

P. WEIDELT, Göttingen

"Modellrechnungen zur elektromagnetischen Induktion in dreidimensionalen Strukturen"

Mittwoch, den 13.03.1974

1. Einleitung

Numerische Lösungen dreidimensionaler Induktionsprobleme tauchen in der Literatur bisher nur sehr vereinzelt auf (z.B. JONES & PASCOE (1972), LINES & JONES (1973)). Der Grund dafür sind weniger mathematische Schwierigkeiten als vielmehr die Tatsache, daß man bei der üblichen Diskretisierung der Maxwell'schen Gleichungen in einem Bereich, der einen möglichst großen Teil von Leiter und Luftraum einschließt, selbst bei bescheidenen Modellen sehr bald an die Grenzen der internen Speicherkapazität großer Rechenanlagen stößt. Auch können wirtschaftliche Erwägungen nicht mehr ganz außer Acht gelassen werden. Wählt man als Grundbereich etwa einen Quader mit 20 Zellen in jeder Richtung, so sind zur Speicherung des komplexen elektrischen Feldvektors $3 \times 2 \times 20 \times 20 \times 20 = 48\ 000$ Speicherplätze erforderlich. Zur iterativen Verbesserung einer Komponente einer Zelle benötigt man etwa 0.0005 sec pro Iteration. Nimmt man an, daß etwa 150 Iterationen notwendig sind, so ergibt dies eine Rechenzeit von $24\ 000 \times 0.0005 \times 150 \text{ sec} = 30 \text{ min.}$ (Auf der Univac 1108 der Universität Göttingen kostet eine Minute Rechenzeit etwa 6 DM, so daß hier für dies Modell (fiktive) Kosten von etwa 200 DM entstehen.)

Mit Hilfe von Greenschen Funktionen gelingt es, den Grundbereich zu verkleinern und so den Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf zu verringern. Fig.1 skizziert die drei Möglichkeiten zur Modellrechnung. Bei Methode A (oben) besteht der Grundbereich aus dem ganzen Leiter und dem Lufthraum. Man diskretisiert die Maxwell'schen Gleichungen und löst sie mit der (approximativen) Randbedingung, daß das anomale elektrische Feld \underline{E}_a an der Be-

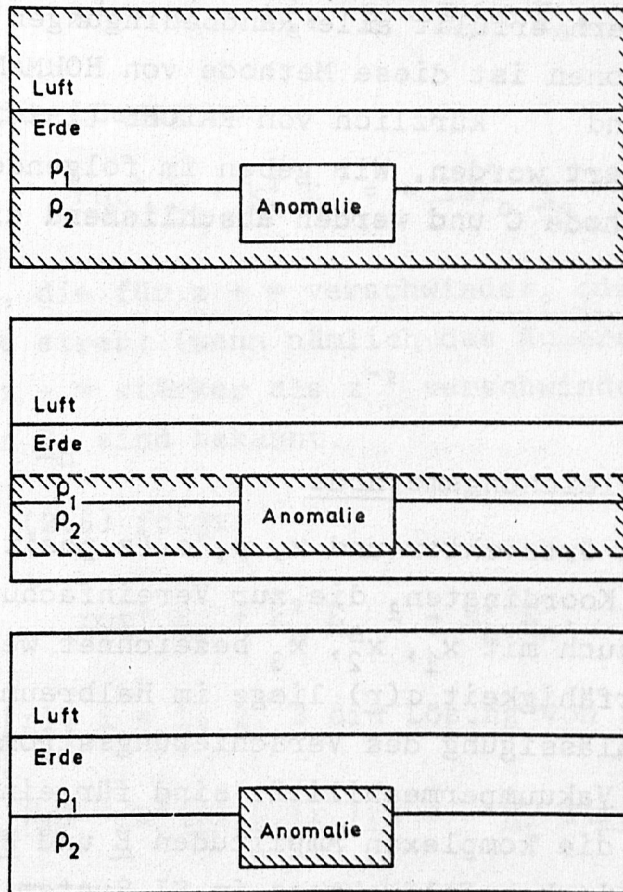


Fig.1: Die drei möglichen Grundbereiche für Modellrechnungen (Berandung schraffiert).

grenzung verschwindet. Deshalb muß der Grundbereich möglichst groß gewählt werden. In Methode B (Fig.1, Mitte) besteht der Grundbereich nur noch aus der anomalen Schicht, in der die Quellen des anomalen Feldes liegen. Mit Hilfe des Greenschen Satzes läßt sich deshalb \underline{E}_a oberhalb (unterhalb) und auf der Begrenzung der anomalen Schicht durch die Randwerte der Tangentialkomponente von $\text{rot } \underline{E}_a$ ausdrücken. Man gewinnt damit eine Randbedingung für die Ober- und Unterseite der anomalen Schicht. An den vertikalen Grenzflächen setzt man etwa $\underline{E}_a = 0$ (oder wendet eine Impedanzrandbedingung an) und löst im Innern die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen für \underline{E}_a . In zwei Dimensionen wird die Methode B von SCHMUCKER (1971) verwendet. In der Methode C schließlich (Fig.1, unten) wird der Grundbereich auf die Anomalie beschränkt und die Maxwell'schen Gleichungen werden in eine inhomogene lineare Vektor-Integralgleichung über dem Grundbereich verwandelt. Der aus der normalen Schichtung abzu-

leitende Tensorkern erfüllt alle Randbedingungen automatisch. Für zwei Dimensionen ist diese Methode von HOHMANN (1971) angegeben worden und kürzlich von RAICHE (1974) auf drei Dimensionen erweitert worden. Wir geben im folgenden eine Darstellung der Methode C und werden abschließend einige Ergebnisse vorführen.

2. Die Integralgleichungsmethode

\underline{r} bezeichnet den Ortsvektor und x, y, z (z positiv nach unten) sind artesische Koordinaten, die zur Vereinfachung der Schreibweise manchmal auch mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden. Der Leiter mit der Leitfähigkeit $\sigma(\underline{r})$ liege im Halbraum $z \geq 0$. Bei der üblichen Vernachlässigung des Verschiebungsstromes und unter der Annahme von Vakuumpermeabilität sind für einen harmonischen Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ die komplexen Amplituden \underline{E} und \underline{H} des elektrischen und magnetischen Feldvektors im SI-System verknüpft durch

$$\text{rot } \underline{H}(\underline{r}) = \sigma(\underline{r}) \underline{E}(\underline{r}) + \underline{j}_e(\underline{r}) \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \underline{E}(\underline{r}) = -i\omega\mu_0 \underline{H}(\underline{r}) \quad (2.2)$$

oder zusammengefaßt

$$\text{rot}^2 \underline{E}(\underline{r}) + k^2(\underline{r}) \underline{E}(\underline{r}) = -i\omega\mu_0 \underline{j}_e(\underline{r}). \quad (2.3)$$

Hier ist \underline{j}_e die Stromdichte des äußeren Magnetfeldes, $\text{rot}^2 = \text{rot rot}$ und

$$k^2(\underline{r}) = i\omega\mu_0 \sigma(\underline{r}). \quad (2.4)$$

$\sigma(\underline{r})$ wird in einen normalen und anomalen Anteil zerlegt, wobei sich ersterer nur in z -Richtung ändern soll:

$$\sigma(\underline{r}) = \sigma_n(z) + \sigma_a(\underline{r}). \quad (2.5)$$

Entsprechend gilt auch

$$k^2 = k_n^2 + k_a^2, \quad \underline{E} = \underline{E}_n + \underline{E}_a,$$

wobei \underline{E}_n als die Lösung von

$$\text{rot}^2 \underline{E} + k_n^2 \underline{E}_n = -i\omega\mu_0 \underline{j}_e \quad (2.6)$$

definiert ist, die für $z \rightarrow \infty$ verschwindet, oder zumindest gegen eine Konstante strebt (wenn nämlich das äußere Feld homogen ist und $\sigma(z)$ für $z \rightarrow \infty$ stärker als z^{-2} verschwindet). Methoden zur Berechnung von \underline{E}_n sind bekannt.

Aus (2.3) und (2.6) folgt

$$\text{rot}^2 \underline{E}_a + k_n^2 \underline{E}_a = -k_a^2 \underline{E}_n. \quad (2.7)$$

Nun sei $\underline{G}_i(\underline{r}_0|\underline{r})$, $i = 1, 2, 3$ die Lösung von

$$\text{rot}^2 \underline{G}_i(\underline{r}_0|\underline{r}) + k_n^2(\underline{r}) \underline{G}_i(\underline{r}_0|\underline{r}) = -\hat{x}_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_0), \quad (2.8)$$

die im Unendlichen verschwindet (\hat{x} bezeichnet in (2.8) und im folgenden einen Einheitsvektor). Multipliziert man (2.8) mit $\underline{E}_a(\underline{r})$ und (2.7) mit $\underline{G}_i(\underline{r}_0|\underline{r})$ und integriert die Differenz über den ganzen Raum (bezüglich \underline{r}), so ergibt sich aus dem Greenschen Vektortheorem (z.B. MORSE & FESHBACH, 1953, p. 1768), nämlich

$$\int (\underline{U} \cdot \text{rot}^2 \underline{V} - \underline{V} \cdot \text{rot}^2 \underline{U}) d\tau = \oint \{ (\hat{n} \times \text{rot} \underline{V}) \cdot \underline{U} + (\hat{n} \times \underline{V}) \cdot \text{rot} \underline{U} \} dA \quad (2.9)$$

($d\tau$ = Volumenelement, dA = Flächenelement), und wegen des Verschwindens von \underline{E}_a und \underline{G}_i für $\underline{r} \rightarrow \infty$

$$E_{ai}(\underline{r}_0) = - \int k_a^2(\underline{r}) \underline{G}_i(\underline{r}_0|\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) d\tau, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9a)$$

Kombiniert man alle drei Komponenten von \underline{E}_a und setzt $\underline{E}_a = \underline{E} - \underline{E}_n$, so lautet (2.9a)

$$\underline{E}(\underline{r}_0) = \underline{E}_n(\underline{r}_0) - \int k_a^2(\underline{r}) \underline{G}(\underline{r}_0|\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) d\tau \quad (2.10)$$

mit dem Greenschen Tensor (dyadische Schreibweise)

$$\mathcal{G}(\underline{r}_0 | \underline{r}) = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \underline{G}_i(\underline{r}_0 | \underline{r}) = \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}(\underline{r}_0 | \underline{r}) \hat{x}_i \hat{x}_j. \quad (2.11)$$

Die Tensorelemente G_{ij} erlauben eine einfache physikalische Interpretation: $G_{ij}(\underline{r}_0 | \underline{r})$ ist die j -te Komponente des elektrischen Feldes, das ein in der normalen Leitfähigkeitsstruktur im Punkt \underline{r}_0 gelegener elektrischer Dipol mit Einheitsmoment in x_i -Richtung im Aufpunkt \underline{r} erzeugt. Erster Index und erstes Argument beziehen sich also auf die Quelle, zweiter Index und zweites Argument auf den Beobachter. Wegen des Reziprozitätsgesetzes der elektromagnetischen Theorie sind Quell- und Beobachterparameter vertauschbar, d.h. es gilt

$$G_{ij}(\underline{r}_0 | \underline{r}) = G_{ji}(\underline{r} | \underline{r}_0). \quad (2.12)$$

Zum Beweis ersetze man in (2.8) \underline{r} durch \underline{r}' , schreibe eine analoge Gleichung für $\underline{G}_j(\underline{r} | \underline{r}')$, multipliziere über Kreuz mit \underline{G}_j und \underline{G}_i , integriere die Differenz bezüglich \underline{r}' über den Vollraum und gewinne (2.12) mit Hilfe von (2.9). Wegen (2.12) kann man anstelle von (2.10) auch schreiben

$$\underline{E}(\underline{r}_0) = \underline{E}_n(\underline{r}_0) - \int k_a^2(\underline{r}) \underline{E}(\underline{r}) \cdot \mathcal{G}(\underline{r} | \underline{r}_0) d\tau \quad (2.10a)$$

Gl. (2.10) oder (2.10a) ist eine vektorielle Fredholm-Integralgleichung 2. Art für das elektrische Feld \underline{E} mit dem Greenschen Tensor als Kern und dem normalen E-Feld als absolutes Glied. Beide Größen hängen nur von der normalen Leitfähigkeitsverteilung ab. Der Integrationsbereich ist die anomale Leitfähigkeitsverteilung. Zur Bestimmung des Kernes \mathcal{G} hat man zunächst die Leitfähigkeit innerhalb der Anomalie durch die normale Leitfähigkeit zu ersetzen. Dann legt man in jeden Punkt dieses Bereichs zwei horizontale und einen vertikalen Dipol und berechnet das resultierende Vektorfeld in jedem Punkt des anomalen Bereichs. Der Rechenaufwand zur Berechnung der Kerne ist erheblich. Er läßt sich jedoch durch Ausnutzung der Reziprozität (2.12) und der horizontalen Isotropie des normalen Leiters stark reduzieren. Insbesondere benötigt man anstelle von zwei nur einen horizontalen Dipol. Da die Kerne von σ_a und \underline{E}_n unabhängig

sind, können die gleichen Kerne verwendet werden, wenn die anomale Leitfähigkeit innerhalb des fest vorgegebenen anomalen Bereichs und/oder das äußere Feld geändert werden (z.B. andere Polarisationsrichtung).

In dem einfachsten, allerdings für die Anwendungen wenig interessanten Fall eines homogenen Vollraumes mit der Leitfähigkeit σ_0 sind die Tensorelemente einfach gegeben durch

$$G_{ij}(\underline{r}_0|\underline{r}) = \left(\delta_{ij} - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{e^{-k_0 R}}{4\pi R} = \quad (2.12a)$$

$$= \frac{e^{-u}}{4\pi R u^2} \{ (1+u+u^2)\delta_{ij} - (3+3u+u^2)(x_i-x_{i0})(x_j-x_{j0})/R^2 \} \quad (2.12b)$$

(z.B. MORSE & FESHBACH, 1953, p. 1781). Hier ist

$$R = |\underline{r} - \underline{r}_0|, \quad k_0 = (i\omega\mu_0\sigma_0)^{1/2}, \quad u = k_0 R$$

und δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Die Tensorelemente für einen homogenen Halbraum lassen sich auf Besselfunktionen reduzieren und werden im Anhang angegeben. Die Elemente für einen Zweischichtenfall gibt RAICHE (1974).

Die einfachste Methode zur Modellrechnung besteht darin, den Störkörper in kleine Quader zu zerlegen und in jedem Quader das elektrische Feld als konstant anzunehmen. Hat man insgesamt N Zellen, so reduziert sich die Integralgleichung auf ein komplexes lineares Gleichungssystem mit 3 N Gleichungen und 3 N Unbekannten. Wenn man das als konstant angenommene \underline{E} vor das Integral zieht, ergeben sich die Koeffizienten durch Integration der G_{ij} über eine Zelle. Den größten Koeffizienten jeder Gleichung ergibt das Element G_{ii} , integriert über die Zelle mit dem Quelldipol. Betrachtet man nur den Anteil G_{ii}^0 der primären Erregung, so erhält man aus (2.12a) für eine Zelle mit den Dimensionen l_x, l_y, l_z z.B. für G_{11}^0

$$k_0^2 \int G_{11}^0 d\tau \approx 1 - (1 + k_0 R_0) e^{-k_0 R_0} + e^{-k_0 R_1} - \frac{R_1}{R_2} e^{-k_0 R_2},$$

wobei der Integrationsbereich die Zelle um \underline{r}_0 ist und

$$R_0 = (3l_x l_y l_z / 4\pi)^{1/3}, \quad R_1 = l_x / 2, \quad R_2 = (R_1^2 + l_y l_z / \pi)^{1/2}.$$

Dabei wurde näherungsweise der Integrationsbereich für den ersten Term von (2.12a) durch eine volumengleiche Kugel und für den zweiten Term durch einen volumengleichen Zylinder mit Achse in x_1 -Richtung ersetzt. Die Terme G_{12}^0 und G_{13}^0 liefern aus Symmetriegründen keinen Beitrag.

Das Gleichungssystem kann entweder iterativ (etwa Gauß-Seidel-Methode) oder durch Matrixinversion gelöst werden. Die letzte Methode kommt wegen des hohen Speicherplatzbedarfes nur für kleinere anomale Bereiche infrage. Bei dreidimensionalen Modellen ist die Ausnutzung von Symmetrien besonders vorteilhaft. Hat man eine anomale Struktur mit zwei vertikalen Symmetrieebenen (etwa homogener Quader), so reduziert sich die Anzahl der Unbekannten auf etwa 1/4, und damit bei Matrixinversion der Speicherplatzbedarf auf etwa 1/16. Bei iterativen Verfahren verringert sich sowohl die Zeit für eine Iteration als auch die Gesamtzahl der Iterationen. Nachteil der Gauß-Seidel-Iteration ist, daß die Leitfähigkeitskontraste nicht zu extrem sein dürfen. Bei numerischen Experimenten wurde für Leitfähigkeitsunterschiede bis 1:100 gute Konvergenz erreicht. Bei höheren Kontrasten kann man entweder auf die Matrixinversion zurückgreifen oder die Methode der Spektralverschiebung von HUTSON & KENDALL (1972) verwenden. - Als Anfangsnäherung wurde stets $\underline{E}^0 = \underline{E}_n$ verwendet.

Wenn das elektrische Feld im Innern der Anomalie bekannt ist, muß mit einem zweiten Satz von Kernen das elektrische und magnetische Oberflächenfeld etwa aus (2.10) berechnet werden. Zur Bestimmung der Magnetfeldkerne hat man die Rotation von (2.10) bezüglich \underline{r}_0 zu nehmen. Die typische Rechenzeit für einen anomalen Quader von $8 \times 4 \times 2$ Zellen, der in einem homogenen Halbraum zehnfach schlechterer Leitfähigkeit liegt, ist bei einem Oberflächennetz von 18×14 Zellen etwa 80 sec (nach 15 Iterationen).

3. Ergebnisse

Die ersten Erfahrungen über Möglichkeiten und Grenzen der Integralgleichungsmethode sind an der sehr viel einfacheren zweidimensionalen Version gewonnen worden. Für ein Testmodell werden in Fig.2 die Ergebnisse der Differentialgleichungsmethode von SCHMUCKER mit den Resultaten der hier verwendeten Integralgleichungsmethode verglichen. Die Übereinstimmung ist recht gut. Die Spitze in H_z ist direkt über einer Kante zu erwarten.

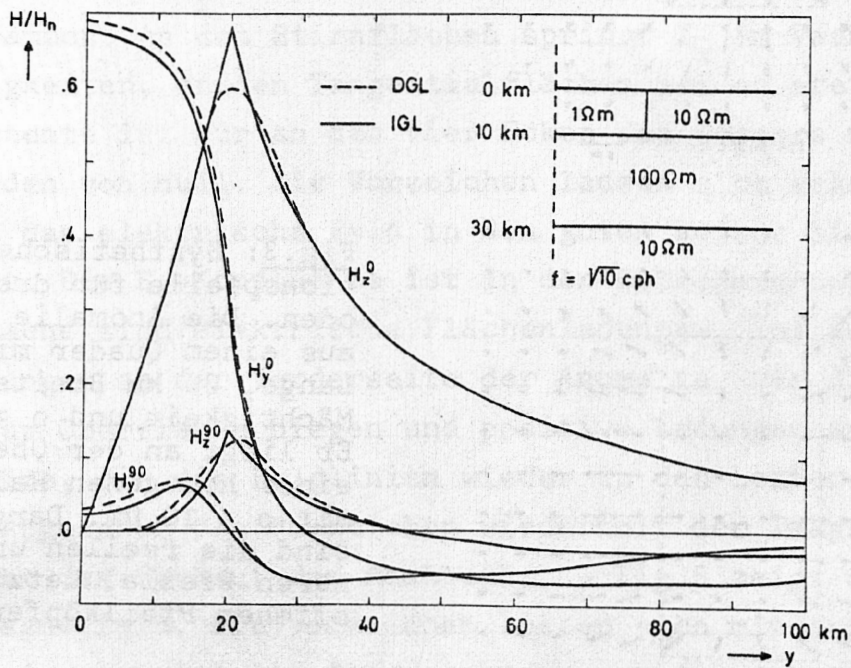


Fig.2: Test der Integralgleichungsmethode, Es induziert ein quasihomogenes Feld in y-Richtung.

Die vollständige und übersichtliche Darstellung der bei dreidimensionalen Modellrechnungen anfallenden Übertragungsfunktionen bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Nimmt man quasihomogene äußere Felder an, so benötigt man zur Beschreibung der komplexen elektrischen und magnetischen Oberflächenfelder für zwei zueinander senkrechte Polarisierungen insgesamt 24 flächenhafte Darstellungen. Vier davon lassen sich zu einer anschaulichen Induktionspfeilkarte zusammenfassen (Real- und Imaginärteil von H_z für beide Polarisierungen). Fig.3 bringt ein Beispiel.

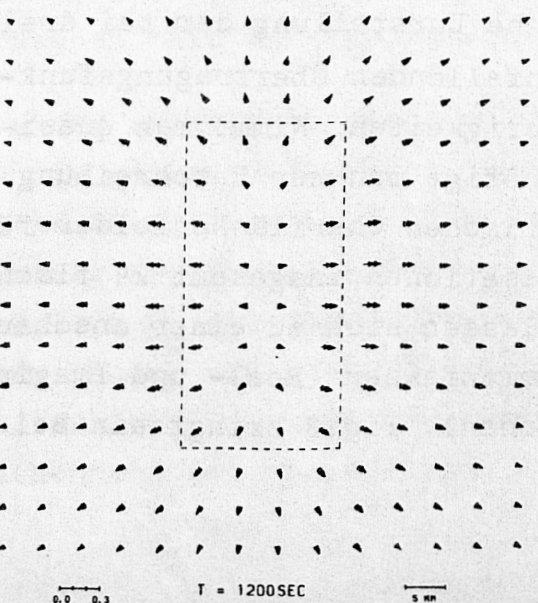
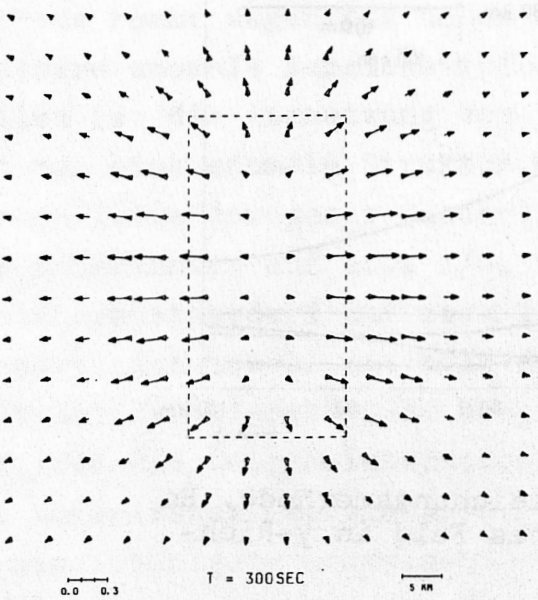
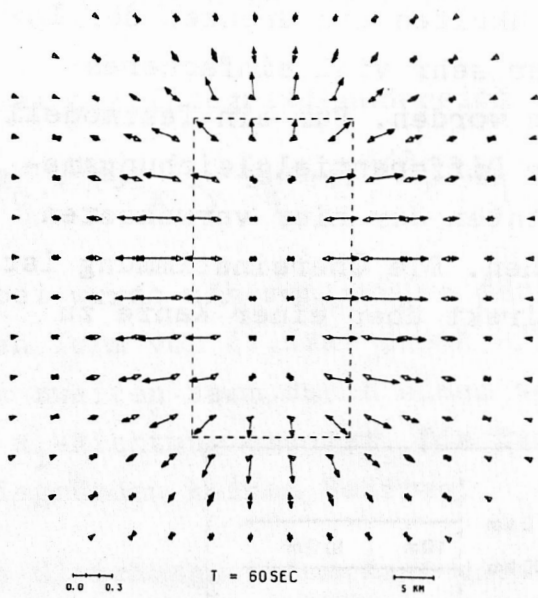


Fig.3: Synthetische Induktionspfeile für drei Perioden. Die Anomalie besteht aus einem Quader mit 40 km Länge, 20 km Breite, 10 km Mächtigkeit und $\rho = 1 \Omega\text{m}$. Er liegt an der Oberfläche eines homogenen Halbraumes mit $\rho = 10 \Omega\text{m}$. Dargestellt sind die reellen und imaginären Pfeile. Letztere mit offenen Pfeilköpfen.

Eine komplette Darstellung aller Feldgrößen wird für ein anderes Beispiel in den Figuren 4 - 7 gegeben. Der Störkörper besteht aus einem Quader mit $\rho = 1 \Omega\text{m}$ an der Oberfläche eines homogenen Halbraumes mit $\rho = 10 \Omega\text{m}$. Die Dimensionen des Quaders: 50 km lang, 25 km breit, 10 km mächtig. Das induzierende Feld hat eine Periode von 120 sec. Fig.4 zeigt das E-Feld für ein äußeres elektrisches Feld in x-Richtung, entsprechend einem äußeren Magnetfeld in y-Richtung. Aufgetragen sind im folgenden stets die auf das absolute Normalfeld normierten anomalen Feldanteile. Die E_x -Komponente bricht im Innern des guten Leiters zusammen. An den Stirnflächen springt E_x im Verhältnis der Leitfähigkeiten, an den Tangentialflächen ist es stetig. Die E_y -Komponente ist nur an den vier Ecken des Quaders wesentlich verschieden von null. Die Vorzeichen lassen sich erklären, wenn man sich das elektrische Feld in den guten Leiter hineingesogen denkt. Die E_z -Komponente ist in der Größenordnung von E_x . Ihre Ursache sind elektrische Flächenladungen, und zwar negative Ladungen an der Vorderseite der Anomalie, die die E -Feldlinien zur Oberfläche biegen und positive Ladungen an der hinteren Seite, die die Feldlinien wieder in den Leiter hineinlenken. Abgesehen vom Vorzeichen wiederholt der Imaginärteil abgeschwächt den Verlauf des Realteils. - Fig.5 zeigt das zugehörige Magnetfeld. Die Vorzeichen lassen sich mit der Vorstellung deuten, daß das Feld aus dem gutleitenden Störkörper herausgedrängt wird.

Fig.6 und 7 zeigen das elektromagnetische Streufeld für den Fall eines äußeren Magnetfeldes in +x-Richtung. Dazu gehört ein äußeres elektrisches Feld in -y-Richtung. Dieser Polarisation entspricht im Zweidimensionalen die H-Polarisation, d.h. das magnetische Störfeld verschwindet, wenn man die Anomalie ins Unendliche verlängert.

Das elektrische Feld an der Erdoberfläche läßt sich in einen toroidalen und poloidalen Anteil aufspalten:

$$\underline{E} = \underline{E}_T + \underline{E}_S = \text{rot}(\underline{\hat{z}} \psi_T) + \text{grad} \psi_S.$$

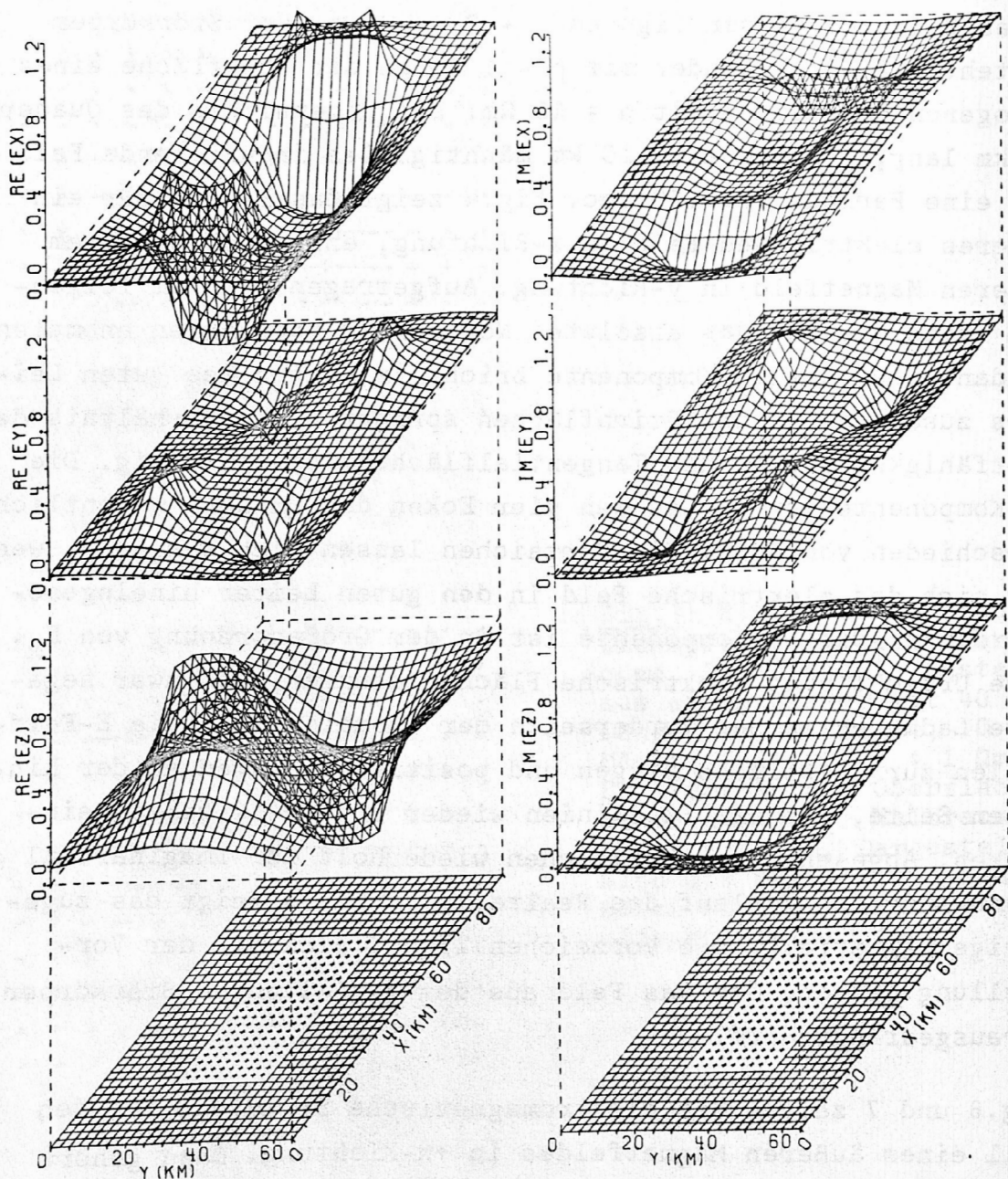


Fig.4: Der anomale elektrische Feldvektor in Real- und Imaginärteil für ein äußeres elektrisches Feld in E_x -Richtung. Dazu gehört ein Magnetfeld in $+y$ -Richtung. Der Störkörper ist ein 50 km langer, 25 km breiter und 10 km mächtiger Quader mit $\rho = 1 \Omega\text{m}$ direkt an der Oberfläche eines Halbraumes mit $\rho = 10 \Omega\text{m}$. Die Periode des induzierenden Feldes beträgt 120 sec. Zur Normierung dient das normale elektrische Feld.

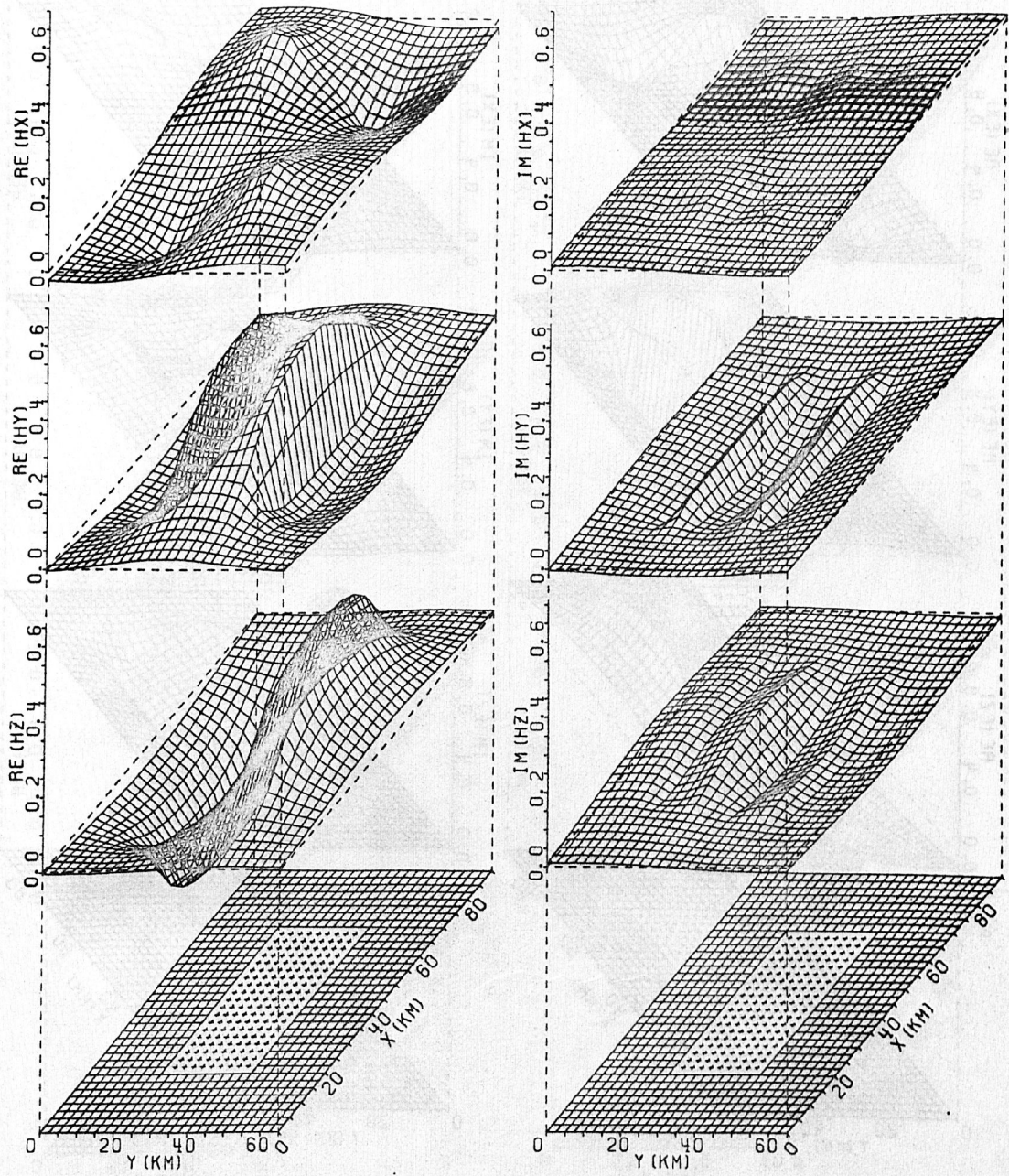


Fig.5: Das anomale Magnetfeld zu dem Modell von Fig.4. Das normale Magnetfeld dient zur Normierung.

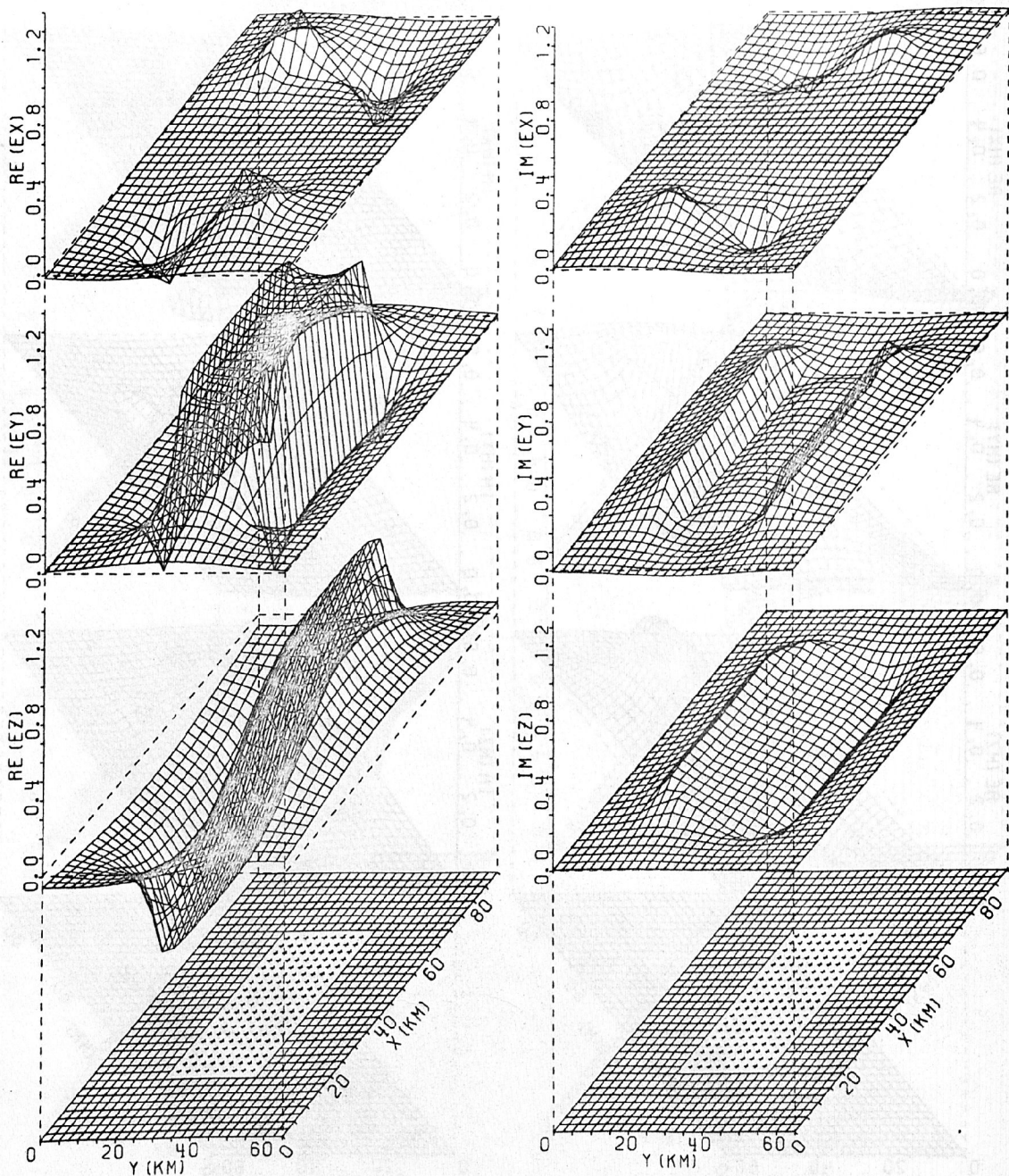


Fig.6: Real- und Imaginärteil des anomalen elektrischen Feldvektors für ein äußeres elektrisches Feld in $-y$ -Richtung. Dazu gehört ein Magnetfeld in $+x$ -Richtung. Derselbe Störkörper und dieselbe Periode wie in Fig.4.

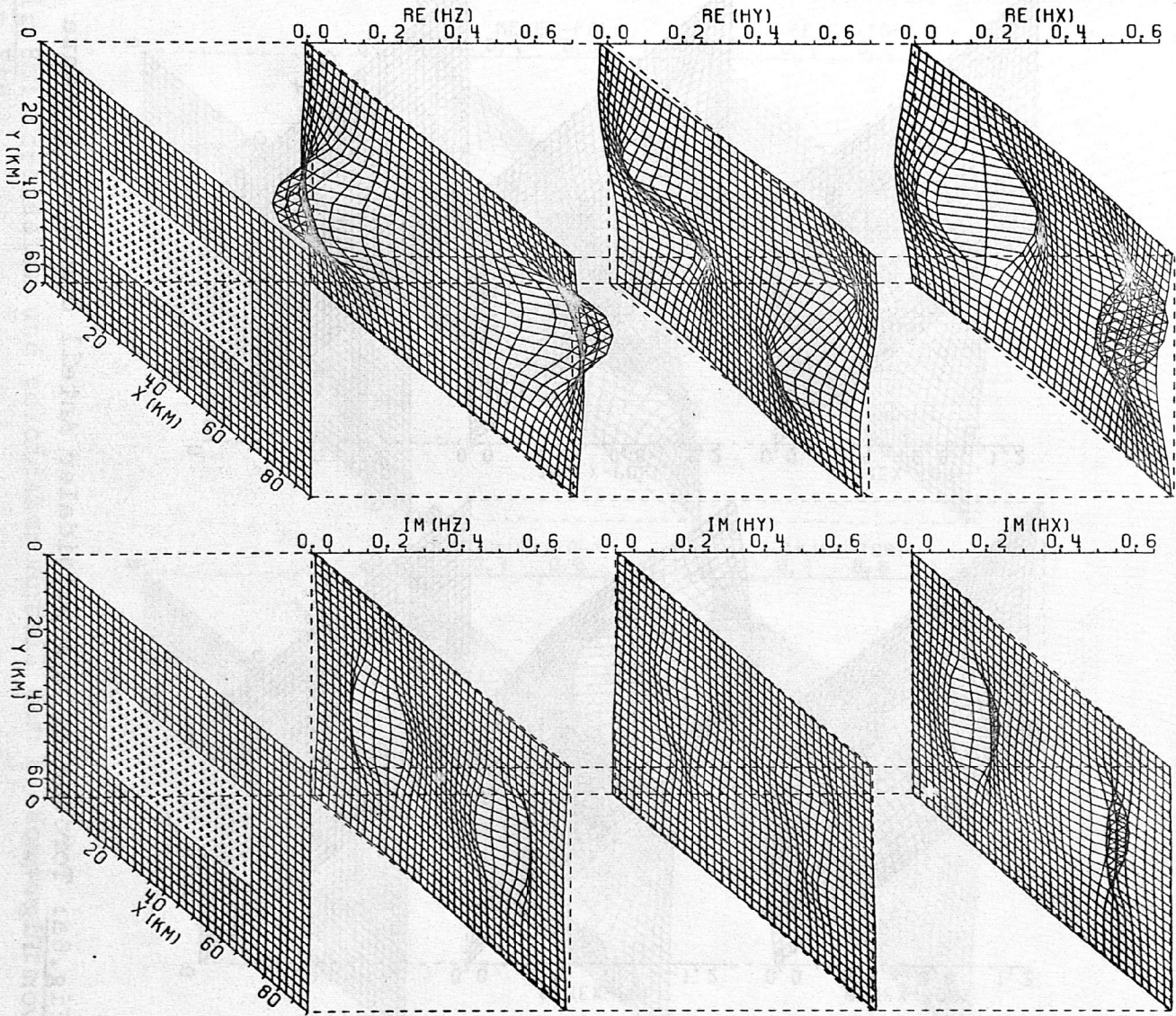


Fig.7: Das anomale Magnetfeld zu Fig.6.

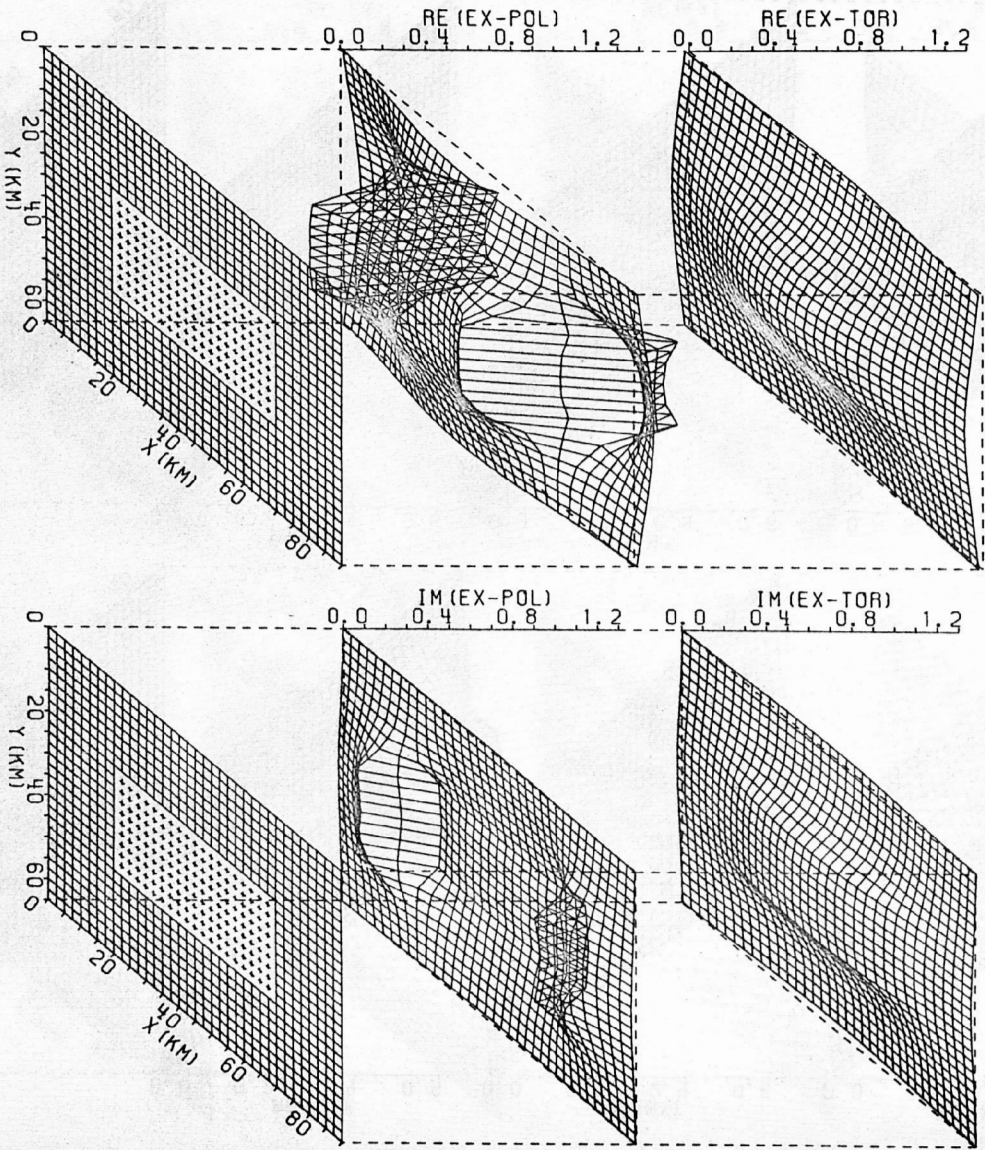


Fig. 8a: Toroidaler und poloidaler Anteil der E_x -Komponente von Fig. 4.

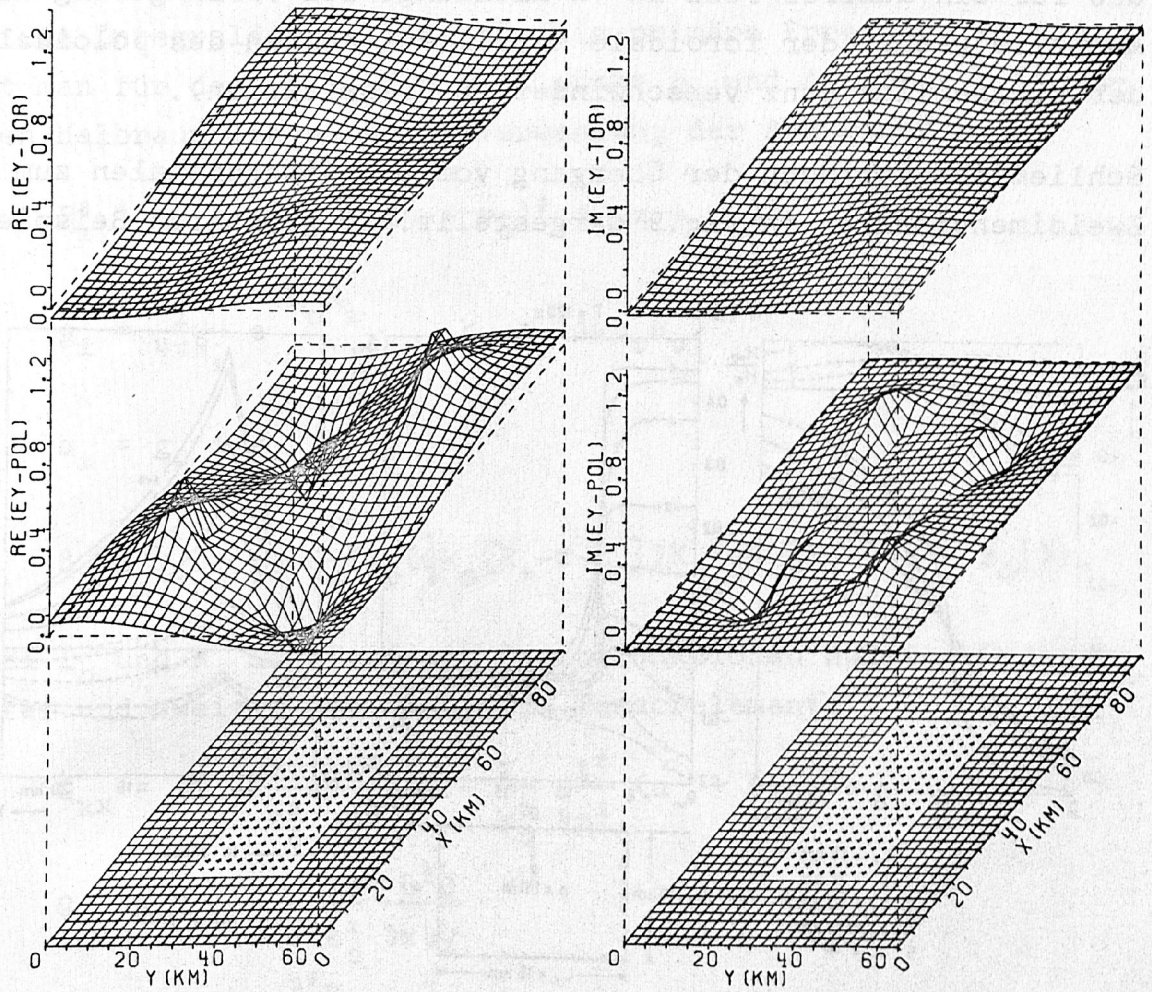


Fig.8b: Toroidaler und poloidaler Anteil der E_y -Komponente von Fig.4.

Der erste Anteil besitzt keine Vertikalkomponente, zum zweiten Anteil gehört kein Magnetfeld (wegen $\text{rot grad} = 0$). Der zweite Anteil ist das elektrische Feld der Flächenladungen. Zur Berechnung der Anteile kann man den Greenschen Tensor \mathcal{G} in einen toroidalen und poloidalen Anteil zerlegen. Fig.8 zeigt die Aufspaltung der Horizontalkomponenten des elektrischen Feldes für ein äußeres Feld in +x-Richtung. Bei Verlängerung der Anomalie wächst der toroidale Anteil auf Kosten des poloidalen, der schließlich ganz verschwindet (E-Polarisation).

Schließlich ist noch der Übergang vom Dreidimensionalen zum Zweidimensionalen in Fig.9 dargestellt. Im gewählten Beispiel

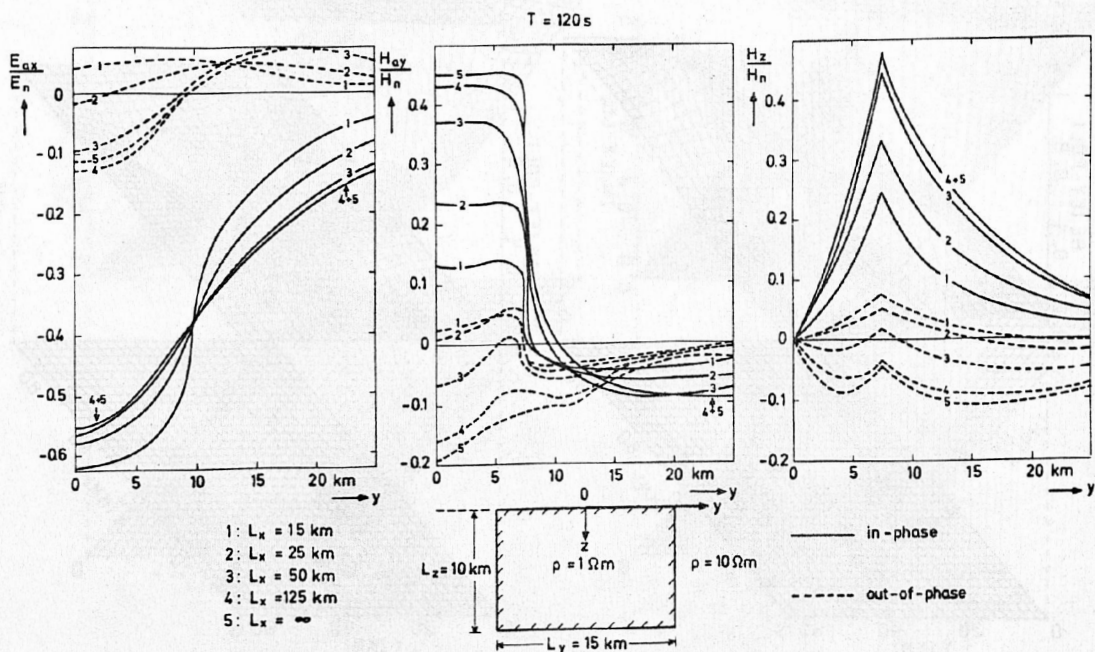


Fig.9: Der Übergang von 3D auf 2D. Dargestellt sind die Felder auf einem Profil in der Mitte eines Quaders der Länge L_x .

liegen auf dem Mittelprofil eines Quaders schon annähernd zweidimensionale Verhältnisse vor, wenn die Länge etwa dreimal größer ist als die Breite.

Anhang

Die Tensorelemente für einen homogenen Halbraum

Für einen Halbraum mit der Leitfähigkeit $\sigma_n = \sigma_0$ lassen sich die Lösungen von (2.8) leicht angeben. Verwendet man die z.B. von SOMMERFELD (1935) formulierten Randbedingungen sowie die dortige Integraldarstellung für die primäre Erregung, so erhält man für den Fall, daß Quellpunkt \underline{r}_0 und Aufpunkt \underline{r} im unteren Halbraum liegen unter Verwendung der Abkürzungen

$$R_{\pm}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z \pm z_0)^2$$

$$g_{\pm} = \frac{1}{4\pi R_{\pm}} e^{-k_0 R_{\pm}}, \quad k_0 = (i\omega\mu_0\sigma_0)^{1/2}$$

$$\alpha_{\pm} = g_{-} \pm g_{+}$$

$$\beta = \alpha_{-} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \{ I_0(\frac{1}{2}k_0[R_{+}-z-z_0]) K_0(\frac{1}{2}k_0[R_{+} + z + z_0]) \},$$

wobei I_0 und K_0 modifizierte Besselfunktionen nullter Ordnung erster und zweiter Art sind, die Tensorelemente

$$G_{xx} = (1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \beta - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\alpha_{-} + \beta)$$

$$G_{xy} = G_{yx} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}$$

$$G_{xz} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_{+}}{\partial x \partial z}$$

$$G_{yy} = (1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \beta - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\alpha_{-} + \beta)$$

$$G_{yz} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_{+}}{\partial y \partial z}$$

$$G_{zx} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_{-}}{\partial z \partial x}$$

$$G_{zy} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_-}{\partial z \partial y}$$

$$G_{zz} = \left(1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \alpha_-.$$

Die Vertikalkomponenten G_{xz} , G_{yz} , G_{zz} , die für $z \rightarrow +0$ verschwinden, streben für $z \rightarrow -0$ gegen die Grenzwerte

$$G_{xz} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial z_0}, \quad G_{yz} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z_0}, \quad G_{zz} = - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z_0^2}$$

mit
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ I_0 \left(\frac{1}{2} k_0 [R_0 - z_0] \right) K_0 \left(\frac{1}{2} k_0 [R_0 + z_0] \right) \right\}$$

und
$$R_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2.$$

Da in den Anwendungen über die Koordinaten des Aufpunktes, Gl. (2.10), oder des Quellpunktes, Gl. (2.10a), integriert wird, braucht ein Teil der oben angeführten Differentiationen nicht ausgeführt werden. (Es gilt $\partial/\partial x = -\partial/\partial x_0$, $\partial/\partial y = -\partial/\partial y_0$ und z.B. $\partial \alpha_- / \partial z = -\partial \alpha_+ / \partial z_0$, $\partial \alpha_+ / \partial z = -\partial \alpha_- / \partial z_0$.)

Literatur:

- HOHMANN, G.W.: Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current. *Geophysics*, 36, 101-131, 1971.
- HUTSON, V.C.L., KENDALL, P.C. & S.R. MALIN: Computation of the solution of geomagnetic induction problems: a general method, with applications. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 28, 489-498, 1972.
- JONES, F.W. & L.J. PASCOE: The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional conductivity inhomogeneities. *Geophys. J.R.astr. Soc.* 27, 479-485, 1972.

LINES, L.R. & F.W. JONES: The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional island structures. Geophys. J.R. astr. Soc. 32, 133-154, 1973.

MORSE, P.M. & FESHBACH: Methods of theoretical physics. McGraw-Hill, New York, 1953.

RAICHE, A.P.: An integral equation approach to three-dimensional modelling. Geophys. J.R. astr. Soc. 36, 363-376, 1974.

SCHMUCKER, U.: Neue Rechenmethoden zur Tiefensondierung. Protokoll Kolloqu. "Erdmagnetische Tiefensondierung" in Rothenberge/Westf., 14.-16.9.1974.

SOMMERFELD, A.: Elektromagnetische Schwingungen. In: FRANK- v. MISES: Differentialgleichungen der Physik, Vol.2. Vieweg, Braunschweig 1935.

(1)

Definiert man $\Delta = \nabla^2$ als Laplace-Operator, so kann man die Theorie der Helmholtz-Gleichung $\Delta u = -f$ in einem Gebiet G mit Rand ∂G auf zwei Arten formulieren:

(a) $\Delta u = -f$ in G , $u = 0$ auf ∂G (Dirichlet)

(b) $\Delta u = -f$ in G , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂G (Neumann)

(c) $\Delta u = -f$ in G , $u = 0$ auf ∂G_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂G_2 (gemischt)

Die Lösung u ist durch das Randwertproblem eindeutig bestimmt.

(2)

Die Helmholtz-Gleichung $\Delta u + k^2 u = -f$ kann ebenfalls in zwei Arten formuliert werden:

(a) $\Delta u + k^2 u = -f$ in G , $u = 0$ auf ∂G (Dirichlet)

(b) $\Delta u + k^2 u = -f$ in G , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂G (Neumann)

Die Lösung u ist durch das Randwertproblem eindeutig bestimmt.

(3)

Die Helmholtz-Gleichung $\Delta u + k^2 u = -f$ kann auch als Randwertproblem formuliert werden:

(a) $\Delta u + k^2 u = -f$ in G , $u = 0$ auf ∂G_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂G_2 (gemischt)

(b) $\Delta u + k^2 u = -f$ in G , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂G_1 , $u = 0$ auf ∂G_2 (gemischt)