

U. SCHMUCKER, Göttingen

"Erdmagnetische Tiefensondierung mit langperiodischen  
Variationen"

Mittwoch, den 13.03.1974

1. Einleitung

Zu den langperiodischen Variationen des erdmagnetischen Feldes gehören der Sq-Gang magnetisch ruhiger Tage und die  $D_{st}$ -Nachphase magnetischer Stürme. Hinzu kommt eine nur statistisch nachweisbare, langzeitliche Modulation der Sturmaktivität. Sie beruht auf der Eigenrotation der Sonne und auf der wechselnden Stellung der Rotationsachse der Erde bezüglich der Ekliptik im Verlaufe des Jahres. Den genannten Variationen ist gemeinsam, daß ihr innerer Anteil deutlich unter dem induktiven Grenzwert liegt, so daß sie in mittleren Breiten durch relativ große, nicht durch Leitfähigkeitsanomalien bedingte "normale" Z-Amplituden ausgezeichnet sind. Dies bedeutet, daß ihre Eindringtiefe in das Erdinnere nicht als klein gegenüber der Skalenlänge des induzierenden Feldes anzusehen ist wie es etwa für Bays in mittleren Breiten zutrifft.

Die Z-Amplitude langperiodischer Variationen im Verhältnis zu ihren Amplituden in H und D ist ein direktes Maß für die Eindringtiefe im Verhältnis zum Erdradius, wobei sich Eindringtiefen von einigen hundert Kilometern ergeben. Die relative Stärke langperiodischer Z-Variationen ist also im besonderen Maße dazu geeignet, Auskunft über die elektrische Leitfähigkeitsverteilung im oberen Erdmantel zu geben. Dabei darf aber die tiefe Leitfähigkeitsstruktur nicht a priori als lateral-homogen angesehen werden, ganz abgesehen von der störenden Wirkung, die von der teilweisen Meeresbedeckung der Erde ausgeht. Eine weltweite Analyse des Variationsfeldes unter der Annahme einer nur von der Tiefe abhängigen Leitfähigkeit ist daher von beschränktem Wert. Man muß vielmehr versuchen, mit einem regionalen Teilausschnitt des Variationsfeldes oder auch nur mit Beobachtungen an einem einzigen Ort auszukommen. Die großräumige Struktur des

äußeren, induzierenden Feldes bleibt dabei im einzelnen unbekannt und muß durch gewisse vereinfachende Annahmen festgelegt werden.

Bei der Anwendung der magnetotellurischen Methode wäre die Kenntnis der räumlichen Verteilung des induzierenden Feldes weniger ausschlaggebend. Erfahrungsgemäß ist aber die fehlerfreie Registrierung langperiodischer Variationen des erdelektrischen Feldes schwierig. Hinzu kommt der nur schwer vermeidbare, störende Einfluß oberflächennaher Inhomogenitäten.

## 2. Analyse des Sq-Ganges

Werden die stündlichen Mittelwerte der erdmagnetischen Elemente H, D und Z über eine zusammenhängende Folge magnetisch ruhiger Tage harmonisch analysiert, so erhält man in mittleren und niederen Breiten ein Spektrum, in dem die tagesperiodischen Variationen als scharfe Linien deutlich hervortreten. Dies ist in Abb.1 am Beispiel des Observatoriums Fürstenfeldbruck für eine aus 17 ruhigen Tagen bestehende Folge gezeigt.

Es seien  $H_m$ ,  $D_m$ ,  $Z_m$  die durch eine harmonische Analyse bestimmten komplexen Fourieramplituden des Sq-Ganges an einem Ort der Erdoberfläche für die Frequenz  $2\pi m/T_0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  ( $T_0 = 1$  Tag). Da die ionosphärischen Stromsysteme, die den äußeren Anteil des Sq-Gangs erzeugen, durch die Wellenstrahlung der Sonne hervorgerufen werden, ist der Sq-Gang eine nahezu reine Funktion der Ortszeit. Die Längenabhängigkeit der Fourieramplituden für die in Weltzeit analysierten Zeitreihen beträgt also in guter Näherung  $\exp(im\lambda)$  wenn  $\lambda$  die geographische Länge des Beobachtungsortes bezeichnet.

Es sei  $V_m$  das Potential des Variationsfeldes für die Frequenz  $m$ , seine Breitenabhängigkeit sei durch eine Reihe zugeordneter Kugelfunktionen  $P_n^m(\cos\theta)$  ausgedrückt mit  $\theta$  als geographische  $K_0$ -Breite des Ortes;

$$V_m(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} V_n^m P_{m+k}^m e^{im\lambda}.$$

Während der Äquinoxien sind die ionosphärischen Stromsysteme auf der Nord- und Südhalbkugel nahezu spiegelsymmetrisch. In der Reihenentwicklung entfallen dann die symmetrischen Glieder  $k = 0, 2, 4 \dots$  und erfahrungsgemäß ist

$$V_m(\theta, \lambda) = V_{m+1}^m P_{m+1}^m e^{im\lambda}$$

eine gute Näherung des äquinoxialen Sq-Variationsfeldes. Beachtet man, daß  $P_{m+1}^m = c_m \sin^m \theta \cos \theta$  ist, so lauten die aus dieser Näherung für das Potential abgeleiteten Fourier-Amplituden des Feldes

$$\left. \begin{aligned} H_m &= \frac{\partial V_m}{a \partial \theta} = \sin^{m-1} \theta (m \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ D_m &= \frac{-\partial V_m}{a \sin \theta \partial \lambda} = -im \sin^{m-1} \theta \cos \theta \\ Z_m &= \frac{\partial V_m}{\partial r} = n(n+1) \sin^m \theta \cos \theta C_m / a \end{aligned} \right\} c_m \cdot (V_{m+1}^m / a) e^{im\lambda}$$

mit  $a$  als Erdradius und  $C_m$  <sup>1.)</sup> als komplexer induktiver Skalenlänge für das zum Potential  $V_{m+1}^m$  gehörige Variationsfeld;  $H_m$  ist die nach geographisch Nord,  $D_m$  die nach geographisch Ost und  $Z_m$  die nach unten gerichtete Feldkomponente. Zwischen den Fourier-Amplituden der Horizontalkomponenten sollte also der Zusammenhang

$$-im H_m = (m \cos \theta - \sin \theta \tan \theta) D_m$$

bestehen, was normalerweise nicht der Fall ist. Um eine Erfüllung dieser Bedingung zu erreichen, sollen für jeden Ort und jede Harmonische Sq-effektive Koordinaten wie folgt eingeführt werden:

Zunächst werden  $H_m$  und  $D_m$  auf ein örtliches Koordinatensystem transformiert, das gegenüber dem geographischen Koordinatensystem um den Winkel  $\psi_m$  gedreht ist. <sup>2.)</sup> Dabei ist  $\psi_m$  in der Weise bestimmt, daß für die mit einem Apostroph gekennzeichneten transformierten Koeffizienten

$$-i \alpha H'_m = D'_m$$

- 1.) Impedanz  $Z(\omega) = i\omega\mu_0 C_m$  mit  $\omega = 2\pi m / \text{Tag}$ .  $c_m$ : Normierungsfaktor
- 2.) Berechnung von  $\psi_m$  s. Anhang.

gilt;  $\alpha$  ist eine reelle Zahl. Sie ergibt in

$$\alpha = \cos\theta_m - \sin\theta_m \tan\theta_m / m$$

eine implizite Bestimmungsgleichung für die Sq-effektive Ko-Breite des Ortes bei der betrachteten Frequenz.

Durch  $\psi_m$  und  $\theta_m$  wird ein System Sq-effektiver Koordinaten festgelegt, in dem das globale Sq-Feld für den betreffenden Ort und die betrachtete Frequenz mit dem oben genannten Ansatz beschrieben werden kann.

Es sei angemerkt, daß auch eine in H und D konsistente Darstellung des Sq-Feldes in geographischen Koordinaten versucht worden ist, bei der  $V_m$  durch die Summe von zwei Kugelfunktionen  $P_{m+k}^m$  und  $P_{m+l}^m$  ausgedrückt wird. Dabei hat sich aber kein entscheidender Vorteil gegenüber der Darstellung durch nur eine Kugelfunktion und den Gebrauch Sq-effektiver Koordinaten ergeben.

Die von Tag zu Tag wechselnde Struktur des Sq-Feldes bewirkt Schwankungen der Sq-effektiven Pollage eines Ortes, diese Strukturänderungen sind aber so großräumig, daß die Polschwankungen an Orten im Abstand von einigen hundert Kilometern durchaus gleichsinnig verlaufen.

Dies ist in Abb.2 am Beispiel der Observatorien Fürstfeldbruck (FU) und Wien-Kobenzl (VNK) gezeigt, die in fast gleicher geographischer Ko-Breite liegen ( $41,8^\circ$ ). Ihre Sq-effektiven Ko-Breiten für  $m = 2$  sind in der Regel größer, wodurch sich die Differenz  $\Delta\lambda = (\lambda_{\text{VNK}} - \lambda_{\text{FU}})$  ihrer Längen von  $5^\circ$  in geographischen Koordinaten auf etwa  $4^\circ$  in Sq-effektiven Koordinaten für  $m = 2$  reduziert. Bei einem Sq-System, daß sich mit Ortszeit genau senkrecht zum Meridian von Ost nach West fortbewegt, würde die Phasendifferenz der Fourierkoeffizienten für alle Feldkomponenten (bei gleichem inneren Anteil) gerade  $m\Delta\lambda$  betragen. Tatsächlich beobachtet man aber z.B. in D eine kleinere Phasendifferenz, die durch die reduzierte Längendifferenz in Sq-effektiven Koordinaten gut erklärt wird (Abb.2, unten).

Bestimmt man durch eine Ausgleichsrechnung Übertragungsfunktionen zwischen D und H für die gezeigten 17 Tage und

berechnet man aus diesen Übertragungsfunktionen mittlere Sq-effektive Koordinaten des betreffenden Ortes, so erhält man als Sq-effektive Längendifferenz genau  $4^\circ$  und als Phasendifferenz  $8,2^\circ$  für  $D'$  und  $m=2$ . Damit ist gezeigt, daß sich die harmonischen Komponenten des Sq-Systems tatsächlich in guter Näherung senkrecht zur berechneten Lage des Sq-effektiven Meridians mit der geforderten Geschwindigkeit von  $2\pi a/\text{Tag}$  fortbewegen.

Nach der Transformation von  $D$  und  $H$  auf Sq-effektive Koordinaten läßt sich die induktive Skalenlänge  $C_m$  mit dem gleichen Ergebnis entweder aus dem  $Z/D$  oder dem  $Z/H$  Verhältnis herleiten:

$$C_m = \frac{-im a}{n(n+1)\sin\theta_m} \cdot Z_m/D_m$$

$$= \frac{m \cos\theta_m - \tan\theta_m \sin\theta_m a}{n(n+1) \sin\theta_m} Z_m/H_m.$$

Die in Abb.3 gezeigten Werte von  $C_m$  für  $m = 1$  bis  $m = 4$  (1 - 4 cpd) sind durch eine Ausgleichrechnung bestimmt worden, bei der Übertragungsfunktionen zwischen  $Z_m$  und  $D_m \sin\theta_m$  für die verwandten 17 ruhigen Tage berechnet wurden. Dabei ergeben sich keine signifikanten Unterschiede zwischen Fürstfeldbruck und Wien, die tiefe Leitfähigkeitsstruktur unter den genannten Observatorien ist also im Rahmen der gezeigten Fehlergrenzen als gleich anzusehen.

Man kann auch die Bestimmung der  $C_m$  für beide Observatorien gemeinsam durchführen, wobei sich die Möglichkeit ergibt, den nicht mit Ortszeit fortschreitenden Anteil von Sq zu eliminieren. Hierzu denkt man sich die harmonischen Komponenten des Sq-Ganges aus zwei Anteilen bestehend: einem "stehenden", an beiden Orten phasengleichen Anteil  $D_{UT}$ , der sich aber infolge seiner Längenabhängigkeit zwischen FU und VNK im Vorzeichen unterscheidet, und einen fortschreitenden Anteil  $D_{LT}$ , der in FU und VNK gleiche Amplituden aber unterschiedliche Phase besitzt:

$$D'_m(FU) = (D_{UT} + D_{LT} e^{-i\delta})$$

$$D'_m(\text{VNK}) = (-D_{UT} + D_{LT} e^{+i\delta}).$$

Beide Anteile lassen sich trennen, indem man die Summe und Differenz der komplexen Fourier Amplituden für FU und VNK (nach Reduktion auf gleiche Ko-Breite) bildet.

Zur Berechnung der  $C_m$  durch eine Ausgleichsrechnung werden dann nur die fortschreitenden Anteile von  $D'$  und  $Z$  gewählt, wobei sich die in Abb.4 gezeigte scheinbare Widerstandsverteilung  $\rho^*(z^*)$  ergibt. Zum Vergleich sind die kontinentalen Mittelwerte von  $\rho^*$  und  $z^*$  eingetragen. Sie zeigen, daß nach der vorliegenden Analyse des Sq-Ganges in FU und VNK die für den tieferen Untergrund des Voralpenraums charakteristischen Widerstände  $\rho^*$  etwas unterhalb der kontinentalen Norm liegen.

Vergleicht man die fortschreitenden Anteile von  $Z$  und  $D'$  nach Amplitude und Phase an individuellen Tagen, so ergeben sich auffallend starke Schwankungen (Abb.5). Gleiches gilt für den "stehenden" Anteil, der jedoch stets sehr viel kleiner ist als der gezeigte fortschreitende Anteil. Auch die Phasendifferenz zwischen  $D'$  und  $Z$ , die durch die Induktion im leitfähigen Untergrund bestimmt wird, variiert für Einzeltage erheblich (Abb.5 unten). Bestimmt man die mittlere Phasendifferenz aller 17 Tage durch eine Ausgleichsrechnung, so erhält man  $61^\circ$  mit einer Kohärenz von 0.96. Dieser Wert entspricht bei 32 effektiven Freiheitsgraden der Analyse einem Phasenfehler von  $10^\circ$ .

Die in Abb.6 gezeigten Eindringtiefen  $z^*$  und scheinbaren spezifischen Widerstände  $\rho^*$  des Sq-Ganges sind als Mittelwerte für Kontinente zu betrachten. Sie sind das Ergebnis einer umfangreichen Analyse des Sq-Ganges an 120 Observatorien, wobei in den meisten Fällen die Stundenmittel von zwanzig ruhigen Tagen während der Monate März, April, September, Oktober zur Analyse verwandt worden sind. Nur 23 Observatorien, und zwar ausnahmslos solche in mittleren Breiten ( $20^\circ - 50^\circ$ ) und in großer Entfernung ( $> 800$  km) von Meeresküsten, ergaben brauchbare  $C_m$ -Werte, deren Amplitude, Phase und Frequenzabhängigkeit gewissen Bedingungen für einen normalen inneren Anteil genügte. Die Fehlergrenzen in Abb.6 stellen die mittlere Streuung von  $\rho^*$  und  $z^*$

für folgende Observatorien dar;

Manhay <sup>+</sup>	(32/33b)	Toledo <sup>+</sup>	(57/58c)
Val Joyeux <sup>+</sup>	(32/33b)	Heluan	(57/58d)
Wien	(57/58d)	Kiew <sup>+</sup>	(68a)
Fürstenfeldbruck <sup>+</sup>	(65a)	Lvov <sup>+</sup>	(68a)
Hurbanovo	(57/58d)	Odessa <sup>+</sup>	(68a)
Tihany	(57/58d)	Tiflis	(57/58d)
Surlari	(57/58d)	Taschkent <sup>+</sup>	(57/58c)
Monte Cappelino	(57/58d)	Teheran <sup>+</sup>	(69a)
Panguritsch <sup>+</sup>	(57/58c)	Tuscon <sup>+</sup>	(65a)
Logrono	(57/58d)	Dallas <sup>+</sup>	(65a)
Istanbul	(65a)	Pilar <sup>+</sup>	(32/33b)
Ebro	(57/58d)		

In Klammern sind die Jahre angegeben, deren Äquinoktialmonate fortlaufend oder an den fünf internationalen ruhigen Tagen (+) analysiert worden sind. Die Buchstaben a bis d hinter den Jahreszahlen geben die Quellen an für die Stundenmittelwerte bzw. für deren bereits berechnete harmonischen Koeffizienten.

a: Jahrbücher der Observatorien

b: Price, A.T. and G.A. Wilkins: New method for the analysis of geomagnetic fields and their application to the Sq-field of 1932-3. Phil. Transact. R. Soc. London Series A, 256 (No. 1066), S.31-98, 1963.

c: Price, A.T. and D.J. Stone: The quiet day magnetic variations during the IGY. Annals International Geophys. Year 35, 65-269, Pergamon Press 1964.

d: Gupta, J.C. and S. Chapman: Manual of the coefficients of the first four harmonics of the solar and lunar daily geomagnetic variations computed from IGY/C and certain other data. High Altitude Observatory National Center for Atmospheric Research, Manuscript No. MS 68-110, Boulder/Colorado 80302 USA, 1968.

Die aus den äquinoktialen Sq-Gängen der genannten Observatorien abgeleiteten Übertragungsfunktionen sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Zum Vergleich sind auch die von Chapman berechneten Verhältnisse von innerem zu äusserem Anteil angeführt, die sich bei einer globalen Trennungsanalyse des äquinoktialen Sq-Feldes von 1902 und 1905 ergaben (s. CHAPMAN und BARTELS, 1940; S.692).

### 3. $D_{st}$ -Analyse

Die Ringstrom-Nachphase erdmagnetischer Stürme erstreckt sich über einige Tage und ist gekennzeichnet durch die langsame Rückkehr der H-Komponente auf ihr Normalniveau vor Sturmbeginn. Ein bis zwei Tage nach Abklingen der eigentlichen Sturmtätigkeit besitzt diese Nachphase eine nahezu reine Weltzeitabhängigkeit und ist in geomagnetischen Koordinaten  $(\theta, \Lambda)$  unabhängig von der Länge  $\Lambda$  des Beobachtungsortes. In der Entwicklung des Potentials des  $D_{st}$ -Feldes nach zonalen Kugelfunktionen  $P_n(\cos\theta)$  überwiegt erfahrungsgemäß das erste Glied mit  $n = 1$  ( $\theta$ : geomagnetische Ko-Breite). Gleiches gilt für die langperiodische Modulation der Nachphase, so daß man  $Z \sim P_1 \sim \cos\theta$  und  $H'' \sim \partial P_1 / \partial \theta \sim \sin\theta$  erhält;  $H''$  bezeichnet hier die in die Richtung des geomagnetischen Meridians projizierte Horizontalkomponente. Zwischen  $Z$  und  $H''$  besteht dann zur Zeit  $t$  nach Sturmbeginn der Zusammenhang

$$Z(t, \theta) = \cot\theta \int_0^t R(t-\tau) H''(\tau) d\tau,$$

wenn  $a \cdot R(t)/2$  die Fouriertransformierte der induktiven Übertragungsfunktion

$$C_1(\omega) = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} R(t) e^{-i\omega t} dt$$

ist. Die Analyse der eigentlichen Nachphase erfolgte bisher weitgehend im Zeitbereich, diejenige der langperiodischen Modulation im Frequenzbereich. CHAPMAN und PRICE (1930) erhielten dabei für die ersten drei Tage der Nachphase ein nahezu konstantes Verhältnis 0.35 von innerem zu äußerem Anteil. Dieser Wert entspricht einem  $Z/H'' \cot\theta$ -Verhältnis von 0.22, einer  $\delta$ -förmigen  $R(t)$ -Funktion und einem frequenzunabhängigen, reellen  $C_1(\omega)$  von 710 km. Für die Nachphase wirkt also der tiefere Erdmantel wie ein in 710 km Tiefe beginnender idealer Leiter. Zu gleichen Ergebnissen führte die Frequenzanalyse der langperiodischen Modulation des Ringstromfeldes, bei der es schwierig war, für Frequenzen oberhalb von 0.1 cpd einen von Null verschiedenen Imaginärteil von  $C$  sicher nach zuweisen (ECKHARDT et. al., 1963; BANKS, 1969).



Es wurde darauf verzichtet,  $C_1$ -Werte für den Frequenzbereich von 1 cpd bis 0.1 cpd, in dem die eigentliche Nachphase enthalten ist, aus Angaben in der Literatur zu berechnen. (Eine eigene Analyse der Nachphase ausgewählter Stürme steht in den ersten Anfängen.) Die für den Frequenzbereich von 0.1 cpd bis 0.01 cpd bisher veröffentlichten Angaben weisen nach Phase und Amplitude des Z/H-Verhältnisses erhebliche Streuungen auf, so daß es sich als zweckmäßig erwies, die aus ihnen berechneten  $C_1$ -Werte über Frequenzbänder von 0.05 cpd Breite zu mitteln. Die resultierenden Mittelwerte für 0.1 und 0.05 cpd sind in Abb.6 eingetragen, die dargestellten Fehlergrenzen beziehen sich auf die Streuung von Einzelwerten innerhalb der angegebenen Frequenzbänder.

Die im folgenden Abschnitt beschriebene gemeinsame Interpretation der  $S_q$  und  $D_{st}$ -Daten (Abschnitt 4) wurde mit den  $D_{st}$ -Daten nach der Analyse von ECKARDT et.al. vorgenommen, da der von BANKS gefundene Imaginärteil von  $C_1$  für 0.1 cpd als unrealistisch klein angesehen wurde. Hierzu wurden die Übertragungsfunktionen zwischen Z und H aus den originalen Spektralfunktionen neu berechnet, und zwar nur für das Observatorium Tuscon und das Zeitintervall 1957-58. Die hierzu benötigten Zahlenangaben wurden dem Bericht entnommen

ECKHARDT, D., K. LARNER and T. MADDEN: Long period magnetic fluctuations and mantle electrical conductivity estimates. Geophysics Laboratory MIT, Cambridge 39/ Massachusetts, USA 1963.

Es sei vermerkt, daß die von ECKHARDT et.al. veröffentlichten scheinbaren spezifischen Widerstände (Zahlenwerte um den Faktor 2 zu groß!) in anderer Weise berechnet worden sind. Die Korrelationsanalyse wurde dabei nicht zwischen den Komponenten einer Station, sondern zwischen den gleichen Komponenten verschiedener Stationen vorgenommen.

#### 4. Vorbemerkungen zur Auswertung

Aus den in Fig.6 und Tab.1 zusammengestellten Daten für vier diskrete Sq-Frequenzen und zwei  $D_{st}$ -Frequenzbänder sollen nun Widerstandsmodelle für den oberen Mantel abgeleitet werden. Ihre Frequenzabhängigkeit genügt den Bedingungen für einen 1-dimensionalen Skineffekt in einem geschichteten Medium im Sinne der von WEIDELT (1972, p.266) angegebenen Ungleichungen. Der Widerstand  $\rho$  wird also als reine Funktion der Tiefe  $z$  betrachtet. Zwischen 1 cpd (Sq) und 0.1 cpd ( $D_{st}$ ) überschreitet allerdings  $\partial\rho^*/\partial\omega$  seinen oberen zulässigen Grenzwert,  $C_1(\omega)$  für 0.1 cpd wurde daher nicht zur Auswertung benutzt. Für 0.05 cpd wurde das auf der Analyse von Eckhardt et al. beruhende Wertepaar für Tuscon gewählt, da die aus den Banks'schen Daten abgeleiteten Werte auch noch zu große Gradienten zwischen 1 cpd und 0.05 cpd ergeben hätten.

Die aus der  $D_{st}$ - und Sq-Analyse gewonnenen Übertragungsfunktionen  $C$  werden zunächst als Übertragungsfunktionen  $C(\omega)$  für ein quasi-homogenes induzierendes Feld über einem geschichteten ebenen Leiter interpretiert. In einer nachträglichen Korrektur wird sodann die Kugelgestalt der Erde sowie die Inhomogenität des äusseren Feldes berücksichtigt, die in dem Grad  $n$  der zur Darstellung des Potentials verwandten Kugelfunktionen enthalten ist. Entsprechend den in Abschnitt 2 und 3 beschriebenen Ansätzen wird  $n = 1$  für alle  $D_{st}$ -Frequenzen und  $n = m+1$  für die Sq-Frequenz  $2\pi m/\text{Tag}$  gesetzt.

#### 5. Linearisierung des Umkehrproblems

Der funktionale Zusammenhang zwischen der gegebenen Übertragungsfunktion  $C(\omega)$  und der gesuchten Widerstandsverteilung  $\rho(z)$  ist nicht-linear. BAILEY (1970) und WEIDELT (1972) haben gezeigt, wie die resultierende Umkehraufgabe direkt gelöst werden kann. Die Anwendung ihrer Lösungen auf unvollständige und mit Fehlern behaftete Übertragungsfunktionen stößt jedoch dann auf Schwierigkeiten, wenn wie im vorliegenden Falle  $C(\omega)$  nur für einen relativ beschränkten Frequenzbereich vorliegt.

Die Umkehraufgabe soll daher im Folgenden auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden. Die notwendige Linearisierung des 1-dimensionalen Induktionsproblems ist naturgemäß nur näherungsweise durchführbar, in dem man etwa schrittweise Verbesserungen einer vorgegebenen nullten Näherung von  $\rho(z)$  vornimmt. Ist  $C(\omega)$  die beobachtete und  $C'(\omega)$  die zur Näherung  $\rho'(z)$  gehörige Übertragungsfunktion, so läßt sich zwischen der Differenz  $\Delta C(\omega) = C(\omega) - C'(\omega)$  und der gesuchten Verbesserung  $\Delta\rho(z)$  ein linearer Zusammenhang dadurch herleiten, indem man die Wirkung differentieller Änderungen von  $\rho'(z)$  auf  $C(\omega)$  untersucht.

Mit diesem Ansatz hat PARKER (1970) die Ergebnisse der von BANKS (1969) vorgenommenen  $D_{st}$ -Analyse neu interpretiert. Erfahrungsgemäß ist aber die notwendige Wahl einer Ausgangsnäherung wegen der hohen Nichtlinearität des Problems bestimmend für das Endergebnis, d.h. es werden nur solche verbesserten Modelle gefunden, die in unmittelbarer Nähe des Ausgangsmodells liegen.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, wird eine von Näherungen unabhängige Linearisierung vorgenommen, die auf eine dem 1-dimensionalen Skineffekt in besonderer Weise angepaßten Wahl der Eingabefunktion und der Modellvariablen beruht.

Hierzu muß zunächst - wie bei der direkten Lösung von WEIDELT - die "wahre" Tiefe  $z$  auf eine reduzierte Tiefe.

$$\hat{z} = \int_0^z \sqrt{\rho_0 / \rho(\zeta)} d\zeta$$

transformiert werden;  $\rho_0$  ist eine willkürliche Konstante. Durch diese Transformation werden schlecht-leitende Tiefenbereiche komprimiert und gut-leitende Tiefenbereiche expandiert, so daß sich im reduzierten  $\hat{z}$ -Maßstab ein mehr oder weniger gleichförmiges Abklingen des Feldes für  $\hat{z} \rightarrow \infty$  ergibt.

Die transformierte Widerstandsverteilung  $\rho(\hat{z})$  wird bis zu einer Maximaltiefe  $\hat{z}_M = M \cdot \Delta\hat{z}$  durch  $(M-1)$  homogene Schichten gleicher Dicke  $\Delta\hat{z}$  angenähert. Bei der Rücktransformation in wahre Tiefen ergeben sich dann Schichten variabler Dicke  $\sqrt{\rho_m / \rho_0} \Delta\hat{z}$ , wenn  $\rho_m$  den spez. Widerstand der  $m$ -ten Schicht bezeichnet. Unterhalb

dieser Schichten liege ein homogenes Substratum mit dem spez. Widerstand  $\rho_M$ .

Es sei  $Z(\omega, \hat{z}) = i\omega\mu_0 C(\omega, \hat{z})$  die Impedanz eines von oben nach unten durch den geschichteten Leiter diffundierenden Feldes in der Tiefe  $\hat{z}$ . Für den Bereich der  $m$ -ten Schicht werde eine neue Übertragungsfunktion

$$\psi_m(\omega, \hat{z}) = 2 \ln \left\{ \sqrt{i\omega\mu_0 / \rho_m} C(\omega, \hat{z}) \right\}$$

eingeführt, die sich wegen der Stetigkeit von  $C$  an Schichtgrenzen unstetig ändert, und zwar um einen für alle Frequenzen gleichbleibenden Betrag:

$$\psi_{m+1}(\omega, \hat{z}_m) = \psi_m(\omega, \hat{z}_m) + \ln(\rho_m / \rho_{m+1}).$$

Andererseits ist die stetige Änderung von  $\psi_m$  innerhalb der Schichten für alle Schichten nahezu gleich und damit unabhängig von der Widerstandsverteilung:

$$\psi_m(\omega, \hat{z}_{m-1}) / \psi_m(\omega, \hat{z}_m) = \frac{\operatorname{ar} \tanh \{ \exp(-2\phi_m) + \gamma \}}{\operatorname{ar} \tanh \{ \exp(-2\phi_m) \}} \approx \gamma(\omega)$$

mit

$$\tanh \phi_m = K_m C(\omega, \hat{z}_m)$$

$$\gamma = \exp(-2\sqrt{i\omega\mu_0 / \rho_0} \Delta \hat{z}).$$

Für die Fortsetzung von Schichtgrenze zu Schichtgrenze gilt also näherungsweise

$$\psi_m(\omega, \hat{z}_{m-1}) = \gamma(\omega) \left[ \ln(\rho_{m+1} / \rho_m) + \psi_m(\omega, \hat{z}_m) \right]$$

und, da  $\psi_M$  im homogenen Substratum verschwindet, folgt daraus für den Oberflächenwert von  $\psi$  die Rekursionsformel

$$\psi_1(\omega, 0) = \gamma \ln(\rho_2 / \rho_1) + \gamma^2 \ln(\rho_3 / \rho_2) + \dots + \gamma^{M-1} \ln(\rho_M / \rho_{M-1}).$$

Damit ist die gewünschte lineare Beziehung zwischen einer beobachtbaren Eingabefunktion und einer Modellvariablen hergestellt.

In  $\Psi_1(\omega, 0)$  ist noch der unbekannte Widerstand der obersten Schicht enthalten. Zu seiner Elimination wählt man als einzugebende Datenfunktion

$$y(\omega) = \Psi_1(\omega, 0) + \ln(\rho_1/\rho_0),$$

deren Zusammenhang mit der Modellvariablen

$$x_m = \ln(\rho_m/\rho_0), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

durch einen näherungsweise linearen, von  $x_m$  unabhängigen Datenkern  $g_m(\omega)$  gegeben ist:

$$y(\omega) = \sum_m g_m(\omega) x_m$$

mit  $g_m(\omega) = (1-\gamma)\gamma^{m-1} \quad m = 1, 2, \dots, M-1$

$$g_M(\omega) = \gamma^{M-1}.$$

Hat man auf diesem oder jenem Wege ein zu  $y(\omega)$  passendes geschichtetes Widerstandsmodell gefunden, so lassen sich zu diesem Modell gehörige, verbesserte Datenkerne berechnen, mit denen die Rechnung wiederholt wird. Erfahrungsgemäß erhält man bei wiederholter Anwendung dieses Verfahrens eine rasch konvergierende Lösung, sofern das Widerstandsverhältnis zwischen benachbarten Schichten 1:100 nicht übersteigt ( $x_m \lesssim 5$  für alle  $m$ ). Bei der iterativen Verbesserung des Datenkerns können auch zugleich Erdkrümmung und Inhomogenität des äußeren Feldes berücksichtigt werden, indem man zur Bestimmung der Impedanz im Innern des Leiters die Rekursionsformeln für eine geschichtete Kugel benützt, an deren Oberfläche das Potential des äußeren Feldes durch eine Kugelflächenfunktion des gewählten Grades beschrieben wird.

Für die praktische Durchführung der Rechnung soll die Datenfunktion  $y(\omega)$  durch Wertepaare für die diskreten Frequenzen  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2 \dots N$ , wiedergegeben werden. Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} y_n = y(\omega_n) &= 2 \ln\{\sqrt{i\omega_n \mu_0 / \rho_0} C(\omega_n)\} \\ &= \ln\{\rho_a(\omega_n) / \rho_0\} + 2i\{\phi(\omega_n) - \frac{\pi}{4}\} \end{aligned}$$

mit  $\rho_a = \omega \mu_0 |C|^2$  als scheinbarer spez. Widerstand im Sinne von Cagniard und  $\phi$  als Phase der Impedanz.

Zur Bestimmung der  $M$  Modellparameter stehen somit  $N$  lineare Gleichungen mit komplexen Koeffizienten zur Verfügung, deren rechte Seiten von den komplexen Datenwerten  $y_n$  gebildet werden. Das Gleichungssystem sei in der Form

$$y = G x$$

geschrieben mit  $y = (y_n)$  als Datenvektor,  $x = (x_m)$  als Modellvektor und  $G = (g_{nm})$  als Datenkernmatrix;  $g_{nm} = g_m(\omega_n)$ .

Um das Gleichungssystem in der vorliegenden Form nach  $x$  aufzulösen, müßte man eine der Zahl der Daten entsprechende Zahl von Schichten wählen, d.h.  $M = 2N$  setzen. Dieser direkte Weg führt aber bei der Verwendung von empirischen, mit Fehlern behafteten Daten zu stark oszillierenden Modellverteilungen. Ihre aus den Datenfehlern abgeleitete Unsicherheit ist außerdem so groß, daß die resultierenden Modelle praktisch unbrauchbar sind.

Um eine sinnvolle, d.h. mit tragbaren Fehlern behaftete Auskunft über die Widerstandsverteilung zu erhalten, ist es notwendig entweder eine Glättung der Daten oder aber eine Glättung der Modellverteilung vorzunehmen. Im ersten Fall wird ein aus relativ wenigen Schichten bestehendes Modell gewählt ( $M < N$ ), das die Daten im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut erklärt. Im zweiten Fall werden z.B. nach dem Verfahren von Backus und Gilbert Mittelwerte der logarithmischen Widerstandsverteilung  $\ln\{\rho(z)/\rho_0\}$  für ein beliebig fein unterteiltes Modell berechnet, wobei die Mittelungsbreite als Funktion der Tiefe einem vorgegebenen Fehler des Modells angepaßt werden kann.

### 6. Interpretation durch Ausgleichsrechnung

Es sei

$$\epsilon = (\epsilon_n) = y - G x$$

der Differenzenvektor zwischen dem beobachteten und dem für den Modellvektor  $x$  berechneten Datenvektor. Die Modellparameter  $x_m$  sollen so bestimmt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate  $\epsilon_n \epsilon_n^*$  ein Minimum ist. Das resultierende System von  $M$  Normalgleichungen lautet in Matrixschreibweise  $G^+ G x = G^+ y$  mit  $G^+ = (g_{mn}^*)$  als der zu  $G$  adjungierten Matrix. Führt man nun zur Berechnung von  $x$  aus  $y$  eine Lösungsmatrix  $H = (h_{mn})$  ein, setzt man also

$$x = (G^+ G)^{-1} G^+ y = H y,$$

so erlauben die Elemente von  $H$  zugleich die Berechnung der Varianzen  $\delta x_m^2$  der Modellparameter aus den Varianzen  $\delta y_n^2$  der Eingabedaten. Man erhält

$$\delta x_m^2 = \sum_n h_{mn}^2 \delta y_n^2,$$

wenn die Datenfehler  $\Delta y_{n\ell}$  individueller Messungen  $\ell = 1, 2, \dots, L$  von  $y_n$  nicht korreliert sind. Damit ist gemeint, daß die Produkte  $\Delta y_{n\ell} \Delta y_{\hat{n}\ell}$  im Mittel über alle Messungen verschwinden, wenn  $n \neq \hat{n}$  ist.

Die Modellrechnung enthält in der vorliegenden Form zwei frei wählbare Parameter, die Zahl der Schichten  $M$  und die reduzierte Schichtdicke  $\Delta \hat{z}$ . Für ein festes  $M$  soll nun eine optimale Schichtdicke  $\Delta \hat{z}$  in der Weise bestimmt werden, daß die Anpassung von berechneten und beobachteten Werten von  $y_n$  möglichst gut ist. Zu diesem Zweck wird  $\Delta \hat{z}$  in einem genügend großen Intervall schrittweise variiert und zu jedem Modell das mittlere Fehlerquadrat

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{N} \sum_n \epsilon_n \epsilon_n^*$$

als Maß für die Güte der Anpassung berechnet. Das Minimum der Kurve  $\bar{\epsilon}(\Delta \hat{z})$ , sofern es in dem gewählten Intervall eindeutig festlegbar ist, ergibt die Schichtdicke optimaler Anpassung für die gewählte Zahl von Schichten (Fig.7).

Im vorliegenden Fall ist  $N = 5$ , d.h. es können 1-bis 4-Schichtenmodelle berechnet werden (Fig.8). Für  $M = 1$  erhält man einen homogenen Halbraum von  $(30 \pm 2) \Omega\text{m}$  mit  $\bar{\epsilon} = 0.6$ . Die entscheidende Verbesserung der Anpassung auf  $\bar{\epsilon} = 0.14$  wird mit einer Unterteilung in zwei Schichten erreicht mit einer reduzierten Dicke von 825 km der Deckschicht. Diese Anpassung entspricht nach der Definition von  $y_n$  entweder einer mittleren Anpassung in  $\rho_a$  auf  $\pm 14\%$  oder einer mittleren Anpassung in der Phase der Impedanz auf  $\pm 8^\circ$ .

Beim Übergang auf drei Schichten ergibt sich bei der Festlegung der optimalen Schichtdicke die Schwierigkeit, daß in der  $\bar{\epsilon}(\Delta z)$ -Kurve ein relatives Minimum bei  $\hat{\Delta z} = 525$  km und ein absolutes Minimum bei 900 km auftritt. Die zugehörigen 3-Schichtenmodelle sind in Fig.9 nebeneinander dargestellt. Das zum relativen Minimum  $\bar{\epsilon} = 0.15$  gehörige Modell  $M3_1$  besitzt eine Zwischenschicht mit einem nur leicht gegenüber der Deckschicht reduzierten Widerstand von  $(20 \pm 8) \Omega\text{m}$ . Das zum absoluten Minimum  $\bar{\epsilon} = 0.12$  gehörige Modell  $M3_2$ , das eine wirkliche Verbesserung gegenüber dem 2-Schichtenmodell darstellt, ist durch eine Zwischenschicht ausgezeichnet, die mit  $0.1 \Omega\text{m}$  besser leitend ist als die Deckschicht und das Substratum. Im wahren Tiefenmaßstab wird diese Zwischenschicht zu einem dünnen, weniger als 50 km mächtigen guten Leiter in 900 km Tiefe zwischen einem oberen Erdmantel von  $50 \Omega\text{m}$  und einem unteren Erdmantel von  $3 \Omega\text{m}$  (Fig.12).

Vergleicht man die zu  $M3_1$  und  $M3_2$  gehörigen theoretischen  $(\rho^x - z^x)$ -Werte mit den empirischen Werten (Fig.6), so zeigt sich, daß beide Modelle die Sq-Datengleichermassen gut erklären. Der entscheidende und die Größe von  $\bar{\epsilon}$  bestimmende Unterschied besteht darin, daß durch die Einschaltung der gutleitenden Zwischenschicht in Modell  $M3_2$  die im Vergleich zu Sq-1 cpd auffallend geringe Eindringtiefe für  $D_{st} - 0.05$  cpd richtig erklärt wird.

Wählt man die nach diesem Verfahren höchstmögliche Zahl von vier Schichten, so erscheint eine zweite Übergangsschicht von  $3 \Omega\text{m}$  zwischen  $z = 750$  und  $950$  km. Der spez. Widerstand des in etwa 1000 km Tiefe beginnenden Substratums erhöht sich auf  $10 \Omega\text{m}$ .

Die Fehlergrenzen für  $\ln \rho_m / \rho_0$  nehmen mit wachsender Zahl der



Schichten zu. Wie zu erwarten, sind dabei die relativen Fehler für den spez. Widerstand des Substratum am größten. Man kann dieses Ergebnis in der Weise interpretieren, daß eine Erhöhung des Auflösungsvermögens durch Vergrößerung der Zahl der Schichten stets auf Kosten der Genauigkeit geht, mit der die Modellparameter der einzelnen Schichten angegeben werden können.

### 7. Interpretation nach dem Verfahren von Backus und Gilbert

Die kontinuierliche Modellverteilung  $\rho(\hat{z})$  soll durch eine Vielzahl von Schichten so gut angenähert werden, daß die gewählte Dicke  $\Delta\hat{z}$  der Einzelschichten das Ergebnis der Modellrechnung nicht mehr beeinflußt. Das Gleichungssystem  $y = Gx$  ist dann in Bezug auf  $x$  stark unterbestimmt, so daß zur Lösung eine Glättung der Modellparameter  $x_m$  vorgenommen werden muß. Es sei

$$\bar{x}_k = \sum_m A_{km} x_m \quad k = 1, 2, \dots, M$$

der gemittelte Modellparameter für die Tiefe  $\hat{z}_k = \Delta\hat{z} \cdot (k - \frac{1}{2})$  der  $k$ -ten Schicht;  $A_{km}$  ist eine auf eins normierte Gewichtsfunktion ( $\sum_m A_{km} = 1$ ), deren Maximalwerte in unmittelbarer Nähe der Tiefe  $\hat{z}_k$  liegen sollen. Die Ausdehnung desjenigen Tiefenbereichs, über den  $\rho(\hat{z})$  zur Gewinnung von  $\bar{x}_k$  gemittelt wird, soll durch eine Mittlungsbreite

$$\Delta_k = \Delta\hat{z} \sum_m A_{km}^2 J_{km}$$

charakterisiert werden, wobei  $J_{km}$  eine mit wachsendem "Abstand"  $|k-m|$  rasch zunehmende, doch sonst frei wählbare zweite Gewichtsfunktion darstellt. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen,  $J_{km} = \{(k-m)^2 + 1\} \cdot 12$  zu setzen (s. PARKER, 1970).

Die Koeffizienten  $A_{km}$  aller Schichten werden zu einer quadratischen Glättungsmatrix  $A = (A_{km})$  zusammengefaßt, die geglätteten Modellparameter zu einem Modellvektor  $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ . Es läßt sich zeigen, daß die Elemente von  $A$  durch eine lineare Operation aus den

Elementen der Datenkernmatrix G aufgebaut werden können:

$$A_{km} = \sum_n h_{mn} g_{nm} \text{ oder}$$

$$A = H G.$$

Die so definierte Matrix  $H = (h_{mn})$  stellt zugleich die Lösungsmatrix für die gesuchte geglättete Modellverteilung dar, denn wie aus der Definition von H unmittelbar folgt gilt

$$\bar{x} = Ax = HGx = Hy.$$

Für den mittleren quadratischen Fehler  $(\delta\bar{x}_k)^2$  erhält man wie schon im Falle der Ausgleichrechnung für unkorrelierte Datenfehler

$$(\delta\bar{x}_k)^2 = \sum_n h_{kn}^2 \delta y_n^2.$$

Die Gewichtsfunktionen  $A_{km}$  der k-ten Schicht sollen so beschaffen sein, daß sich für den vorgegebenen Datenkern und die gewählte Gewichtsfunktion  $J_{km}$  eine minimale Mittlungsbreite  $\Delta_k$  ergibt. Die Lösung dieser Extremwertaufgabe mit der Zusatzbedingung  $\sum_m A_{km} = 1$  liefert ein System von Normalgleichungen zur Bestimmung der Elemente der Lösungsmatrix und damit der geglätteten Modellparameter selbst. Bei der Verwendung von empirischen, mit Fehlern behafteten Daten ergeben sich aber bei dieser Rechnung oszillierende Modellverteilungen mit untragbar großen Modellfehlern  $\delta\bar{x}_k$ . Man muß daher zur Erzielung brauchbarer Modelle stärker glätten und nicht  $\Delta_k$  allein, sondern eine lineare Kombination von  $\Delta_k$  und  $\delta\bar{x}_k$  minimieren. Bezeichnet w einen Gewichtungsfaktor zwischen Null und eins, so lautet der zur Bestimmung der  $h_{mn}$  zu minimierende Ausdruck nunmehr

$$w\Delta_k + (1 - w)\delta\bar{x}_k.$$

Der bereits behandelte Grenzfall  $w = 1$  ergibt minimale Mittlungsbreiten und maximale Modellfehler, der Grenzfall  $w = 0$  maximale Mittlungsbreiten und minimale Modellfehler. Im zweiten Grenzfall sind zudem  $\bar{x}_k$  und  $\delta\bar{x}_k$  für alle Schichten gleich, d.h. der Fall maximaler Glättung liefert einen homogenen Halbraum ent-

sprechend dem Fall  $M = 1$  bei der Ausgleichsrechnung. Dieses besondere Ergebnis für  $w = 0$  beruht auf der Tatsache, daß im vorliegenden Fall die Datenkerne selbst normiert sind ( $\sum_m g_{nm} = 1$ , s. Abschnitt 5).

Das hier wiedergegebene Backus-Gilbert-Verfahren ist erstmals von PARKER (1972) auf das 1-dimensionale Induktionsproblem angewandt worden, allerdings mit einem anderen Ansatz zur Gewinnung linearer Datenkerne (s. Abschnitt 5). Der besondere Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der Ausgleichsrechnung besteht darin, daß das Auflösungsvermögen der Modellrechnung in Form der Mittlungsbreite  $\Delta_k$  als eine kontinuierliche Funktion der Tiefe untersucht werden kann.

Zur Anwendung auf die vorliegenden Daten ( $y_n$  für vier Sq- und eine  $D_{st}$ -Frequenz) wurde  $\hat{\Delta}z = 100$  km und  $M = 20$  gewählt. Die resultierende Maximaltiefe  $\hat{z}_M = M \hat{\Delta}z$  kann als genügend groß gegenüber der Eindringtiefe für die  $D_{st}$ -Frequenz angesehen werden und eine feinere Unterteilung des Modells brachte keine wesentliche Änderung der Ergebnisse. Die aus den Datenkernen und Datenfehlern berechneten Mittlungsbreiten  $\Delta$  sind in Fig. 10 für verschiedene Werte des Modellfehlers  $\delta\bar{x}$  als Funktion der reduzierten Tiefe gezeigt. Die stark ausgezogenen Kurven  $\delta\bar{x} = \text{const.}$  stellen die Grenzfälle maximaler und minimaler Glättung dar. Zur Interpretation der Daten wird man diese Grenzfälle vermeiden und eine günstig erscheinende Kombination von Modellfehler und Mittlungsbreite wählen.

Es erwies sich als zweckmäßig,  $\delta\bar{x}_k$  fest vorzugeben und eine von Schicht zu Schicht variierende Mittlungsbreite zu verwenden. Für  $\hat{z} \leq 600$  km wurde  $\delta\bar{x}_k = 0.2$  gewählt entsprechend einem relativen Fehler von 20% in  $\rho$ , für  $\hat{z} \geq 700$  km  $\delta\bar{x}_k = 0.5$  entsprechend einem relativen Fehler von etwa 50% ( $x = \ln \rho_k / \rho_0$ ,  $\delta x_k \approx \delta \rho_k / \rho_k$ ). Für diese Fehler ergeben sich Mittlungsbreiten von 300-400 km bis  $\hat{z} = 800$  km. Unterhalb dieser Tiefe wächst  $\Delta_k$  rasch auf Werte über 1000 km. Eine Übertragung dieser Mittlungsbreiten auf wahre Tiefen wird in Fig. 11 und 12 gezeigt.

Die zur Rechnung verwandten Datenkerne sind nicht wie bei der Ausgleichsrechnung iterativ verbessert worden, sondern es wurden die

zu den 3-Schichten Modellen  $M3_1$  und  $M3_2$  gehörigen Datenkerne verwandt. Diese Wahl eines Ausgangsmodells hatte keinen Einfluß auf die Mittlungsbreiten und Modellfehler, wohl aber auf die resultierende Modellverteilung  $\bar{x}_k$ . Das Backus-Gilbert-Verfahren scheint im vorliegenden Fall nur eine Glättung des Ausgangsmodells liefern zu können ohne seine Charakteristiken zu verändern.

Das zu Modell  $M3_1$  gehörige geglättete Modell  $\bar{x}_k$  ist durch einen mehr oder weniger konstanten mittleren Widerstand von 50  $\Omega$ m bis 600 km Tiefe ausgezeichnet. Zwischen 600 und 800 km folgt eine Reduktion auf 10  $\Omega$ m mit einem sich anschließenden Abfall auf 1  $\Omega$ m (Fig.11). Wird hingegen das Modell  $M3_2$  mit einer gutleitenden Zwischenschicht zum Ausgangsmodell gewählt, so bleibt diese Zwischenschicht auch in der geglätteten Verteilung erhalten (Fig.12). Das Backus-Gilbert-Verfahren kann hier also nicht eine über die Ergebnisse der Ausgleichsrechnung hinausgehende Information geben. Es ermöglicht lediglich eine kontinuierliche Berechnung von Mittelwerten der wahren Widerstandsverteilung, so daß die bei der Ausgleichsrechnung starren Begrenzungen der Mittlungsbereiche in Form von Schichtgrenzen entfallen.

## 8. Schlußbemerkung

Die ersten zuverlässigen Angaben über die Widerstandsverteilung im oberen Mantel finden sich in den Arbeiten von Chapman und Price. Sie wurden zusammengefaßt in den Modellrechnungen von LAHIRI und PRICE (1939). Ihre den Bereich möglicher Verteilungen abgrenzenden Modelle (d) und (e) waren so gewählt, daß der innere Anteil für die 2. Harmonische des Sq-Ganges und der innere  $D_{st}$ -Anteil für die ersten 72 Stunden nach Sturmbeginn richtig erklärt wurde. In Modell (d) nimmt der Widerstand mit zunehmender Tiefe kontinuierlich ab, und zwar von 200  $\Omega$ m an der Oberfläche auf 1  $\Omega$ m in 1000 km Tiefe. In Modell (e) wird der obere Mantel bis 600 km Tiefe als Isolator betrachtet, unterhalb dieser Tiefe als idealer Leiter. Beide Modelle enthielten außerdem dünne Deckschichten relativ hoher integrierter Leitfähigkeit.

Das Modell (e) ist später von Rikitake (s. RIKITAKE, 1966) in der Weise modifiziert worden, daß der Sprung auf niedrige, aber nunmehr endliche Widerstände in eine Tiefe von 400 km Tiefe verlegt wurde, und zwar vermutlich in Anlehnung an die seismische  $20^\circ$ -Diskontinuität. Dadurch wurde der innere Anteil von  $D_{st}$  etwas besser erklärt, der innere Anteil von  $Sq$  jedoch wesentlich schlechter.

Durch die Analysen der langperiodischen  $D_{st}$ -Modulation von ECKHARDT et al. (1963) und BANKS (1969) wurde es erstmals möglich, die Widerstandsverteilung bis zu Tiefen von 2000 km im Detail zu verfolgen. Die von Banks und später von PARKER (1970) entwickelten Modelle sind jedoch reine  $D_{st}$ -Modelle, die den inneren Anteil von  $Sq$  nur unvollkommen wiedergeben. BANKS (1972) hat in einer späteren Arbeit seine ursprünglichen Modelle in den oberen Bereichen noch etwas verändert, um eine bessere Anpassung an die  $Sq$ -Daten von Chapman (s. CHAPMAN und BARTELS, 1940; S.692) erhalten. Es blieb jedoch eine große Unsicherheit für den Tiefenbereich bis 400 km, für den BANKS eine untere Grenze von  $15 \Omega m$  und eine obere Grenze von  $1000 \Omega m$  angibt. PARKER erhält aus den Banks'schen Daten für den ganzen oberen Mantel mittlere spez. Widerstände von weniger als  $10 \Omega m$ , allerdings bei einer Mittlungsbreite von 500 km.

Die in Fig.11 und 12 gezeigten Modelle stellen einen Versuch dar,  $Sq$  und  $D_{st}$ -Daten gemeinsam zu interpretieren, und zwar unter Berücksichtigung von vier  $Sq$ -Frequenzen gegenüber nur einer  $D_{st}$ -Frequenz. Die Modelle sind in erster Linie als kontinentale  $Sq$ -Modelle zu verstehen. Sie zeigen, daß der mittlere spez. Widerstand des oberen Erdmantels bis zu einer Tiefe von 600 km zwischen 40 und  $50 \Omega m$  liegt bei einer Mittlungsbreite von 300 bis 400 km. Eine Verbesserung dieses relativ schlechten Auflösungsvermögens ließe sich vermutlich nur durch die Verwendung zusätzlicher  $Sq$ -Frequenzen erreichen. Es kann jedoch als gesichert gelten, daß der spez. Widerstand bis zu der genannten Tiefe weder eine kontinuierliche noch eine sprunghafte Reduktion erfährt.

Die gutleitende Zwischenzone in 700 km Tiefe, die in den von Modell  $M3_2$  abgeleiteten Widerstandsverteilungen auftritt (Fig.12)

ist jedoch mit Zurückhaltung zu betrachten. Sie beruht einzig und allein auf der relativ geringen Erhöhung der Eindringtiefen sowie auf der sprunghaften Reduktion der Phasen beim Übergang von der ersten Sq-Harmonischen zu den langperiodischen  $D_{st}$ -Variationen. Hier fehlen sichere Daten für  $D_{st}$  im Frequenzbereich von 1 bis 0.1 cpd, d.h. für die eigentliche Nachphase magnetischer Stürme.

Für Tiefen unterhalb von 800 km nimmt die Aussagekraft der analysierten Daten rasch ab. Es ergeben sich mittlere Widerstände zwischen 0.5 und 5  $\Omega$ m mit einem relativen Fehler von 50% bei Mittlungsbreiten von weit über 500 km. Diese Werte passen in die von Banks und Parker entwickelten Modelle für den tieferen Erdmantel.

#### Literatur

- BAILEY, R.C.: Inversion of the geomagnetic induction problem. Proc. R. Soc. London (A), 315, 185-194, 1970.
- BANKS, R.J.: Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle. Geophys. J., 17, 457-487, 1969.
- CHAPMAN, S., PRICE, A.T.: The electric and magnetic state of the interior of the earth, as inferred from terrestrial magnetic variations. Phil. Trans. R. Soc. London (A), 229, 427-460, 1930.
- CHAPMAN, S., BARTELS, J.: Geomagnetism. Oxford University Press 1940.
- ECKHARDT, D., LARNER, K., MADDEN, T.: Long period magnetic fluctuations and the mantle electrical conductivity estimates. J. Geophys. Res., 68, 6279-6286, 1963.
- LAHIRI, B.N., PRICE, A.T.: Electromagnetic induction in non-uniform conductors, and the determination of the conductivity of the Earth from terrestrial magnetic variations. Phil. Trans. R. Soc. London (A), 237, 509-540, 1939.
- PARKER, R.L.: The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. Geophys. J., 22, 121-138, 1971.

RIKITAKE, T.: Electromagnetism and the Earth's interior.

Elsevier Amsterdam, 1966.

WEIDELT, P.: The inverse problem of geomagnetic induction.

Z. f. Geophysik, 38, 257-289, 1972.

Anhang

Harmonische Schwingungen  $H(t) = H_0 \cos(\omega t + \delta_H)$  und  $D(t) = D_0 \cos(\omega t + \delta_D)$  der orthogonalen Komponenten H und D des erdmagnetischen Feldes lassen sich zu einer elliptisch polarisierten Schwingung zusammenfassen. Es soll der Winkel  $\psi$  bestimmt werden, den die Hauptachsen der Schwingungsellipse mit den Koordinatenachsen bilden. Ist  $\text{tg} \alpha = H_0/D_0$  und  $\delta = \delta_H - \delta_D$ , so gilt  $\text{tg} 2\psi = \text{tg} 2\alpha \cdot \cos \delta$ . Die Phasendifferenz der auf die Hauptachsenrichtungen transformierten Komponenten beträgt  $\pm 90^\circ$  wie es für die Transformation auf Sq-effektive Koordinaten gefordert wird (s. z.B. G. JOOS, Lehrbuch der theoretischen Physik, 1952).

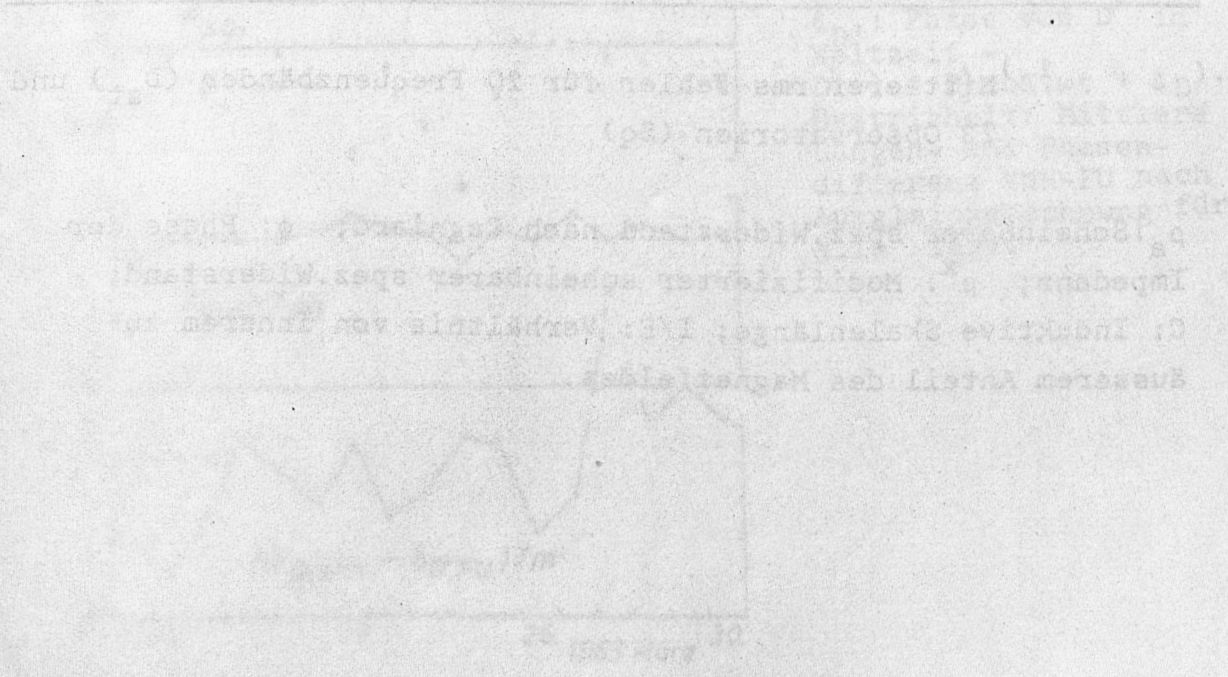


Tabelle 1: Übertragungsfunktionen für  $D_{st}$ - und  $Sq$ -variationen.  $D_{st}$ : Berechnet nach Daten von ECKHARDT et al. (1963) für Tuscon/Arizona.  $Sq$ : Berechnet aus den äquinoktialen  $Sq$ -Gängen an 23 kontinentalen Observatorien (s. Abschnitt 2)

Frequenz cpd	$\rho_a$ $\Omega m$	$\phi$ Grad	$\rho^x$ $\Omega m$	C km		I/E		I/E (Chapman)
0.05 $D_{st}$	4.5	72	0.9	950	i310	0.30+i0.06		
	<u>+ 4<sup>1.)</sup></u>	18		510	435	0.07	0.10	
0.10	6.1	67	1.9	750	320	0.34	0.06	
	<u>+4</u>	14		370	400	0.06	0.08	
1 $Sq$	45	61	21	610	340	0.39	0.13	0.35+i0.09
	<u>+14</u>	11		90	130	0.03	0.02	
2	68	52	51	480	370	0.40	0.20	0.44 0.14
	<u>+16</u>	11		60	120	0.02	0.07	
3	61	51	48	370	300	0.43	0.22	0.38 0.15
	<u>+17</u>	12		80	100	0.03	0.08	
4	52	52	39	300	230	0.45	0.21	0.35 0.18
	<u>+17</u>	14		80	70	0.05	0.09	

1.) Mittlerer rms Fehler für 20 Frequenzbänder ( $D_{st}$ ) und 23 Observatorien ( $Sq$ )

$\rho_a$ : Scheinbarer spez. Widerstand nach Cagniard;  $\phi$ : Phase der Impedanz;  $\rho^x$ : Modifizierter scheinbarer spez. Widerstand; C: Induktive Skalenlänge; I/E: Verhältnis von innerem zu äusserem Anteil des Magnetfeldes.



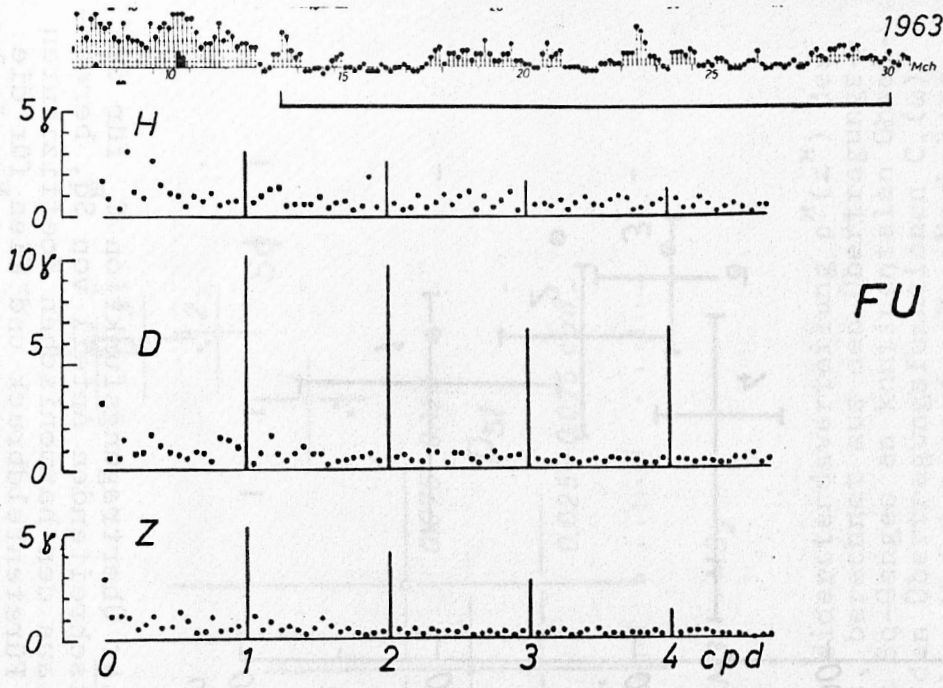


Fig.1: Amplitudenspektrum für eine Folge von 17 ruhigen Tagen, berechnet aus den Stundenmitteln des Observatoriums Fürstenfeldbruck (FU). Der Sq-Gang in D und Z ist bei der gegebenen Frequenzauflösung von 1/17 cpd (Zyklen pro Tag) durch scharfe Linien gekennzeichnet.

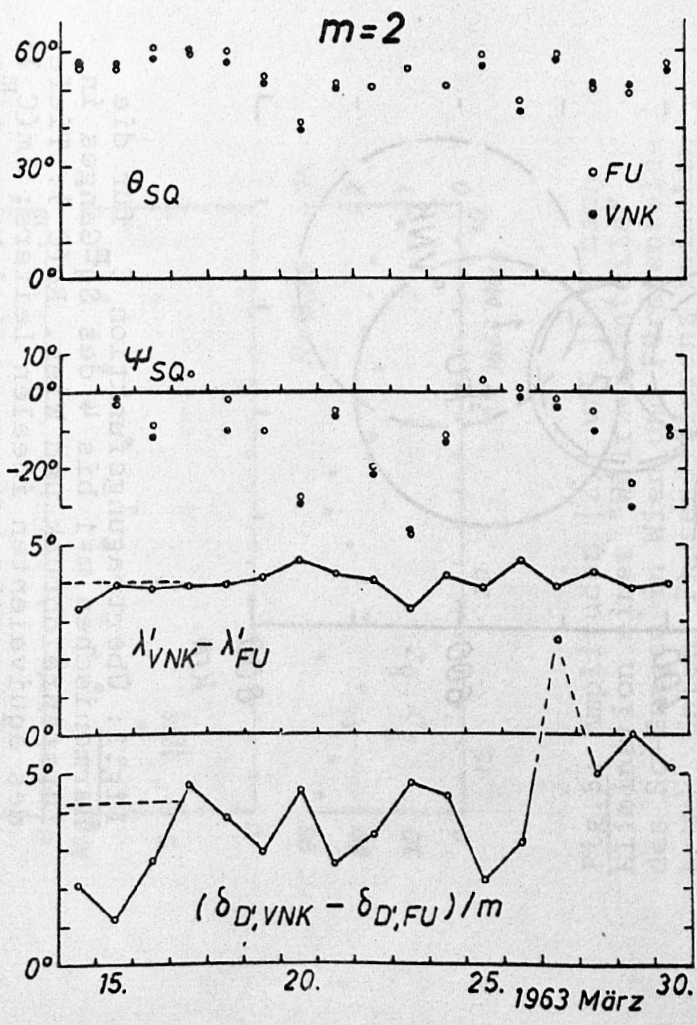


Fig.2: Sq-effektive Koordinaten von Fürstenfeldbruck (FU) und Wien (VNK) für die 2. Harmonische an den in Fig.1 gezeigten ruhigen Tagen.  $\theta_{SQ}$ : Ko-Breite;  $\psi_{SQ}$ : Meridianrichtung;  $\lambda'$ : Länge (Sq-eff.);  $\delta_{D'}$ : Phase von  $D'$  in Weltzeit -  $D(t) = D' \cdot \cos(\omega t + \delta_{D'})$ . Gestrichelt: Mittlere Längen- und Phasendifferenz VNK-FU nach Ausgleichsrechnung für alle Tage.

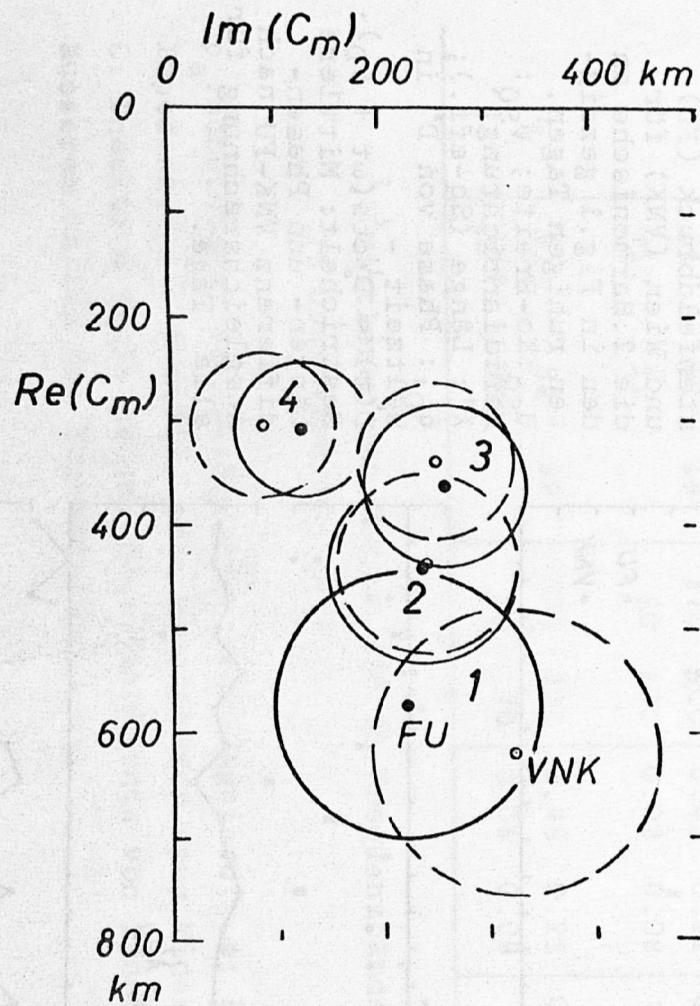


Fig. 3: Übertragungsfunktion  $C_m$  für die Harmonischen  $m=1$  bis 4 des  $Sq_m$ -Ganges in Fürstenfeldbruck und Wien.  $Re(C_m)$ : Tiefe des äquivalenten idealen Leiters;  $Im(C_m)$ : Halbe Skintiefe für den scheinbaren spez. Widerstand in der Tiefe  $Re(C_m)$ . Ausgleichsrechnung mit den Fourier-Koeffizienten der in Fig. 1 gezeigten 17 ruhigen Tagen.

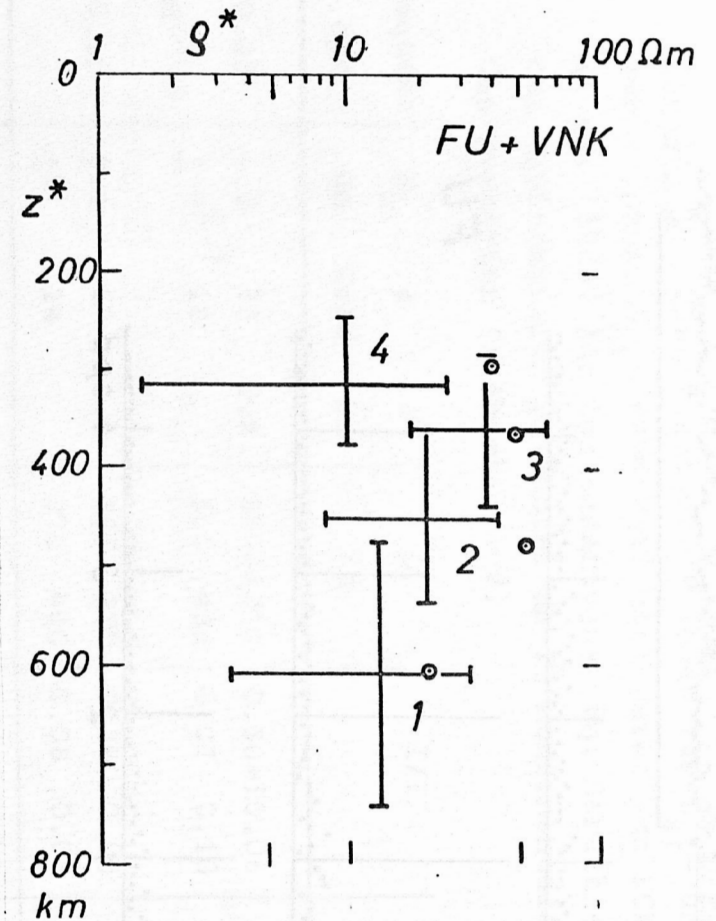


Fig. 4: Übertragungsfunktion  $C_m$  für den fortschreitenden Anteil von  $Sq$ , berechnet aus den harmonischen Koeffizienten von Fürstenfeldbruck und Wien für die in Fig. 1 gezeigten 17 Tage.  $z^* = Re[C_m]$ ,  $\rho^* = 2\omega\mu_0 (Im[C_m])^2$ . Zum Vergleich: Kontinentale Mittelwerte (Kreise) für  $z^*$  und  $\rho^*$  (s. Fig. 6).

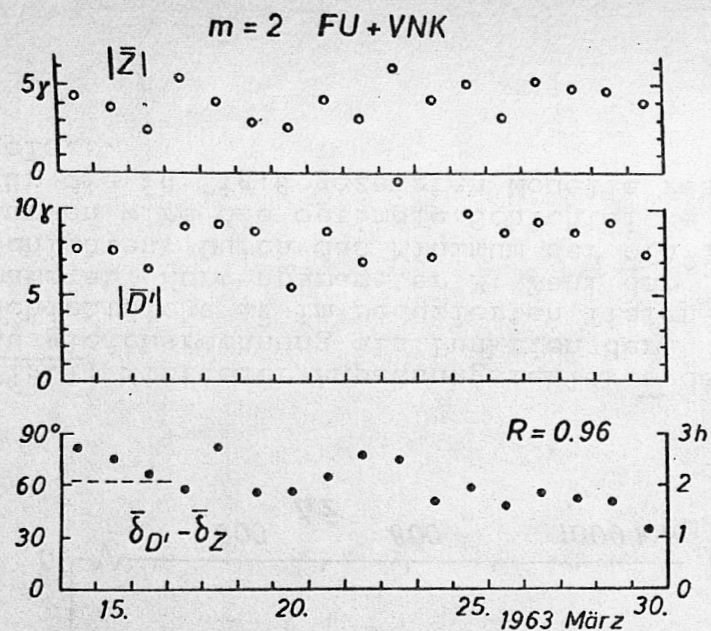


Fig.5: Amplituden  $|\bar{Z}_2|$  und  $|\bar{D}_2'|$  nach Elimination eines "Weltzeitanteils" des Sq-Ganges in Wien und Fürstenfeldbruck. Unten: Phasendifferenz zwischen  $Z_2$  und  $D_2'$  an individuellen Tagen und im Mittel (gestrichelt) über alle Tage (=Argument des Kreuzspektrums zwischen  $Z_2$  und  $D_2'$ ). R: Kohärenz.

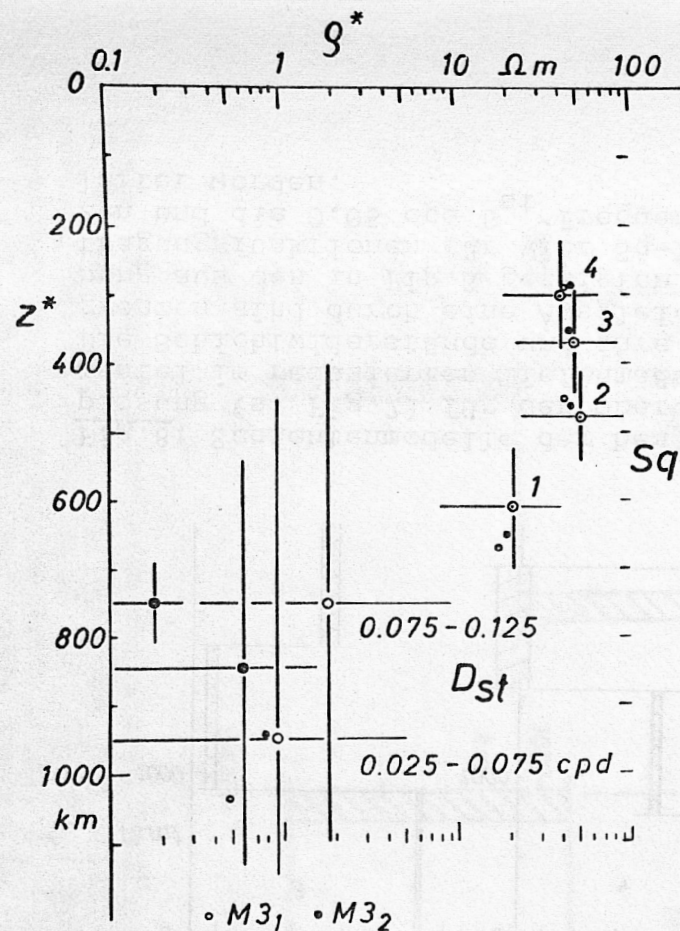


Fig.6: Scheinbare Widerstandsverteilung  $\rho^*(z^*)$  des oberen Erdmantels, berechnet aus den Übertragungsfunktionen  $C^m$  des Sq-Ganges an kontinentalen Observatorien und  $^m$  aus den Übertragungsfunktionen  $C_1(\omega)$  der langperiodischen Modulation der  $D_{st}$ -Nachphase magnetischer Stürme. Geschlossene Kreise;  $D_{st}$ -Analyse von BANKS (1969). Offene Kreise;  $D_{st}$ -Analyse von ECKHART et al. (1963) für Tuscon.  $M3_1$  und  $M3_2$ ; Theoretische  $\rho^*$ - $z^*$  Werte für 3-Schalenmodelle in Fig.9. Zahlenwerte in Tabelle 1.

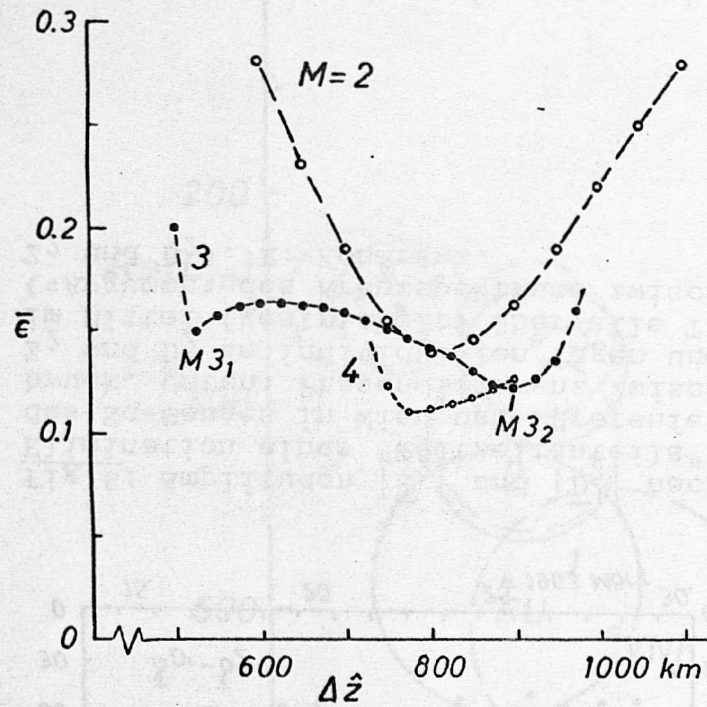


Fig. 7; Mittlerer Anpassungsfehler  $\bar{\epsilon}$  der Ausgleichsrechnung als Funktion der Schichtdicke  $\Delta \hat{z}$  im reduzierten Tiefenmaßstab. Kurvenparameter M; Zahl der Schichten. Durch das Minimum der  $\bar{\epsilon}(\Delta \hat{z})$ -Kurven wird die optimale Schichtdicke für die in Fig. 8 gezeigten Modelle festgelegt.

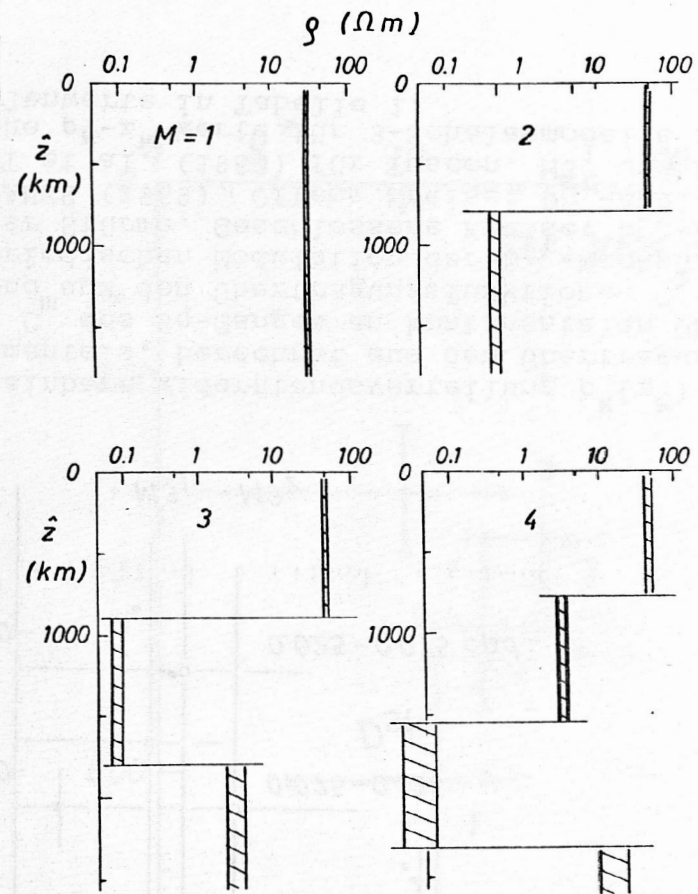


Fig. 8; Schichtenmodelle der besten Anpassung (s. Fig. 7) für den oberen Erdmantel im reduzierten Tiefenmaßstab. Die Schichtwiderstände und ihre Fehlergrenzen sind durch eine Ausgleichsrechnung aus den in Fig. 6 gezeigten Übertragungsfunktionen für vier Sq-Frequenzen und die 0.05 cpd  $D_{st}$ -Frequenz abgeleitet worden.

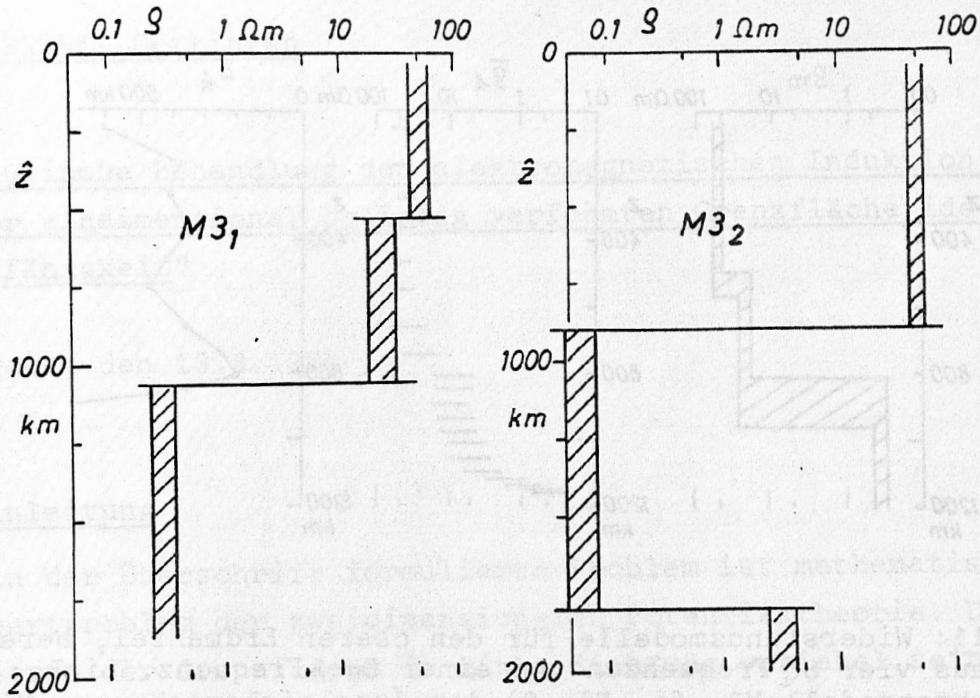


Fig.9: 3-Schichtenmodelle des oberen Erdmantels im reduzierten Tiefenmaßstab.  $M3_1$ : Schichtdicke für relatives Minimum der Anpassung bei  $\Delta \hat{z} = 525$  km ( $\bar{\epsilon} = 0.14$ ).  $M3_2$ : Schichtdicke für beste Anpassung bei  $\Delta \hat{z} = 925$  km ( $\bar{\epsilon} = 0.12$ ). S.  $\bar{\epsilon}(\Delta \hat{z})$ -Kurve für  $M = 3$  in Fig.7. Übertragung auf wahre Tiefen in Fig.11 und 12.

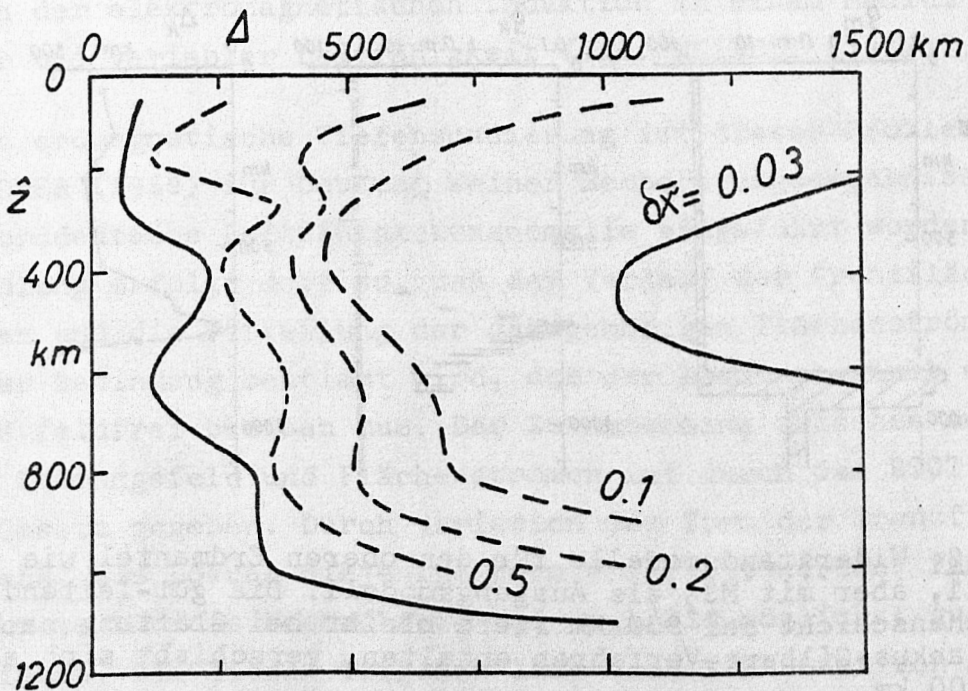


Fig.10: Mittelungsbreite  $\Delta$  als Funktion der reduzierten Tiefe  $\hat{z}$ , berechnet aus den Datenkernen und mittleren Fehlern der  $S_q$ - und  $D_{st}$ -Daten von Fig.6 nach dem Backus-Gilbert Verfahren. Kurvenparameter: Mittlerer Fehler des Modellparameters  $\ln(\rho(\hat{z})/\rho_0)$ ;  $\bar{\delta x} = 0.2$  entspricht also einer Unsicherheit der Widerstandsbestimmung von 20%. Ausgezogene Kurven: Minimale ( $w=1$ ) und maximale ( $w=0$ ) Mittelungsbreiten. Die in Fig.11 und 12 gezeigten Modelle sind für  $\bar{\delta x} = 0.2$  bis  $\hat{z} = 600$  km und  $\bar{\delta x} = 0.5$  für  $\hat{z} > 600$  km berechnet worden, um Mittelungsbreiten von 400 km im reduzierten Tiefenmaßstab zu erhalten.

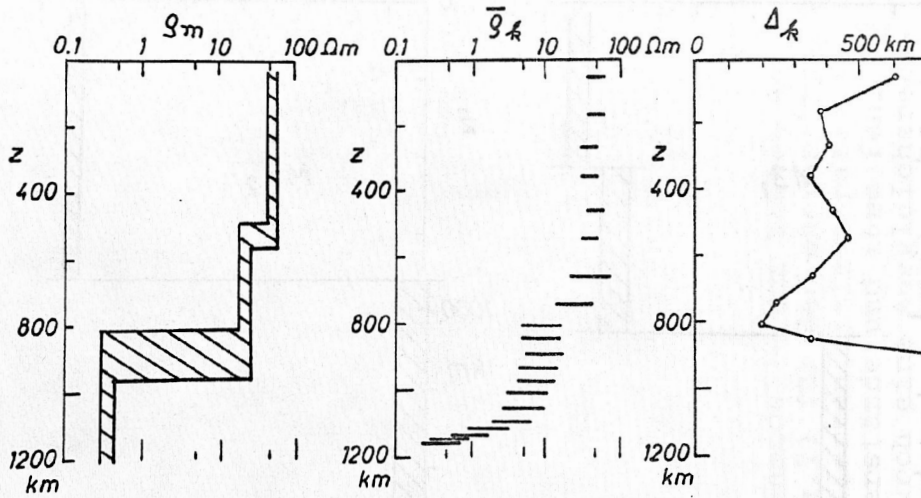


Fig.11: Widerstandsmodelle für den oberen Erdmantel, berechnet aus vier  $S_q$  Frequenzen und einer Dst-Frequenz. Links: 3-Schichtenmodell  $M_{31}$  (s. Fig.9) der Ausgleichsrechnung. Mitte: 20-Schichtenmodell nach dem Backus-Gilbert-Verfahren mit den Datenkernen von  $M_{31}$  und Modellfehlern von 20% bis zur sechsten Schicht und 50% für die folgenden Schichten. Rechts: Zugehörige Mittlungsbreiten.

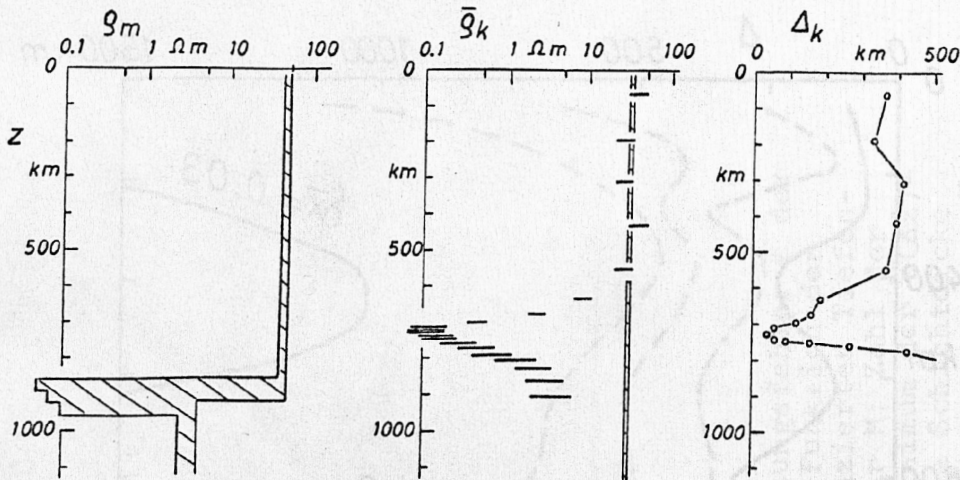


Fig.12: Widerstandsmodelle für den oberen Erdmantel wie in Fig.11, aber mit  $M_{32}$  als Ausgangsmodell. Die gut-leitende Zwischenschicht bei 900 km Tiefe bleibt bei Glättung nach dem Backus-Gilbert-Verfahren erhalten, verschiebt sich aber auf 700 km.