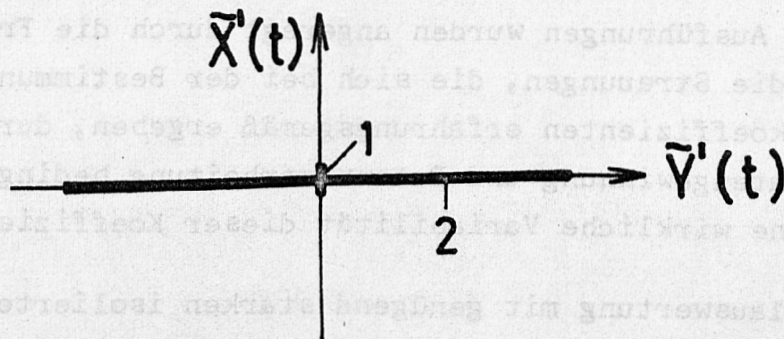


Abb. 10

Wir wollen  $S$  (Dimension  $\gamma/\text{Hz}$ ) konstant halten und  $m$  gegen Unendlich gehen lassen.

Es folgt

$$|N'| = |X_1'| \cdot |Y_2'| = O(S^2) = \text{const}$$

$$M_a = 1/|X_1'| = O(mS^{-1}) \rightarrow \infty$$

$$M_b = 1/|Y_2'| = O(S^{-1}/m) \rightarrow 0$$

In diesem Fall ist der Fehler in  $a'$  unendlich groß, in  $b'$  dagegen unendlich klein.

Das ist verständlich: Wenn die Anregung (s. Abb. 10) ausschließlich in  $Y$ -Richtung erfolgt, kann  $b$  sehr gut bestimmt werden, während  $a$  unbestimmt bleibt.

Dieses Beispiel ist insofern bemerkenswert, als  $|N'|$  wesentlich von Null verschieden ist und trotzdem einer der beiden Übertragungskoeffizienten bei der Einzelauswertung nicht bestimmt werden kann, so daß sich das betreffende Variationspaar als "nicht in jeder Hinsicht geeignet" erweist. Nach den Eigenschaften (Beispielen) 3 und 4 zu urteilen, sah es so aus, als würden die kritischen Fälle wesentlich durch  $N'$  bestimmt, so daß zu fragen wäre, weshalb nicht  $|N'|$  statt  $M_a$  und  $M_b$  als Ordnungsparameter für die Einzelauswertung vorgeschlagen wird.

## 6. Schlußbemerkung

Diese Ausführungen wurden angeregt durch die Frage, inwieweit die Streuungen, die sich bei der Bestimmung von Übertragungskoeffizienten erfahrungsgemäß ergeben, durch Fehler in der Datengewinnung und Datenverarbeitung bedingt sind, oder ob eine wirkliche Variabilität dieser Koeffizienten vorliegt.

Einzelauswertung mit genügend starken isolierten Signalen unter Vermeidung von "signalabhängigen zufälligen" Fehlern (SAZ) und unter Verwendung von Signalpaaren, bei denen ein Einfluß "signalunabhängiger zufälliger" Fehler (SUZ) trotz Vorhandenseins dieser Fehler vernachlässigt werden kann (Verwendung der signalabhängigen Parameter  $M_a$  und  $M_b$  als Kriterium), sollte eine Antwort auf diese Frage ermöglichen. Bei extrem großen Signalen während erdmagnetischer Stürme sollte dieses Verfahren z.B. wegen des dann sicherlich vorhandenen Einflusses des polaren Elektrojets mit seinem äußerst inhomogenen Magnetfeld (kleine Wellenlänge) besonders große Abweichungen der Übertragungskoeffizienten  $a$  und  $b$  von den normalen Werten oder vielleicht sogar das Zusammenbrechen des Ansatzes (1) nachweisen können.

Auch eine Übertragung auf den Fall der Magnetotellurik bietet sich an, obwohl es dort schwieriger ist, "isolierte" Variationen, die beim Verfahren der Einzelauswertung wohl vorausgesetzt werden müssen, zu finden. In den oben angegebenen Formeln sind für diesen Fall lediglich z.B.  $Z$  durch



$E_x$ , a durch  $Z_{xx}$  und b durch  $Z_{xy}$  zu ersetzen ( $Z_{xx}$ ,  $Z_{xy}$  Komponenten des Impedanztensors).