

M. SIEBERT, Göttingen

"Analytische Behandlung der elektromagnetischen Induktion in einer eindimensional beliebig verformten Grenzfläche idealer Leitfähigkeit"

Mittwoch, den 13.3.1974

1. Einleitung

Das in der Überschrift formulierte Problem ist mathematisch ein Randwertproblem der zweidimensionalen Potentialtheorie. Da die Geometrie der Grenzfläche in einer Richtung variabel sein soll, jedoch nach Möglichkeit nicht vorgegeben, sondern aus den Beobachtungen auf einer Bezugsfläche (Erdoberfläche) bestimmt werden soll, liegt zugleich ein Umkehrproblem vor; allerdings nur in dem frequenzunabhängigen Rahmen der Potentialtheorie und nicht unter den allgemeineren und ungleich komplizierteren Voraussetzungen der elektromagnetischen Induktion in einem Medium mit endlicher und variabler Leitfähigkeit (vgl. WEIDELT (1972)).

In die erdmagnetische Tiefensondierung ist dieses Problem von SCHMUCKER (1959) zur Deutung seiner Beobachtungsergebnisse über die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie eingeführt worden. Die Behandlung erfolgt dort so, daß der Verlauf der Grenzfläche vorgegeben und die Verteilung der dazugehörigen Flächenströme aus der Bedingung bestimmt wird, daß der Raum unterhalb der Grenzfläche feldfrei bleiben muß. Der Zusammenhang zwischen magnetischem Störungsfeld und Flächenströmen ist durch das BIOT-SAVARTsche Gesetz gegeben. Durch Variation der Form der Grenzfläche muß dann als Lösung diejenige Form ermittelt werden, für die das berechnete und das beobachtete Störungsfeld möglichst gut übereinstimmen. Bei diesem Vorgehen läßt sich SCHMUCKER von formalen Analogien zur Behandlung eines zweidimensionalen Umkehrproblems der Magnetostatik durch PETERS (1949) leiten und gelangt so zu einer Näherungslösung, mit der Modelle für die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie bestimmt werden (s. Fig.3 in diesem Beitrag).

Dieser Weg der Behandlung zweidimensionaler Leitfähigkeitsanomalien ist in der Folgezeit nur insoweit weiterbegangen worden, als sich die Funktionentheorie mit ihrer Methode der konformen Abbildung auf konkrete Formen der {auf dem Symposium von 1963 in Salzgitter-Lebenstedt eingeführten} modellmäßigen Grenzschicht der Konduktopause anwenden ließ. Der Wert dieser Ergebnisse liegt vor allem in der Klassifikation von Anomalien (vgl. SCHMUCKER (1964)). Die Aufgabe, oberflächennahe Anomalien mit variabler endlicher Leitfähigkeit behandeln zu müssen, und die Möglichkeit, durch den Einsatz elektronischer Rechenanlagen auch komplizierte und damit realistischere Modelle durchrechnen zu können, haben die praktische Bedeutung des vorliegenden Problems stark eingeschränkt. Daß trotzdem die Folgerungen aus diesem einfachen Modell auch heute noch Interpretationshilfen sind, soll in Abschnitt 6 für die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie gezeigt werden. Darüber hinaus ist jede analytische Lösung als Kontrolle für die Güte numerischer Verfahren wertvoll. Nicht zuletzt aber hat die formale Behandlung des Problems bis zur analytischen Darstellung der Lösungen ihren Reiz in sich selbst.

2. Beschreibung des Modells

Neben der schon erwähnten Methode der konformen Abbildung, die über die Funktionentheorie als zweidimensionale Potentialtheorie hier prinzipiell anwendbar ist, jedoch nur praktischen Wert hat, wenn die Form der Grenzfläche vorgegeben und die Abbildung etwa nach der SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Formel auch tatsächlich ausgeführt werden kann, gibt es als weiteres prinzipiell brauchbares Verfahren die Auffindung der gesuchten Grenzfläche durch Konstruktion der Feldlinien des Störungsfeldes. Wie hierbei vorzugehen ist, wird in Abschnitt 5 erläutert, wo am Beispiel der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie die für diesen Fall exakte Lösung des Problems mit der Feldlinien-Methode hergeleitet wird. Auch dieser Weg ist nur begrenzt gangbar, wenn er bis zur analytischen Darstellung des Ergebnisses führen soll.

Im folgenden soll nun die explizite Behandlung der Aufgabe ohne Vorgabe eines konkreten Störungsfeldes oder einer konkreten Verformung der Grenzfläche unternommen werden. Es wird sich zeigen,

daß dies nur in einer ersten Näherung möglich ist. Das bisher nur qualitativ formulierte Modell muß dazu zunächst einer quantitativen Behandlung zugänglich gemacht werden. Die Einzelheiten dieses Modells und die dabei auftretenden Größen können an der Fig.1 abgelesen werden:

Durch die horizontale Ebene $z = 0$ sei die "unverformte Grenzfläche" gegeben, d.h. die in $\pm x$ -Richtung verformte tatsächliche Grenzfläche, an der die elektrische Leitfähigkeit von 0 auf ∞ springen soll, wird durch ihre Abweichungen $z = \zeta(x)$ von der Ebene $z = 0$ festgelegt und soll sich dieser Ebene für große $|x|$ beliebig dicht annähern. Die z -Achse ist positiv nach unten gerichtet. Die Ebene $z = 0$ möge in einer Tiefe z_0 (mit $z_0 > 0$) unter der Beobachtungsebene liegen, die mit der Erdoberfläche identi-

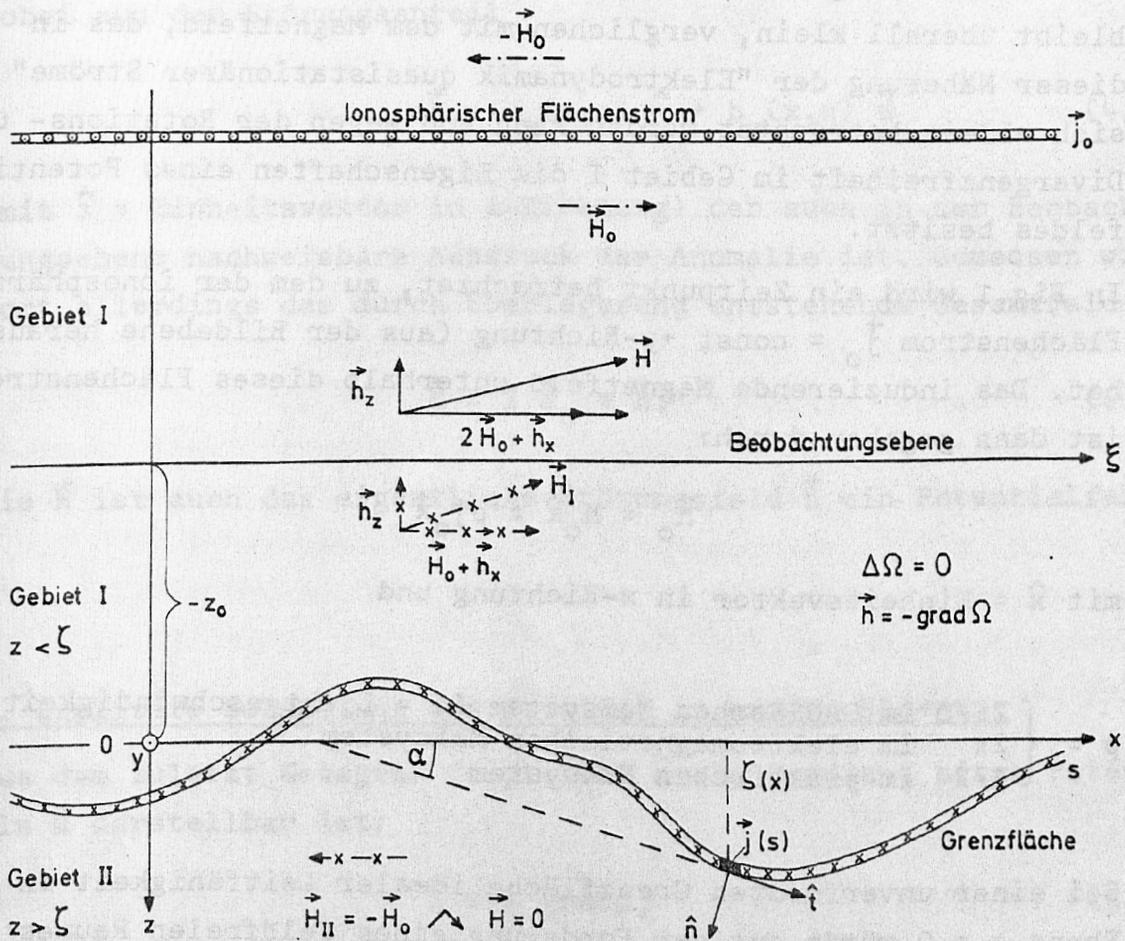


Fig.1: Illustration des im Text beschriebenen Modells.

fiziert werden kann. Für die Angabe der horizontalen Abhängigkeit einer Größe speziell auf der Beobachtungsebene $z = -z_0$ wird $x = \xi$ gesetzt.

Als Quelle für das induzierende Magnetfeld wird ein homogener, horizontaler, nach dem Muster des Ablaufs erdmagnetischer Störungen in seiner Stärke zeitlich variierender ionosphärischer Flächenstrom angenommen. Dieser bei Modellrechnungen für lokale Induktionserscheinungen in mittleren Breiten übliche und brauchbare Ansatz soll hier der Einfachheit halber übernommen werden. Eine Verallgemeinerung des Modells in diesem Punkt ist möglich. Wegen der Frequenzunabhängigkeit der elektromagnetischen Induktion in Grenzflächen idealer Leitfähigkeit (Skintiefe $\rightarrow 0$) und der Vernachlässigbarkeit des Verschiebungsstromes in der hier für die Betrachtungen allein infrage kommenden Nahzone (Gebiet I) der primären und sekundären Stromquellen fällt der zeitliche Ablauf der Störung aus der Rechnung heraus. Das elektrische Feld bleibt überall klein, verglichen mit dem Magnetfeld, das in dieser Näherung der "Elektrodynamik quasistationärer Ströme" für sich allein betrachtet werden kann und wegen der Rotations- und Divergenzfreiheit im Gebiet I die Eigenschaften eines Potentialfeldes besitzt.

In Fig.1 wird ein Zeitpunkt betrachtet, zu dem der ionosphärische Flächenstrom $\vec{j}_0 = \text{const} +y$ -Richtung (aus der Bildebene heraus) hat. Das induzierende Magnetfeld unterhalb dieses Flächenstroms ist dann gegeben durch:

$$\vec{H}_0 = H_0 \hat{x} = p j_0 \hat{x} \quad (1)$$

mit \hat{x} = Einheitsvektor in x-Richtung und

$$p = \left\{ \begin{array}{l} 2\pi/c \text{ im GAUSSschen Maßsystem (c = Lichtgeschwindigkeit)} \\ 2\pi \text{ im elektromagnetischen Maßsystem} \\ 1/2 \text{ im praktischen Maßsystem} \end{array} \right\} \quad (1a)$$

Bei einer unverformten Grenzfläche idealer Leitfähigkeit in der Ebene $z = 0$ würde aus der Forderung eines feldfreien Raumes für $z > 0$ folgen, daß der Flächenstrom in dieser Grenzfläche im Gebiet II ($z > 0$) gerade das Feld $-\vec{H}_0$ und damit im Gebiet I ($z < 0$) das Feld $+\vec{H}_0$ erzeugen müßte. Im Gebiet I und somit auch auf der

Beobachtungsebene würde dann insgesamt das Feld $2 \vec{H}_0 = \text{const}$ auftreten. Der Betrag dieses beim Fehlen einer Anomalie vorhandenen Feldes wird für die Normierung des Störungsfeldes verwendet, das entsteht, wenn die Grenzfläche verformt wird. Da das Gebiet II auch bei verformter Grenzfläche, also für $z > \zeta$ feldfrei bleiben muß, ist die in dieser Grenzfläche induzierte Verteilung des (in die Bildebene hinein gerichteten) Flächenstroms $\vec{j}(s)$ gerade von der Art, daß dieses Stromsystem im Gebiet II wieder das Feld

$$\vec{H}_{II} = -\vec{H}_0 \quad (2)$$

erzeugt. Unter diesen Bedingungen verursacht aber $\vec{j}(s)$ im Gebiet I das Feld

$$\vec{H}_I = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad (3)$$

wobei nun der Störungsanteil

$$\vec{h} = h_x(x, z) \hat{x} + h_z(x, z) \hat{z} \quad (4)$$

(mit \hat{z} = Einheitsvektor in z-Richtung) der auch in der Beobachtungsebene nachweisbare Ausdruck der Anomalie ist. Gemessen wird dort allerdings das durch Überlagerung entstehende Gesamtfeld

$$\vec{H} = 2 \vec{H}_0 + \vec{h}. \quad (5)$$

Wie \vec{H} ist auch das eigentliche Störungsfeld \vec{h} ein Potentialfeld.

3. Explizite Behandlung des Problems in erster Näherung

Aus dem zuletzt Gesagten folgt, daß \vec{h} als Gradient eines Potentials Ω darstellbar ist:

$$\vec{h} = - \text{grad} \Omega, \quad (6)$$

wobei Ω der zweidimensionalen LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

genügt. Eine für den vorliegenden Zweck allgemeine Lösung von (7) erhält man in bekannter Weise, indem für Ω über einen Separationsansatz eine partikuläre Lösung hergeleitet und durch Integration über die als freier Parameter auftretende Wellenzahl k die Lösung verallgemeinert wird. Mit der Bedingung, daß Ω für $z \rightarrow -\infty$ verschwinden soll, lautet die gesuchte Lösung von (7)

$$\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{ikx + |k|z} dk. \quad (8)$$

Die beiden Komponenten von \vec{h} folgen dann wegen (6) aus (8) nach

$$h_x = -\partial\Omega/\partial x; \quad h_z = -\partial\Omega/\partial z \quad (9a,b)$$

Es ist nun zu ermitteln, wie h_x und h_z mit der Form $\zeta(x)$ der Grenzfläche verknüpft sind. Mit dem Blick auf die weitere Behandlung der Aufgabe erweist es sich als unumgänglich vorauszusetzen, daß ζ eine mindestens stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, daß die durch ζ gegebenen Abweichungen von der Ebene $z = 0$ klein bleiben (was noch quantitativ formuliert wird) und daß auch die durch $|d\zeta/dx|$ gegebene Steigung der Grenzfläche eine kleine Größe ist. Eine Lösung des Problems unter diesen Bedingungen soll hier als "erste Näherung" verstanden werden. Bevor sich zeigen wird, wo diese Voraussetzungen konkret verwendet werden, ist aber der allgemeine Hinweis angebracht, daß es bei starken Verformungen der Grenzfläche fraglich wird, wie lange (8) dann noch eine brauchbare Lösung "im Grenzgebiet" von I, d.h. für $z \approx \zeta$ bleibt. Mit Sicherheit kann dies nur für den Bereich $z < \zeta_{\min}$ behauptet werden; jedoch soll diese Frage hier nicht weiter untersucht werden.

Zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen \vec{h} und ζ müssen zunächst die Randbedingungen dieses Randwertproblems quantitativ formuliert werden. Es genügt, dazu die Grenzfläche $\zeta(x)$ mit ihrer Flächenstromverteilung $\vec{j}(s)$ für sich zu betrachten; Sie verursacht nach

nach (2) und (3) das Feld $-\vec{H}_0$ für $z > \zeta$ und das Feld $\vec{H}_0 + \vec{h}$ für $z < \zeta$. An der Grenzfläche muß die Stetigkeit der Normalkomponente des Magnetfelds erfüllt sein, während die Tangentialkomponente einen Sprung erleidet, der proportional zu $j(s)$ ist; in Formeln:

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_{II} - \vec{H}_I) = 0 \quad (10)$$

und
$$\hat{n} \times (\vec{H}_{II} - \vec{H}_I) = -2p j(s) \hat{y} \quad (11)$$

mit \hat{n} = Normaleneinheitsvektor der Grenzfläche ζ und p nach (1a).

Zur Benutzung der Randbedingungen kann man im vorliegenden Fall entweder so vorgehen, daß man die im xz -System gegebenen Komponenten der Felder \vec{H}_I und \vec{H}_{II} (vgl. Fig.1) auf das System des begleitenden Zweibeins \hat{t}, \hat{n} an die Grenzfläche (mit \hat{t} = Tangenteneinheitsvektor) durch eine ebene Drehung um den Winkel α der Neigung der Grenzfläche transformiert; oder man stellt \hat{n} im xz -System dar und führt die Vektoroperationen in (10) und (11) aus. Dabei ist es angebracht, bereits die aus den Bedingungen der ersten Näherung folgenden Vernachlässigungen vorzunehmen. Wird also

$$\frac{d\zeta}{dx} = \alpha \quad \text{mit} \quad |\alpha| \ll 1 \quad (12a,b)$$

angesetzt, so ergeben sich Unterschiede in der Größenordnung entsprechend:

$$H_0 \gg |h_x|, |h_z|, |H_0 \alpha| \gg |h_x \alpha|, |h_z \alpha|. \quad (13)$$

Ausdrücke der kleinsten in (13) aufgeführten Größenordnung werden bereits vernachlässigt. Für \hat{n} erhält man nach Fig.1 in dieser Näherung

$$\hat{n} = \hat{z} - \alpha \hat{x} \quad (14)$$

und durch Einsetzen von (2), (3) mit (4), (14) und Vernachlässigung von $h_x \alpha$ wegen (13):

$$h_z(\zeta) = 2\alpha H_0. \quad (15)$$

Die (lediglich durch die Bedingungen der ersten Näherung eingeschränkte) Allgemeinheit der Verformung der Grenzfläche in x-Richtung soll darin zum Ausdruck kommen, daß ζ durch ein FOURIER-Integral dargestellt wird:

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(k) e^{ikx} dk. \quad (16)$$

Dann läßt sich für die linke Seite von (15) nach (8) und (9a) und für die rechte Seite nach (16) und (12a) jeweils ein FOURIER-Integral angeben:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} |k| a(k) e^{ikx+|k|\zeta} dk = 2H_0 i \int_{-\infty}^{+\infty} k \kappa(k) e^{ikx} dk. \quad (17)$$

Die durch (17) geforderte Übereinstimmung der beiden Integrale verlangt als Konsequenz der ersten Näherung: $\exp\{|k|\zeta\} \rightarrow 1$. Da sich im Spektrum $a(k)$ des Störungsfeldes das Spektrum $\kappa(k)$ der Grenzfläche widerspiegelt und umgekehrt, kann diese Forderung so interpretiert werden, daß es im Spektrum $\kappa(k)$ eine kleinste Wellenlänge und damit eine größte Wellenzahl k_{\max} geben muß, derart daß der Spektralbereich für noch kürzere Wellenlängen keinen merklichen Beitrag zur Form der Grenzfläche gibt:

$\kappa(|k| > k_{\max}) \rightarrow 0$. Ist ζ_{\max} die größte, absolut genommene Abweichung der Grenzfläche von der Ebene $z = 0$, so muß zwischen ζ_{\max} und k_{\max} die Beziehung gelten:

$$k_{\max} \cdot \zeta_{\max} \ll 1 \quad \wedge \quad \exp\{|k|\zeta\} \rightarrow 1. \quad (18)$$

Damit ist diese zuvor nur qualitativ aufgeführte Bedingung quantitativ formuliert. Auch von den beiden weiteren Bedingungen der ersten Näherung, nämlich (12a,b) ist bereits bei der Herleitung von (17) Gebrauch gemacht worden. Ohne diese Voraussetzungen wäre die nun mit (18) aus (17) folgende Verknüpfung der beiden Spektralfunktionen durch

$$a(k) = - 2H_0 i \operatorname{sgn} k \kappa(k) \quad (19)$$

mit $\text{sgn } k = |k|/k$ nicht explizit angebar.

Mit der einfachen Beziehung (19) im Wellenzahl-Bereich liegt bereits die Aufgabe gelöst vor, das durch elektromagnetische Induktion in der entsprechend $\kappa(k)$ verformten Grenzfläche entstehende Störungsfeld \vec{h} (über (8) und (9a,b)) berechnen zu können.

Die noch verbleibende Aufgabe der Lösung des Umkehrproblems besteht lediglich in der Fortsetzung eines Potentialfeldes, allerdings hier in Richtung auf seine Quellen. Als gegeben können dabei die normierten anomalen inneren Anteile des beobachteten Feldes angesehen werden. Das heißt für das vorliegende Modell, daß in der Beobachtungsebene $z = -z_0$ die Größen $h_x(\xi)/2H_0$ und $h_z(\xi)/2H_0$ in ihrer ξ -Abhängigkeit bekannt sind und für große $|\xi|$ hinreichend schnell verschwinden. Auch diese Größen lassen sich dann durch FOURIER-Integrale darstellen:

$$\frac{h_x(\xi)}{2H_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(k)e^{ik\xi} dk; \quad \frac{h_z(\xi)}{2H_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)e^{ik\xi} dk \quad (20a,b)$$

FOURIER-Transformation liefert $B(k)$ und $C(k)$, die damit ebenfalls bekannt sind. Prinzipiell genügt die Kenntnis einer dieser spektralen Verteilungen, da h_x und h_z wegen ihrer Herkunft aus demselben zweidimensionalen Potential in bekannter Weise durch eine HILBERT-Transformation miteinander verknüpft sind. In der erdmagnetischen Tiefensondierung wird dieser Zusammenhang meistens durch den von KERTZ eingeführten Kommutierungsoperator K angegeben: Ist $f(x)$ eine durch FOURIER-Entwicklung darstellbare Funktion

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(k)e^{ikx} dk, \quad (21a)$$

so gilt (vgl. SIEBERT und KERTZ (1957))

$$Kf = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn } k \beta(k)e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u) du}{x-u}. \quad (21b)$$

Der Operator K ist danach die FOURIER-Darstellung der (negativen) HILBERT-Transformation. Wegen der auftretenden Singularität ist das rechte Integral im Sinne des CAUCHYSchen Hauptwertes zu bestimmen.

Aus (8) und (9a,b) folgt sofort, daß h_x und h_z ein Transformationspaar wie f und Kf sind, so daß generell gilt:

$$h_z(x, z) = K h_x(x, z). \quad (22)$$

Diese Beziehung gilt dann speziell auch für $h_x(\xi)/2H_0$ und $h_z(\xi)/2H_0$ nach (20a,b). Wird schließlich noch $a(k)$ und nach (19) damit auch $\kappa(k)$ über (8) und (9b) für $z = -z_0$ mit $C(k)$ verbunden, so erhält man bei Formulierung dieser Beziehungen im Wellenzahl-Bereich:

$$C(k) = -i \operatorname{sgn} k B(k) = ik \kappa(k) e^{-|k|z_0} \quad (23)$$

Ist also das normierte Störungsfeld durch $B(k)$ oder $C(k)$ gegeben, so kann nach (23) $\kappa(k)$ und dann nach (16) die dazugehörige Form $\zeta(x)$ der Grenzfläche berechnet werden. Typisch für diese potentialtheoretische Lösung ist, daß die Größe z_0 unbestimmt bleibt und vorgegeben werden muß. Genau darin liegt die prinzipiell nicht zu umgehende Vieldeutigkeit des Ergebnisses. Selbstverständlich läßt sich (23) ebenso dazu verwenden, zu einer durch κ gegebenen Form der Grenzfläche das normierte Störungsfeld auf der Beobachtungsebene $z = -z_0$ zu bestimmen.

Wie aus dem soeben beschriebenen Verfahren hervorgeht, erfolgt die wechselseitige Berechnung von Störungsfeld und Form der Grenzfläche, ohne daß die Verteilung des Flächenstroms $\vec{j}(s)$ in der Grenzfläche explizit verwendet wird und bekannt sein muß. Dem entspricht, daß die Randbedingung (11) bisher nicht benutzt worden ist. Setzt man in (11) \hat{n} nach (14), \vec{H}_{II} nach (2) und \vec{H}_I nach (3) mit \vec{h} nach (4) ein und berücksichtigt (13), so erhält man für die Flächenstromdichte

$$j(s) = H_0 (1 + h_x(\zeta)/2H_0) / p. \quad (24)$$

Nach Fig.1 läßt sich die Bogenlänge s auf der verformten Grenzfläche eindeutig der Koordinate x zuordnen. Beachtet man noch, daß nach (1) $H_0 = pj_0$ ist, so besagt (24), daß die Flächenstromdichte die folgende Form hat

$$j(x) = j_0(1 + g(x)) \quad \text{mit} \quad |g(x)| \ll 1. \quad (25)$$

Der in der Grenzfläche anomal induzierte Anteil an der Stromdichte ist danach $j_0 g(x)$. Aus (25) und (24) folgt mit (8), (9a), (18) und (19) für $g(x)$ die explizite Darstellung

$$g(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} |k| \kappa(k) e^{ikx} dk, \quad (26)$$

die diese Größe über (16) mit $\zeta(x)$ verknüpft. Vergleicht man darüber hinaus $g(x)$ nach (26) mit der nach x differenzierten Gleichung (16), d.h. nach (12a) mit der Steigung α der Grenzfläche, so sieht man mit einem Blick auf (21a,b), daß auch $g(x)$ und $\alpha(x)$ durch eine HILBERT-Transformation ineinander übergeführt werden können (geschrieben mit dem Kommutierungsoperator K):

$$\alpha = K g. \quad (27)$$

Ausgehend von (24), lassen sich durch geeignete FOURIER-Transformationen genau jene Integraldarstellungen für die Komponenten des normierten Störungsfeldes auf der Beobachtungsebene herleiten, wie sie in der hier ausgeführten ersten Näherung auch aus der direkten Anwendung des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes auf die Flächenstromdichte $j(s)$ gefunden werden. Die damit angedeutete Möglichkeit, das vorliegende Problem sowohl über die Potentialtheorie (wie in diesem Beitrag) als auch über das BIOT-SAVARTSche Gesetz (wie im Ansatz bei SCHMUCKER (1959)) parallel behandeln zu können, führt zusammen mit der Forderung, daß das Gebiet II feldfrei bleiben muß, zu sich entsprechenden Ergebnissen der beiden Wege, woraus wieder recht allgemeine Integralbeziehungen folgen, die über die HILBERT-Transformation hinausgehen und im Anhang 1 ohne Beweis mitgeteilt werden. Daß diese Parallelität besteht, ist nicht verwunderlich, weil einerseits das BIOT-SAVARTSche Gesetz eine allgemeine Lösung für potentialtheoretische Randwertprobleme der hier behandelten Art ist und andererseits bei dem hier gewählten

Weg über die Potentialtheorie die Aussage des BIOT-SAVARTschen Gesetzes durch die Randbedingung (11) hineinkommt.

4. Anwendung des Formalismus von Abschnitt 3 auf die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie

Noch immer können die wesentlichen großräumigen Eigenschaften der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie, insbesondere für erdmagnetische Störungen vom Typ einer Bay, der Untersuchung von SCHMUCKER (1959) entnommen werden. Der von SCHMUCKER ermittelte Verlauf der Isanomalien der normierten anomalen inneren Anteile h_i und z_i des Störungsfeldes rechtfertigt in hohem Maße das Modell einer zweidimensionalen Anomalie. Verwendet werden die Daten für h_i und z_i , die den hier benutzten Größen $h_x(\xi)/2H_0$ und $h_z(\xi)/2H_0$ entsprechen, auf dem eng vermessenen Ostprofil von Lensahn (Len) bei Kiel bis Bieberstein (Bib) bei Fulda. In Fig.2 ist (mit ausgezogenen Linien) der Verlauf von h_i und z_i auf diesem Profil, das die Anomalie praktisch senkrecht überquert, für Bay-Störungen aufgetragen. Diese beiden Kurven müssen zunächst in einer möglichst guten Näherung analytisch dargestellt werden. Dazu empfiehlt es sich, von einer geeigneten zweidimensionalen Quellenverteilung auszugehen, aus deren Potential dann h_x und h_z folgen und so automatisch (22) erfüllen. Für diese Aufgabe bietet sich eine Entwicklung nach Strom-Multipolen an. In meinem Beitrag auf dem Symposium in Goslar (vgl. SIEBERT (1965)) habe ich mich bereits mit dieser Frage befaßt und gezeigt, daß ein um 45° gegen die Vertikale geneigter Strom-Dipol (zweidimensionaler Dipol) in einer Tiefe von 127 km unter einem Profilort, der nicht ganz in der Mitte zwischen den Stationen Ebstorf (Ebs) und Fallersleben (Fal) liegt, eine bereits ausreichende Näherung liefert. Die normierten Feldkomponenten dieser Anordnung in der Beobachtungsebene sind (gestrichelt) ebenfalls in Fig.2 eingetragen worden. Aus ihrem Verlauf wird deutlich, daß der obere Pol nördlich, d.h. in + x-Richtung, vom unteren Pol liegt und einem (negativen) Linienstrom in die Bildebene hinein entspricht (s. auch Fig.3). Die formelmäßige Darstellung der beiden Feldkomponenten lautet

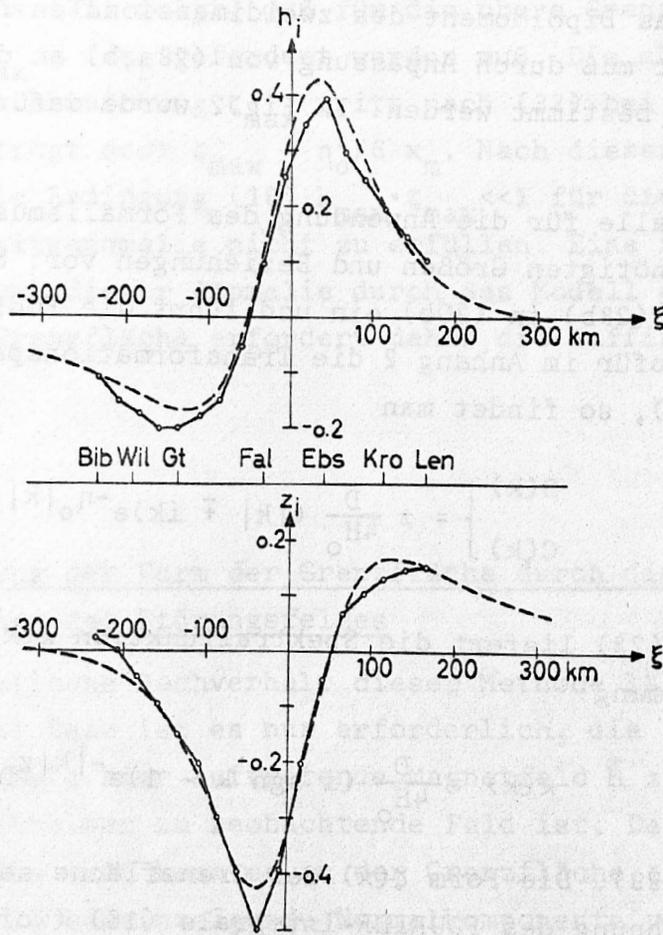


Fig.2: Verlauf von h_i und z_i (ausgezogene Linien) und ihre analytische Approximation durch das Feld eines Stromdipols (gestrichelt) auf dem SCHMUCKERSchen Ostprofil.

$$h_x(\xi) \left. \vphantom{h_x(\xi)} \right\} = \mp D \frac{\xi^2 \mp 2\eta_0 \xi - \eta_0^2}{(\xi^2 + \eta_0^2)^2} \quad (28a)$$

$$h_z(\xi) \left. \vphantom{h_z(\xi)} \right\} \quad (28b)$$

mit

$$\eta_0 = z_0 + z_D, \quad (29)$$

wobei $z = z_D$ ($z_D > 0$) die Tiefe des Strom-Dipols unter der Ebene $z = 0$ angibt. Dann ist η_0 die Tiefe des Strom-Dipols unter der Beobachtungsebene, also im vorliegenden Fall: $\eta_0 = 127$ km. Die

Größe D ist das Dipolmoment des zweidimensionalen Dipols. Auch ihr Zahlenwert muß durch Anpassung von (28a,b) an den Verlauf von h_i und z_i bestimmt werden. In Fig.2 wurde dafür $D = 2H_0 \eta_0^2 / 3$ verwendet.

Damit liegen alle für die Anwendung des Formalismus des Abschnitts 3 benötigten Größen und Beziehungen vor: Setzt man (28a) in (20a) oder (28b) in (20b) ein und führt die FOURIER-Transformation aus (wofür im Anhang 2 die Transformationspaare zusammengestellt sind), so findet man

$$\left. \begin{array}{l} B(k) \\ C(k) \end{array} \right\} = \pm \frac{D}{4H_0} (|k| \mp ik) e^{-\eta_0 |k|} \quad (30a)$$

$$(30b)$$

Einsetzen in (23) liefert die Spektralfunktion $\kappa(k)$ der Grenzflächenverformung

$$\kappa(k) = \frac{D}{4H_0} (i \operatorname{sgn} k - 1) e^{-|k| z_D} \quad (31)$$

mit z_D nach (29). Die Form $\zeta(x)$ der Grenzfläche selbst folgt dann aus der Berechnung des FOURIER-Integrals (16) (wofür wieder Anhang 2 die Transformationspaare enthält). Das ergibt:

$$\zeta(x) = - \frac{D}{2H_0} \frac{x + z_D}{x^2 + z_D^2} \quad (32)$$

Auch die Lösung (32) ist erst eindeutig festgelegt, wenn z_D vorgegeben wird, wobei lediglich (29) erfüllt sein muß, also $0 < z_D < 127$ km. Wird außerdem der schon gegebene Wert von D benutzt, so ergibt die numerische Auswertung von (32) das zunächst überraschende Ergebnis, daß jede der hier möglichen Grenzflächen durch die Beobachtungsebene hindurchtritt, d.h. es gibt immer ein x -Intervall, für das $\zeta < -z_0$ ist. Die Ursache für dieses fatale Resultat liegt nicht darin, daß das hier betrachtete Modell prinzipiell unbrauchbar wäre, sondern daß die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie eine so starke Anomalie ist, daß sie nicht in der Näherung des Abschnitts 3 behandelt werden darf. Man erkennt dies sofort daran, daß die Lösung (32) die Bedingung (18) für die Beobachtungsdaten der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie nicht

erfüllt: Aus (31) folgt, daß für die obere Grenze von k mindestens $k_{\max} = 1/z_D$ gefordert werden muß. Die absolut genommene maximale Abweichung ζ_{\max} tritt nach (32) bei $x_m = (\sqrt{2} - 1)z_D$ auf und beträgt dort $\zeta_{\max} = \eta_0^2/6 x_m$. Nach diesen Beziehungen ist aber die Bedingung (18) $k_{\max} \cdot \zeta_{\max} \ll 1$ für die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie nicht zu erfüllen. Eine zufriedenstellende Behandlung dieser Anomalie durch das Modell einer perfekt leitenden Grenzfläche erfordert daher die Auffindung der exakten Lösung.

5. Bestimmung der Form der Grenzfläche durch die Berechnung der Feldlinien des Störungsfeldes

Der physikalische Sachverhalt dieser Methode läßt sich schnell beschreiben: Dazu ist es nur erforderlich, die Randbedingung (10) auf das gesamte hier auftretende Magnetfeld \vec{H} zu erweitern, das ja das unmittelbar zu beobachtende Feld ist. Da das Gebiet II feldfrei sein muß, kann es an der Grenzfläche $\zeta(x)$ auch keine in das Gebiet II hineinzeigende Normalkomponente von \vec{H} geben. Wegen der Stetigkeitsbedingung (10) muß dann auch die zum Gebiet I gehörende Normalkomponente von \vec{H} auf der Grenzfläche verschwinden, während dort die Tangentialkomponente wegen (11) existiert. Diese stellt damit an der Grenzfläche das Feld \vec{H} selbst dar, d.h. das x -Profil der Grenzfläche stimmt stets mit dem Verlauf einer Feldlinie von \vec{H} überein. Die Aufgabe besteht also darin, aus dem bekannten Verhalten des Feldes auf der Beobachtungsebene die Feldlinien von \vec{H} zu berechnen. Nach der soeben angestellten Überlegung gibt dann jede ganz unterhalb der Beobachtungsebene liegende Feldlinie den Verlauf einer potentiellen Grenzfläche an, worin sich wieder die Vieldeutigkeit der Lösung äußert. Eindeutigkeit wird erreicht, wenn die Tiefe der für $|x| \rightarrow \infty$ unverformten Grenzfläche vorgegeben wird.

Allgemein läßt sich dieses Problem nur bis zur Aufstellung von Differentialgleichungen für die Schar der Feldlinien behandeln. Dies ist auf zwei verschiedenen Wegen möglich:

a) Soll das allgemeine Wegelement $d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{z} dz$ der xz -Ebene zugleich ein Element einer Feldlinie von \vec{H} sein, so muß gelten

$$\vec{H} \times d\vec{s} = 0. \quad (33)$$

Einsetzen von \vec{H} nach (5) mit \vec{H}_0 nach (1) und \vec{h} nach (4) führt bereits auf die Differentialgleichung dieses Verfahrens

$$\frac{dz}{dx} = \frac{h_z(x,z)}{2H_0 + h_x(x,z)}. \quad (34)$$

Mit (34) läßt sich die Aufgabe von Abschnitt 3 exakt lösen, wenn man sich das Feld des Strom-Dipols nicht nur für das spezielle Niveau der Beobachtungsebene, sondern allgemein hinschreibt. Formal bedeutet das, in (28a,b) ξ durch x und η_0 durch $-z+z_D$ zu ersetzen. Die dann durch Einsetzen von (28a,b) in (34) entstehende gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzt eine explizit angebbare Lösung. Wird die Integrationskonstante aus der Forderung $z = 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ bestimmt und in dieser speziellen Lösung $z = \zeta$ gesetzt, so erhält man für die Form der Grenzfläche den durch (42) gegebenen Verlauf, wie er auch auf dem Weg über das Vektorpotential gefunden wird.

b) Ordnet man dem Magnetfeld \vec{H} in bekannter Weise durch

$$\vec{H} = H \hat{t} = \text{rot } \vec{A} \quad (35)$$

ein Vektorpotential \vec{A} zu, so gilt für das vorliegende Problem, daß die gesuchten Feldlinien von \vec{H} durch die Kurvenschar $A(x,z) = \text{const}$ gegeben sind. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Da \vec{H} nur von x und z abhängt und auch nur Komponenten in x - und z -Richtung besitzt, kann \vec{A} nur eine y -Komponente haben, die ebenfalls nur von x und z abhängt:

$$\vec{A} = A(x,z)\hat{y}. \quad (36)$$

Damit stehen \vec{A} und \vec{H} überall senkrecht aufeinander, woraus folgt

$$\vec{H} \times \vec{A} = H A \hat{n}. \quad (37)$$

Wegen (36) muß eine Richtungsdifferentiation von \vec{A} in die Richtung von \vec{A} selbst verschwinden. Mit einer aus der Vektoranalysis bekannten Umformung gilt dann

$$(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{A} = \frac{1}{2} \text{grad } A^2 - \vec{A} \times \text{rot } \vec{A} = 0.$$

Mit (35), (36) und (37) folgt daraus

$$\text{grad } A = - H \hat{n}. \quad (38)$$

Da also der Gradient von A immer die Richtung von $-\hat{n}$ hat, müssen die Linien $A(x,z) = \text{const}$ als die dazugehörigen Orthogonaltrajektorien in der xz-Ebene stets die Richtung von \hat{t} haben und sind damit die Feldlinien von \vec{H} .

Die Bestimmung von \vec{A} erfolgt aus (35), d.h. hier aus dem folgenden System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = h_z(x,z); \quad \frac{\partial A}{\partial z} = - 2H_0 - h_x(x,z). \quad (39a,b)$$

Wie unter a) müssen zur Berechnung von A für die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie die im gesamten Gebiet I geltenden Ausdrücke von h_x und h_z , die man wieder durch Einführung der Variablen x und z in (28a,b) erhält, in (39a,b) eingesetzt werden. Das ergibt

$$\frac{\partial A}{\partial x} = D \frac{x^2 + 2\eta x - \eta^2}{(x^2 + \eta^2)^2}; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = - 2H_0 + D \frac{x^2 - 2\eta x - \eta^2}{(x^2 + \eta^2)^2} \quad (40a,b)$$

mit
$$\eta = - z + z_D. \quad (41)$$

Man kann nun so vorgehen, daß als erstes (40a) nach x integriert wird. Die "Integrationskonstante" ist dann aber noch eine Funktion von z : Z(z). Wird der so entstandene Ausdruck für A unter Beachtung von (41) partiell nach z differenziert, so muß er mit (40b) identisch sein. Das liefert eine Bestimmungsgleichung für dZ/dz. Mit bekanntem Z ist dann auch die allgemeine Lösung von A gegeben, aus der durch Konstantsetzen die Schar der Feldlinien folgt. Mit der Randbedingung $z = 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ erhält man dann wie unter a) genau die Grenzfläche, bei der der Strom-Dipol im Abstand z_D unter der Ebene $z = 0$ liegt. Wird in dieser speziellen Lösung wieder $z = \zeta$ gesetzt, so ist die gesuchte exakte Lösung des Problems durch den folgenden analytischen Ausdruck gegeben:

$$x^2 \zeta + \tilde{D} x + \tilde{D}(z_D - \zeta) + \zeta(z_D - \zeta)^2 = 0 \quad (42)$$

mit $\tilde{D} = D/2H_0$. (42a)

Gleichung (42) ist kubisch in ζ und quadratisch in x und wird numerisch am besten so behandelt, daß Werte für ζ vorgegeben werden, für die die quadratische Gleichung in x gelöst wird. Dabei ist zu beachten, daß immer nur Punkte der Lösungskurve bestimmt werden, die die Randbedingung $z = 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ erfüllt. Ein Beispiel einer solchen Lösungskurve (ausgezogen) enthält die im nächsten Abschnitt erörterte Fig. 3.

Macht man die Annahme $\zeta_{\max} \ll z_D$ und rechnet dafür die erste Näherung von (42) aus, so ergibt sich wieder die in Abschnitt 4 unter dieser Bedingung gefundene Lösung (32), die dort aus der allgemeinen Formulierung (23) der ersten Näherung berechnet worden ist und deren Lösungskurve (punktiert) für das betrachtete Beispiel ebenfalls in Fig. 3 eingezeichnet worden ist.

6. Erörterung der Ergebnisse im Hinblick auf eine Deutung der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie

Bei einer ersten Betrachtung der Ergebnisse ist es angebracht, keine Rücksicht auf den unrealistischen Charakter des Modells zu nehmen, sondern die Ergebnisse so zu interpretieren, als ob ein Sprung der elektrischen Leitfähigkeit von 0 auf ∞ im Untergrund Norddeutschlands möglich sei. Wie schon mehrfach bemerkt, bleibt bei diesem Vorgehen die Größe z_0 , also die Tiefe der Ebene $z = 0$ und nach (29) dann auch z_D , unbestimmt. Allerdings läßt sich diese Vieldeutigkeit etwas einschränken: Eine Bedingung dieser Art ist die, daß die verformte Grenzfläche die Beobachtungsebene (Erdoberfläche) nicht durchstoßen darf. Mit den schon im Abschnitt 4 für die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie genannten Werten $\eta_0 = 127 \text{ km}$ und $\tilde{D} = \eta_0^2/3 = 5376,3 \text{ km}^2$ läßt sich aus (42) ausrechnen, daß $z_0 > 51 \text{ km}$ sein muß, damit diese Bedingung erfüllt wird. Außerdem darf bei einer Feldfortsetzung in Richtung auf die Quellen, wie sie hier vorgenommen wird, die verformte Grenzfläche

bei einer Verlagerung in größere Tiefen den Strom-Dipol nicht überqueren. Betrachtet man daraufhin das Verhalten von ζ nach (42) in der Umgebung der Abszisse $x = 0$ des Strom-Dipols, so findet man, daß dieser Fall auch für beliebig großes, aber endliches z_0 nicht eintreten kann, auch wenn z_D dabei negativ wird und damit die Bezugsebene $z = 0$ tiefer liegt als der Strom-Dipol. Daraus folgt bereits anschaulich, was auch die Rechnung ergibt, daß nämlich die Verformung der Grenzfläche, d.h. die maximale vertikale Schwankungsbreite in ζ , um so größer wird, je größer z_0 ist. Die Aufwölbung wird dabei zunehmend steiler. Soll also die Verformung möglichst gering bleiben, müssen in diesem Sinne oberflächennahe Modelle betrachtet werden (die allerdings im üblichen Sprachgebrauch immer noch Modelle von Tiefenanomalien sind).

Ein Beispiel für ein solches oberflächennahes Modell zeigt Fig. 3. Es ist festgelegt durch $z_0 = 60$ km, woraus sofort $z_D = 67$ km folgt. Diese Tiefe von 60 km für die unverformte Grenzfläche ist auch deswegen angesetzt worden, weil sie zugleich die Tiefe des oberflächennächsten Modells bei SCHMUCKER (1959) ist. Die dort mit einem einzelnen Sinusbogen der Amplitude 40 km approximativ beschriebene Verformung ist (als gestrichelte Linie) in Fig. 3 mit eingezeichnet worden. Im übrigen stellt die ausgezogene Linie in Fig. 3 die exakte Lösung nach (42) und die punktierte Linie die erste Näherung nach (32) für dieses Beispiel dar. Bei der Beurteilung der Verformung ist zu beachten, daß der Ordinatenmaßstab um den Faktor 3 gegenüber dem Abszissenmaßstab überhöht ist. Aber auch in einer Darstellung mit gleichen Einheiten bleibt die Verformung beträchtlich. Sie beträgt bei der exakten Lösung maximal 84 km bei einem horizontalen Abstand der beiden Extrema von 138 km.

Will man das Modell der Wirklichkeit annähern, so könnte man versuchen, in der Umgebung der Grenzfläche einen Bereich starker Zunahme der Leitfähigkeit mit der Tiefe zu sehen, sei es als Folge unterschiedlicher Materialeigenschaften des Untergrundes, sei es als Folge einer entsprechenden Temperaturanomalie oder eines anderen Effektes. Bei allen diesen Möglichkeiten bleibt jedoch das Ausmaß der von der Stärke der Induktionsanomalie geforderten Profilaufwölbung erstaunlich und schwer vorstellbar. Dieser Eindruck

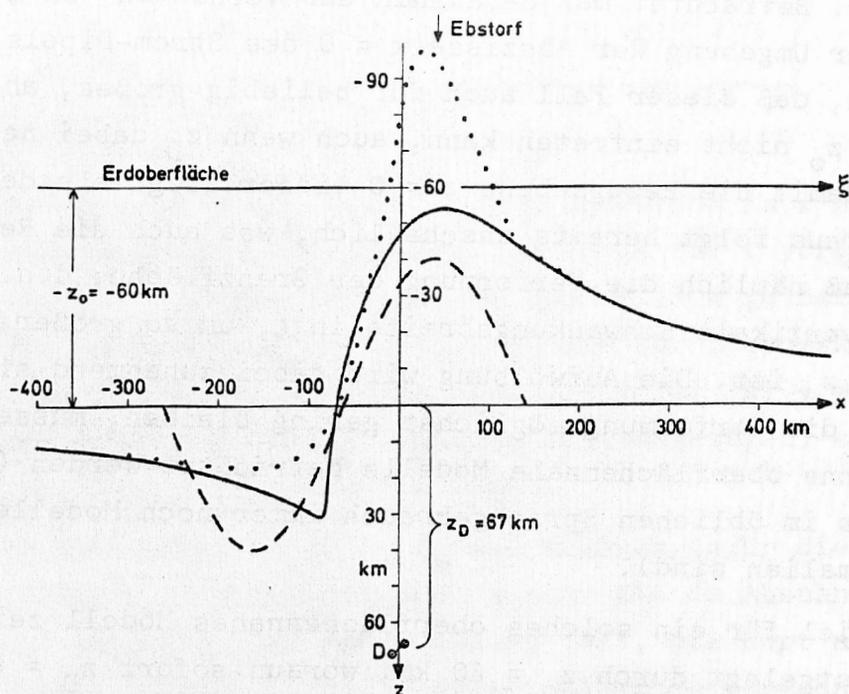


Fig.3: Modelle zur Deutung der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie durch eine (aus der in 60 km Tiefe liegenden Ebene $z = 0$ entstandene) eindimensional verformte Grenzfläche: ausgezogene Linie = exakte Lösung nach (42); punktierte Linie = erste Näherung nach (32); gestrichelte Linie nach SCHMUCKER (1959).

wird noch verstärkt, wenn man berücksichtigt, daß die hier betrachtete Tiefenanomalie in Wahrheit noch von der mächtigen, elektrisch gut leitenden Sedimentdecke der Norddeutschen Tiefenebene überlagert sein müßte, wodurch der Effekt der Anomalie an der Erdoberfläche abgeschwächt wird. Um also den beobachteten Effekt zu erklären, müßte die tatsächliche Tiefenanomalie noch ausgeprägter sein, als sie sich aus dem hier behandelten Modell ergibt.

Da andererseits auch die Versuche, die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie als reine Deckschicht-Anomalie zu deuten, keinen vollen Erfolg gehabt haben, wird mit den hier gewonnenen Ergebnissen die Vorstellung bestärkt, daß es sich bei dieser zu den bemerkenswertesten Induktionsanomalien auf der Erde gehörenden

Erscheinung um eine kombinierte und damit komplizierte Deckschicht-Tiefenanomalie handelt. Allerdings ist auch dann zu erwarten, daß sich die hier gefundene Systematik der Verformung der Grenzfläche qualitativ im Verlauf der Linien gleicher Leitfähigkeit im tieferen Untergrund auch einer Deckschicht-Tiefenanomalie wiederfindet. So zeigt das detaillierteste der zur Zeit vorliegenden Modelle, das STEVELING (1973, Abb.39) auf der Grundlage seiner Pulsations- und Variationsregistrierungen auf einem Profil von Wingst nach Süden über die Anomalie hinweg mit Hilfe von Computer-Programmen berechnet hat und das Einzelheiten der Leitfähigkeitsverteilung bis in eine Tiefe von 45 km enthält, in seinem mittleren und nördlichen Abschnitt etwa unterhalb von 15 km Tiefe Isolinien, die in ihrer Form dem Verlauf der Grenzfläche in Fig.3 außerordentlich ähnlich sind.

In dieser Weise kann also das hier untersuchte Modell auch als Interpretationshilfe herangezogen werden, und es kann darüber hinaus in einem Näherungsverfahren als erster Schritt bei der Behandlung eines durch eine Deckschicht mit endlicher Leitfähigkeit erweiterten Modells benutzt werden.

Anhang 1

Die in Abschnitt 3 erwähnten Integralbeziehungen, die sich bei Anwendung des BIOT-SAVARTschen Gesetzes auf das vorliegende Problem aus dem Abschirmeffekt im Gebiet II ergeben, lauten bei Benutzung der schon zuvor verwendeten Größen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi) \frac{d\zeta}{dx} \frac{dx}{r_0^2} = z_0 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dx}{r_0^2}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi) g(x) \frac{dx}{r_0^2} = -z_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{dx} \frac{dx}{r_0^2}$$

$$\text{mit } r_0^2 = (x-\xi)^2 + z_0^2.$$

Dabei müssen entsprechend (12a) und (27) $d\zeta/dx = \alpha$ und $g(x)$ Transformationspaare einer HILBERT-Transformation sein.

Anhang 2

Bei Festlegung der exponentiellen FOURIER-Transformation durch

$$G(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{ipq} dp \quad \text{und} \quad F(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(q)e^{-ipq} dq$$

lassen sich die im Abschnitt 4 verwendeten Paare von FOURIER-Transformierten in die folgende Tabelle bringen (mit $a = \text{const}$):

F(p)	G(q)
$\frac{1}{a^2+p^2}$	$\frac{\pi e^{-a q }}{a}$
$\frac{p}{a^2+p^2}$	$i\pi \operatorname{sgn} q e^{-a q }$
$\frac{1}{(a^2+p^2)^2}$	$\frac{\pi}{2a^3} (1+a q) e^{-a q }$
$\frac{p}{(a^2+p^2)^2}$	$\frac{i\pi q}{2a} e^{-a q }$
$\frac{p^2}{(a^2+p^2)^2}$	$\frac{\pi}{2a} (1 - a q) e^{-a q }$

Literatur

- PETERS, L.J.: The direct approach to magnetic interpretation and its practical application. *Geophysics* 14, S.290-320, 1949.
- SIEBERT, M., KERTZ, W.: Zur Zerlegung eines lokalen erdmagnetischen Feldes in äußeren und inneren Anteil.
 Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Abt.IIa, 1957, S.87-112.

SIEBERT, M.: Bemerkungen zur Untersuchung der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie. Protokoll Symp. "Erdmagnetische Tiefensondierung" in Goslar, S.108-129, Braunschweig 1965.

SCHMUCKER, U.: Erdmagnetische Tiefensondierung in Deutschland 1957/59: Magnetogramme und erste Auswertung. Abhandl. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Beitr. IGJ, Heft 5, 1959.

SCHMUCKER, U.: Anomalies of geomagnetic variations in the Southwestern United States. J. Geomagn. Geoelectr. 15, S.193-221, 1964.

STEVELING, E.: Erdmagnetische Tiefensondierung mit Variationen und Pulsationen im Einflußbereich der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie. Dissertation Math.-Nat. Fakultät Göttingen 1973.

WEIDELT, P.: The inverse problem of geomagnetic induction. Z.f. Geophys. 38, S.257-289, 1972.