W. MÜLLER, Hannover

"Horizontalschichtinterpretationen mit Hilfe des 'Umkehrverfahrens' von D. W. MARQUARDT".

Mittwoch, den 13. 03. 1974

1. Einleitung

Als Ergebnis magnetotellurischer Messungen erhält man nach Verarbeitung der Rohdaten den scheinbaren spezifischen Widerstand ϱ_a in Abhängigkeit von der Periode T an endlich vielen diskreten Stellen $T_1, \ldots, T_m$. Ausgangspunkt der Interpretation ist also der Vektor

$$\varrho_a = \{\varrho_a(T_1), \ldots, \varrho_a(T_m)\} \tag{1}$$

der hier kurz als Meßkurve bezeichnet werden soll.

Für jedes Horizontalschichtenmodell kann man die theoretisch zu erwartenden ϱ_a-Werte $f(T_k, \mathcal{b})$ ausrechnen (CAGNIARD, 1953), wenn man die Perioden T_K und den Vektor

$$\mathcal{b} = \{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots b_{2n-1}\} \tag{2}$$

der Schichtparameter b_i vorgibt, wobei $b_1, \ldots b_n$ die spezifischen Widerstände und $b_{n+1}, \ldots, b_{2n-1}$ die Mächtigkeiten sind.

Das Ziel der Interpretation ist erreicht, wenn ein $\mathcal{b}$ gefunden ist, so daß sich die theoretische Kurve

$$f(\mathcal{b}) = \{f(T_1, \mathcal{b}), \ldots, f(T_m, \mathcal{b})\} \tag{3}$$

mit der Meßkurve deckt:

$$\varrho_a(T_k) = f(T_k, \mathcal{b}) \tag{4}$$

oder vektoriell:

$$\varrho_a = f \tag{5}$$

Dies kann dadurch geschehen, daß man sich einen Atlas theoretischer Modellkurven verschafft und diese mit der Meßkurve vergleicht. Dieses mühsame Probierverfahren kann bei Einsatz eines Computers durch eine gezielte Auswahl und Verbesserung der Modellparameter ersetzt werden, wobei die Modellkurve systematisch an die Meßkurve angepaßt wird.

2. Methode der kleinsten Quadrate

Da der Parametervektor $\mathbf{b}$ unbekannt ist, geht man von einer Schätzung $\mathbf{b}_0$ aus, die die Gleichung (5) aber noch nicht erfüllt, sondern einer Korrektur

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \tag{6}$$

bedarf, die man dadurch bestimmt, daß man $f(T_K, \mathbf{b}_0 + \Delta \mathbf{b})$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von Δb_i entwickelt (WU, 1968) und die Varianz

$$\phi = \| \varrho_a - f(\mathbf{b}_0 + \Delta \mathbf{b}) \|^{+)} \tag{7}$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate minimisiert.

Bricht man die TAYLOR-Entwicklung nach der ersten Potenz von Δb_i ab, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\Delta \mathbf{b} = (P^T P)^{-1} P^T (\varrho_a - f_0) \tag{8}$$

(ZURMÜHL, p. 287, Gleichung (9)),

wobei $f_0 = f(\mathbf{b}_0)$

und P eine Matrix mit den Elementen

$$p_{ik} = \left. \frac{\partial f(T_i, \mathbf{b})}{\partial b_k} \right|_{\mathbf{b}_0} \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, m \\ K = 1, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

und P^T die zugehörige transponierte Matrix ist.

+) $\|\mathbf{v}\|$ ist die Norm (oder Länge des Vektors $\mathbf{v}$, definiert durch $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_i v_i^2$.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Gleichung (8) nicht mit Hilfe der Formel

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

vereinfacht werden kann, weil sowohl P als auch P^T als nicht quadratische Matrizen singulär sind.

3. Die Nichtlinearität des Problems

Da die Funktion $f(T_k, b)$ nicht linear von b abhängt und die TAYLOR-Entwicklung nach Δb nur die erste Potenz berücksichtigt, wird die Gleichung (8) im allgemeinen noch nicht das Endergebnis liefern, sondern eine wiederholte Anwendung des Verfahrens erforderlich sein. Um bei einem Iterationsschritt schon eine möglichst gute Verbesserung zu erhalten, kann man an Stelle von Δb einen verkürzten Korrekturvektor $K\Delta b$ mit

$$0 < K \leqslant 1$$

einführen (MARQUARDT, 1963), wodurch die Konvergenz des Verfahrens zwar prinzipiell sichergestellt wird aber auch sehr langsam erfolgt, wenn die Schätzung noch weit von den wahren Werten entfernt ist, weil gerade dann K nur einen sehr kleinen Wert annehmen darf. Versuche bei uns ergaben unter ungünstigen Voraussetzungen oft nur eine relative Verringerung der Varianz um weniger als ein Prozent bei 1000 Iterationsschritten, so daß das Verfahren in Anbetracht der erforderlichen Rechenzeit als praktisch undurchführbar bezeichnet werden kann.

Eine andere Möglichkeit, der Nichtlinearität Rechnung zu tragen, ist die Einführung der Einheitsmatrix in die Gleichung (8):

$$\Delta b = ((P^T P)^{-1} P + \lambda E)(g_a - f_0) \qquad (9)$$

Von allen möglichen Korrekturen einer vorgegebenen Länge $\|\Delta b\|$ wird, wie MARQUARDT bewiesen hat (MARQUARDT, 1963), die Varianz (vgl. Gl. (7)) am geringsten, wenn Δb der Gleichung

(9) genügt. Der Zahlenfaktor λ dient hierbei der Erreichung einer vorgegebenen Länge. Gleichung (9) wählt also die optimale Richtung eines Verbesserungsvektors $\Delta\beta$ mit vorgegebener Länge aus und verhindert eine Verkürzung auf annähernd den Nullvektor. Hieraus folgt, daß gerade bei einer schlechten Anfangsschätzung die Verbesserung in großen Schritten erfolgt, so daß stets eine ausreichende Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens sichergestellt ist.

4. Praktische Ergebnisse

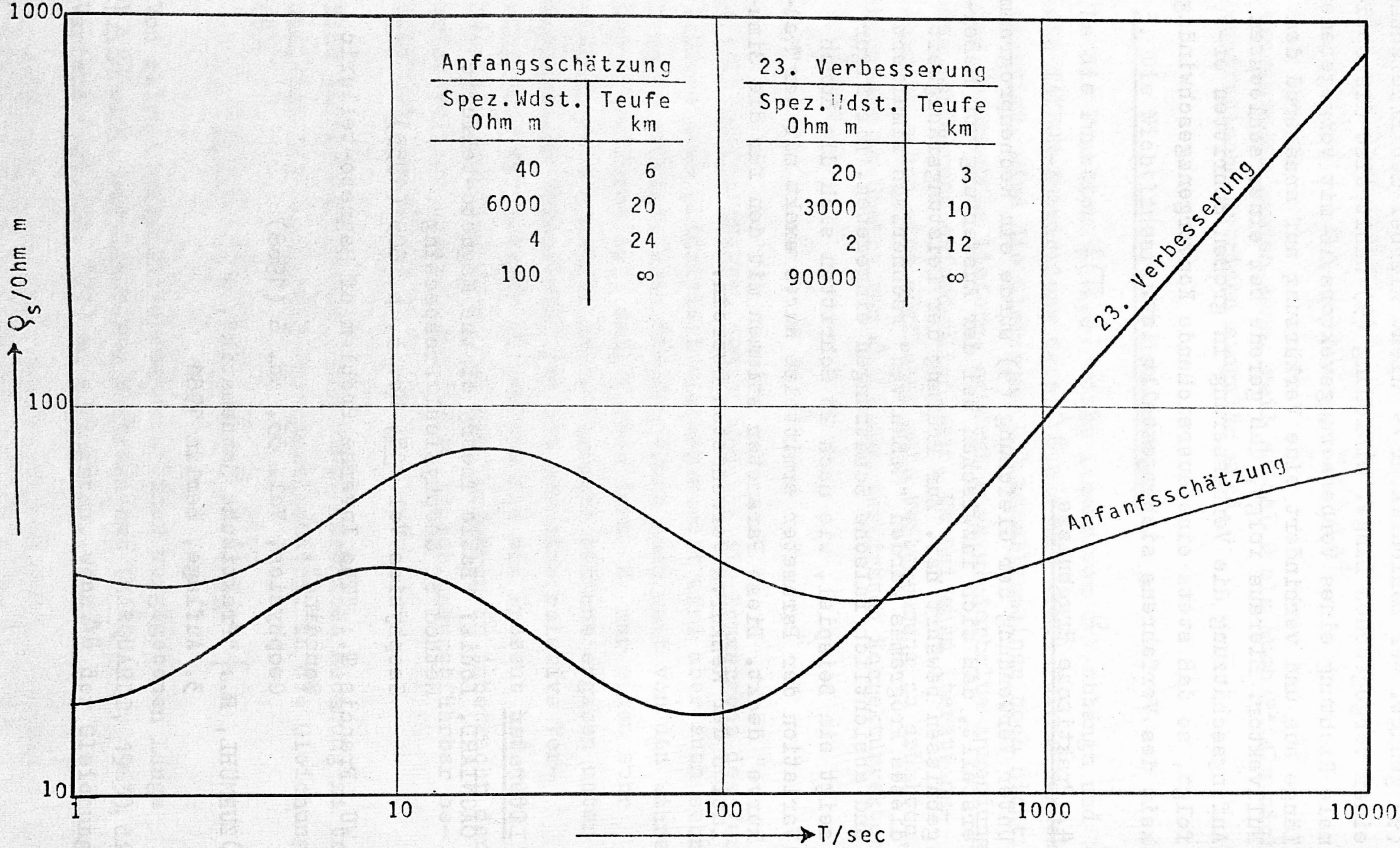
Unter Verwendung der Gleichung (9) wurde ein Rechenprogramm erstellt, daß sich inzwischen bei der Auswertung von Meßergebnissen bewährt hat. Zur Prüfung der Leistungsfähigkeit dieses Programms wurden "Meßkurven" rechnerisch simuliert und absichtlich falsche Schätzungen eingegeben. Die Figur zeigt ein Beispiel, wie nach 23 Schritten sich die durch Variation der Parameter ermittelte Kurve exakt mit der "Meßkurve" deckt. Diese Parameter stimmen mit den für die Simulation der Meßkurve verwendeten überein.

Literatur

CAGNIARD, Louis: "Basic Theory of the Magneto-telluric Method of Geophysical Prospecting". Geophysics Vol. 18, No. 3, p. 605 (1953)

WU, Francis T.: "The Inverse Problem of Magneto-telluric Sounding". Geophysics, Vol. 33, No. 6 (1968)

ZURMÜHL, R.: "Praktische Mathematik", 3. Auflage, Berlin 1961


Anfangsschätzung
Spez.Wdst. Ohm m | Teufe km
40 | 6
6000 | 20
4 | 24
100 | ∞
23. Verbesserung
Spez.Wdst. Ohm m | Teufe km
20 | 3
3000 | 10
2 | 12
90000 | ∞
23. Verbesserung
Anfanfsschätzung
ρs /Ohm m
1000
100
10
1
10
100
1000
10000
T/sec