

## Netzwerkmodell - Betrachtungen zur geometrischen Deutung des Hystereseeffektes bei Kapillardruckkurven und die Konsequenzen für Inversionsaussagen

M. Jonas

### Zusammenfassung

Die in praxi gemessenen Kapillardruckkurven  $\sum H_g = \sum H_g(C)$  (mit Sättigung  $\Sigma$  und Kapillarität  $C$ ) sind bei gegebener Porenradienverteilung (als Parameter) nicht nur Funktionen des normierten Kapillardruckes  $C$ , sondern auch der zugrundeliegenden Netzwerkstruktur. Es ist daher beabsichtigt, mit Hilfe von Betrachtungen an Netzwerkmodellen mit beliebiger Netzwerkstruktur und (zunächst) kreiszylindrischen Kapillaren die Ursachen für das Entstehen von Hystereseeffekten aufzuzeigen. Ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung kann auf der Grundlage einer  $k = 2$ -Radienverteilung geschehen. Die Konsequenz ist eine analytisch-geometrische Deutung des Hystereseeffektes, die auf dem Zusammenhang zwischen Punkten des Sättigungs- und des Entsättigungsastes beruht. Hierbei liegt ein Raum zugrunde, der durch die  $k-1$  relativen Radienhäufigkeiten und die Sättigung aufgespannt wird, und in dem nun die Kapillardrücke als Parameter auftreten. Dem einfachen "Kapillarbündelmodell" fallen zentrale Abbildungseigenschaften in diesem Raum zu. Aussagen zur Inversion - das ist der Rückwärtsschluß von einer durchgeführten Kapillardruckmessungen auf die tatsächlich vorliegende Kapillarradienverteilung - werden diskutiert, ebenso der Übergang auf Mehrradienverteilungen ( $k > 2$ ).

Die "Kapillardruckkurve" und das Kapillardruckexperiment sind im allgemeinen recht gut bekannt. Im folgenden soll modelltheoretisch auf dieses petrophysikalische Experiment eingegangen werden, und das Ziel wird eine verbesserte Auswertetechnik bzw. Inversion sein - das ist der Rückwärtsschluß von der aufgenommenen Kapillardruckkurve auf die tatsächlich vorliegende Radienverteilung im Porenraum.

Der Gang der Messung ist - ohne auf technische Details der Probenvorbereitung und des Experimentablaufs näher einzugehen - einfach beschrieben (Abb. 1): Eine Gesteinsprobe wird in eine Kammer eingebracht, in die nach anschließender Evakuierung Quecksilber (gepumpt wird. Dieses wird infolge schrittweiser Druckerhöhung - nachdem die Kammer selbst gefüllt ist - zunehmend gegen den Kapillardruck in die Probe gepreßt.

Das Experiment wird dann folgendermaßen graphisch umgesetzt (Abb. 2): Der jeweils eingestellte Druck wird gegen das eingedrungene, ebenfalls gemessene Hg-Volumen bzw. - nach Normierung auf das Gesamtporenvolumen - gegen die zugehörige Sättigung  $\sum_{Hg}$  aufgetragen, und man erhält eine Kurve dieser prinzipiellen Gestalt. Nach erreichtem Schwelldruck, der durch die größten außenliegenden Porenzugänge der Probe gegeben ist, werden in Abfolge die nächst kleineren bis hin zu immer kleineren Porenräumen gefüllt. Hier ist dann ein sehr schnelles Anwachsen des Druckes zu verzeichnen, denn es wird immer schwieriger, das nichtbenetzende Quecksilber in die kleinen und kleinsten Zwickel zu pressen. Derselbe Versuch läßt sich "rückwärts" durchführen, und das Ergebnis ist eine Hysterese, ein mit der Injektionskurve nicht zusammenfallender Drainageast, der in aller Regel nicht in den jungfräulichen Anfangszustand zurückführt. Der Grund hierfür ist in dem Abreißen des Hg-Fadens und dem Verbleiben einer partiellen Hg-Sättigung im Porenraum zu sehen.

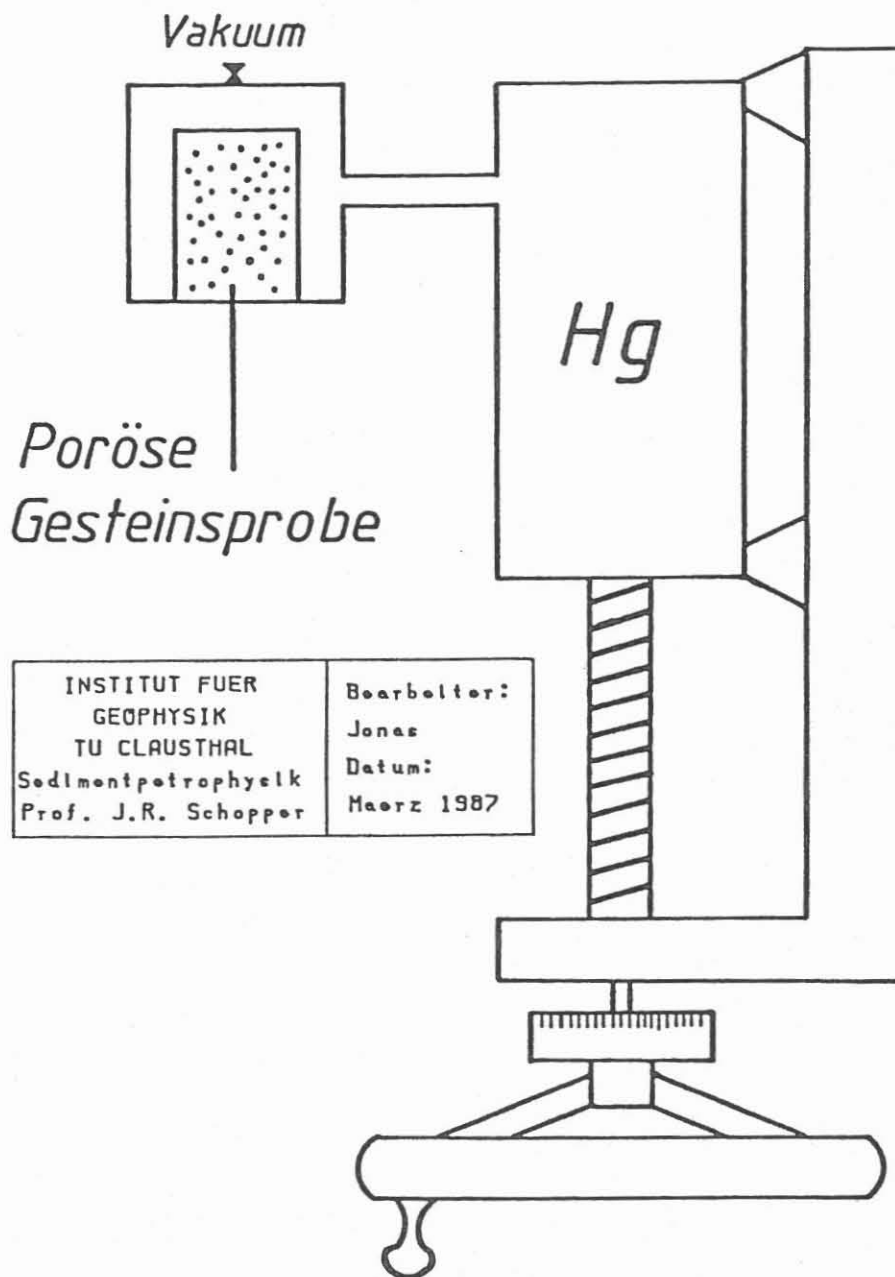
Das Kapillardruckexperiment macht also - in Form der Kapillardruckkurve - eine ganz spezifische Aussage über das untersuchte Gestein, genauer über die Porengrößenverteilung in Verbindung mit der im Gestein vorliegenden Netzwerkstruktur, denn beide Porenraumcharakteristika, die als Parameter in dieser Darstellung fungieren, beeinflussen sowohl den Füll- als auch den Entsättigungsvorgang; und unsere Aufgabe soll es sein, aus der Messung auf den einen der beiden Parameter, die Porengrößenverteilung, rückzuschließen.

Dazu soll ein wenig mehr auf den grundlegenden, hinter diesem Experiment stehenden Gedanken eingegangen werden:

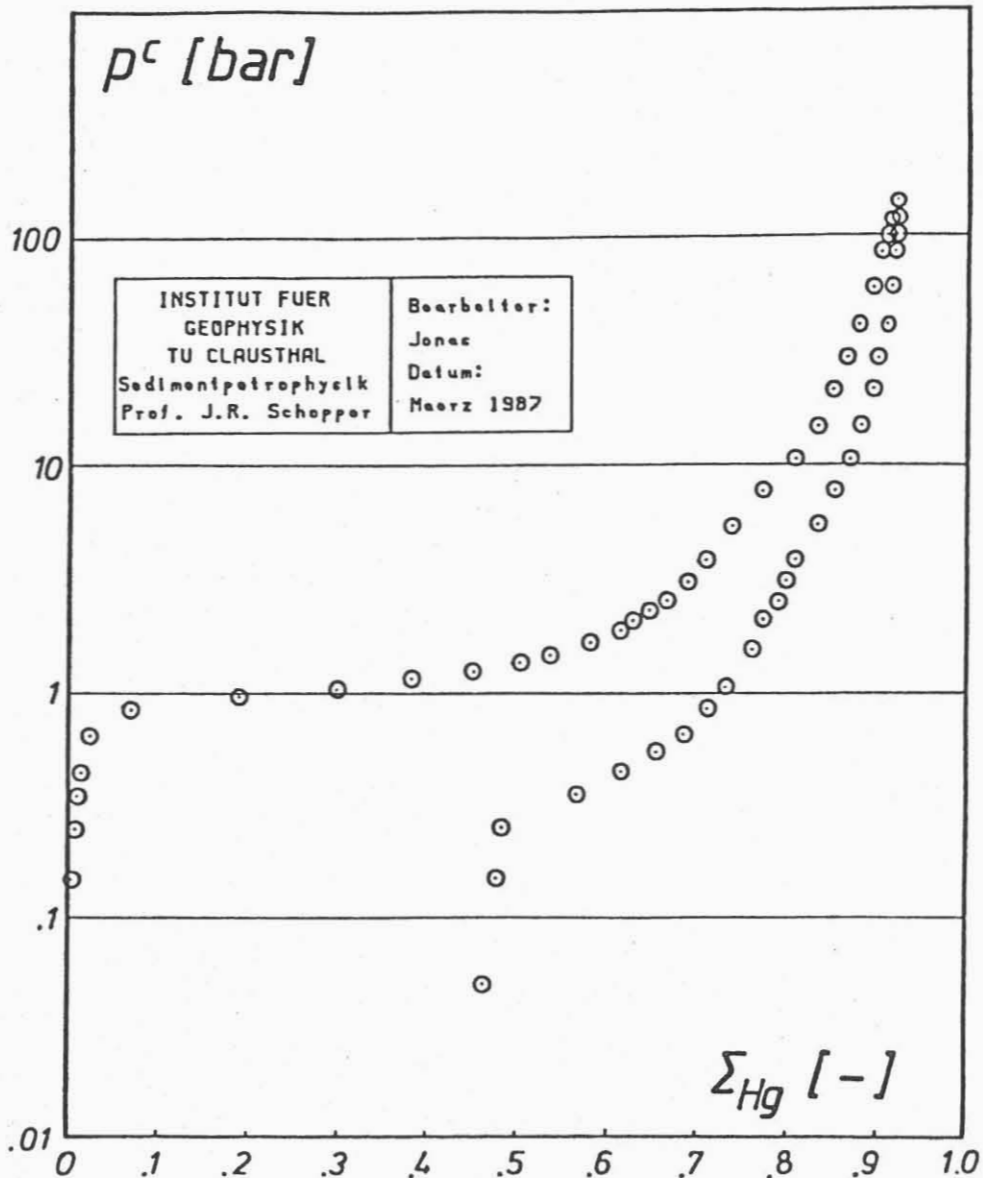
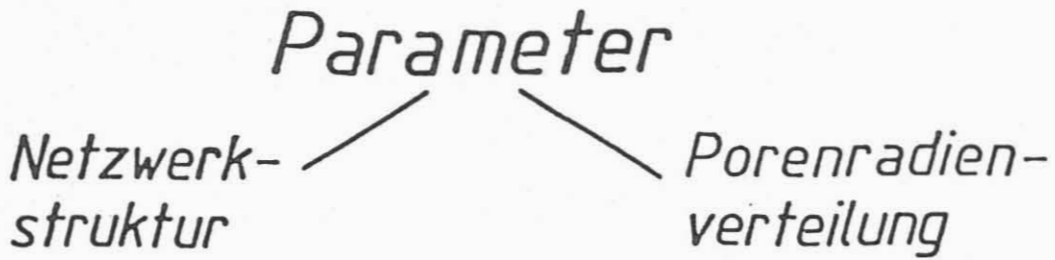
Der auf der Ordinate aufgetragene Kapillardruck ist eine Funktion des effektiven Porenradius - falls die Darstellung des Porenraumes zunächst mit Hilfe kreiszylindrischer Kapillaren

# Prinzipskizze Kapillari- meter

---



# Kapillardruckkurve eines B52-Sandsteines



akzeptiert wird, so läßt sich dieser Zusammenhang sogar quantitativ erfassen -, während die Sättigungsachse als kumulative Häufigkeit verstanden werden kann. Eine diesen Sachverhalt verdeutlichende und vertrautere Darstellung gewinnt man, wenn wir die Kapillardruckkurve einschließlich beider Achsen an der Winkelhalbierenden spiegeln und zur inversen Kapillardruckkurve  $\sum H_g = \sum H_g(p^c)$  übergehen (Abb. 3). In Anbetracht der Tatsache, daß eigentlich der Druck die unabhängige und die Sättigung die abhängige Variable ist, ist diese Art der Auftragung die wesentlich sinnvollere. Aus Gründen der Gewohnheit und um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, soll im folgenden jedoch weiterhin mit der ersten Darstellungsform, der konventionellen Kapillardruckkurve, gearbeitet werden. Dabei soll der gedankliche und später noch zu rechtfertigende Vorgriff gestattet sein, daß beim Entsättigungsvorgang vorerst kein Abreißen des Quecksilbers erfolge und der zugehörige Ast bis in den Urzustand zurückläuft.

Für den Fall, daß ein Kapillarbündelmodell (KBM) anstelle des Gesteins mit seiner komplizierten Netzwerkstruktur vorläge (Abb. 4), wäre die Lösung der gestellten Aufgabe sehr einfach. Hierbei handelt es sich um ein Modell mit der gleichen Kapillarradienverteilung, bei dem sämtliche Kapillaren parallel angeordnet sind und aufgrund der fehlenden Netzwerkstruktur keine Hysterese auftreten kann. Beide Vorgänge - Injektion und Drainage - würden also durch eine Kurve beschrieben und dann würde eine einfache Differentiation die gesuchte Kapillarradienverteilung liefern.

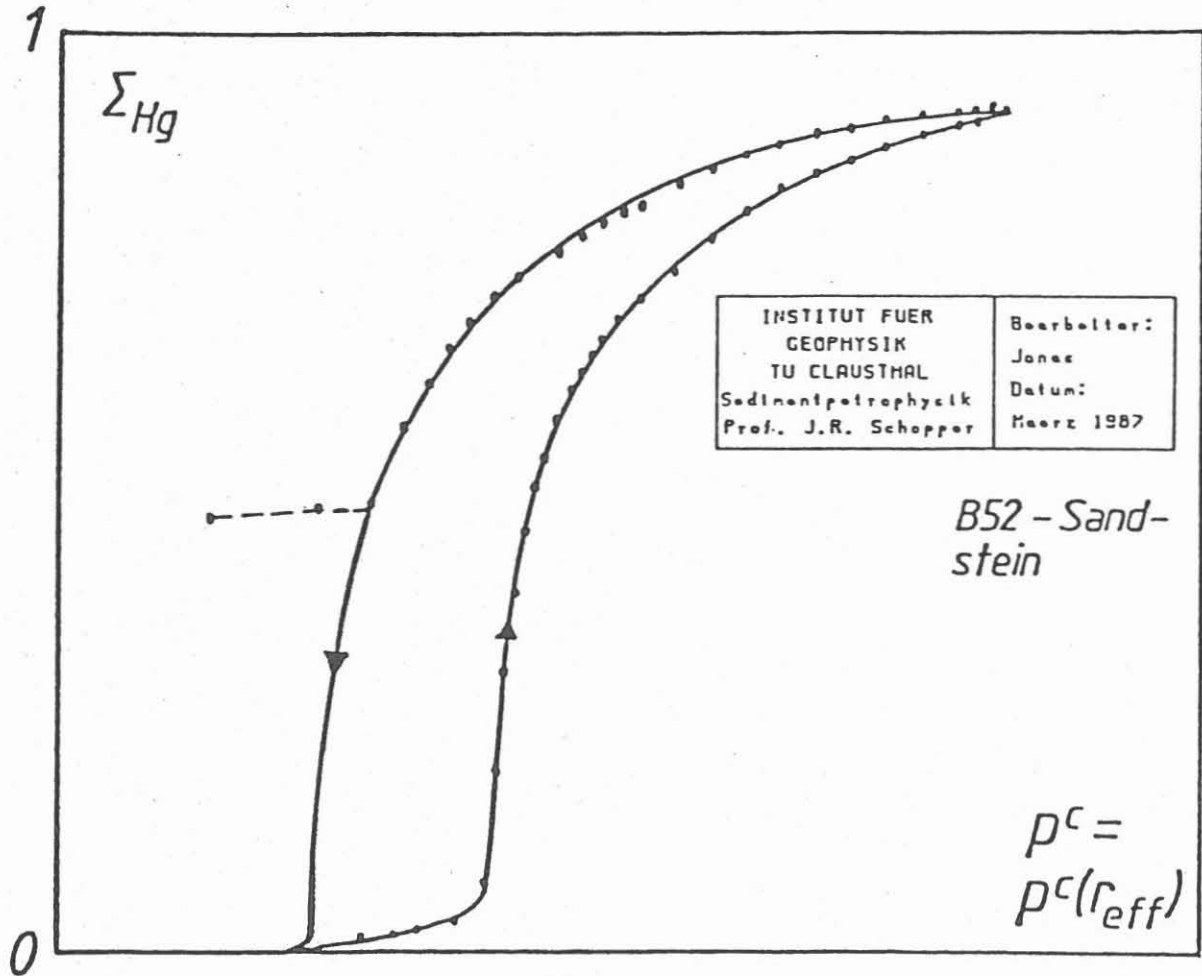
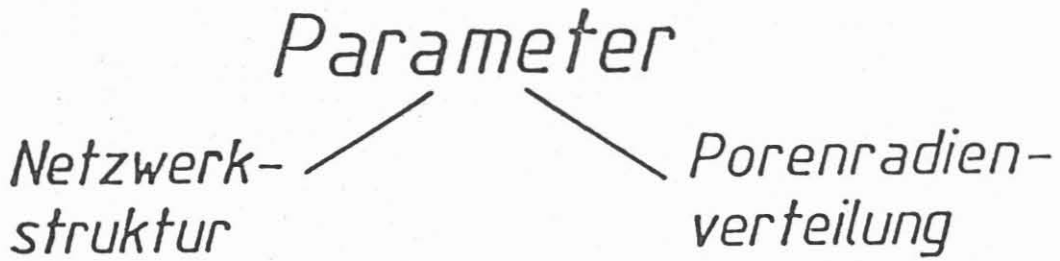
Im Falle unseres Gesteins mit einer vorhandenen Netzwerkstruktur sind die Verhältnisse allerdings etwas schwieriger geartet. Hier können durchaus - um zunächst beim Sättigungsvorgang zu bleiben - potentiell füllbare Kapillaren isoliert im Netzwerkinnen liegen, so daß sie keinen Kontakt mit anderen, bereits mit Hg gefüllten Kapillaren haben; also trotz erreichtem zugehörigen Kapillardruck bleiben sie weiterhin leer. Bei jeweils gleichem Kapillardruck erhält man somit eine geringere Sättigung als beim KBM und kommen mit dem Sättigungsast oberhalb ( $\succ$ ) der KBM-Kurve zu liegen.

Bei dem Entsättigungsvorgang ist es dagegen genau umgekehrt: Nicht alle potentiell entleerbaren Kapillaren werden - wieder aufgrund ihrer Lage im Netzwerk - auch tatsächlich entleert, so daß letztlich eine größere Sättigung als beim KBM zurückbehalten wird und dieser Ast somit unterhalb ( $\prec$ ) der KBM-Kurve verläuft.

Ob Sättigungs- oder Entsättigungsast - würde jetzt differenziert werden, erhielte man nicht die wahre Kapillarradienverteilung. Die beiden Ästen anhaftende Häufigkeitsverzerrung ist zuvor rückgängig zu machen - d. h., per Entzerrung

Abb. 3

Inverse Kapillardruckkurve  $\Sigma_{Hg} = \Sigma_{Hg}(p^c)$



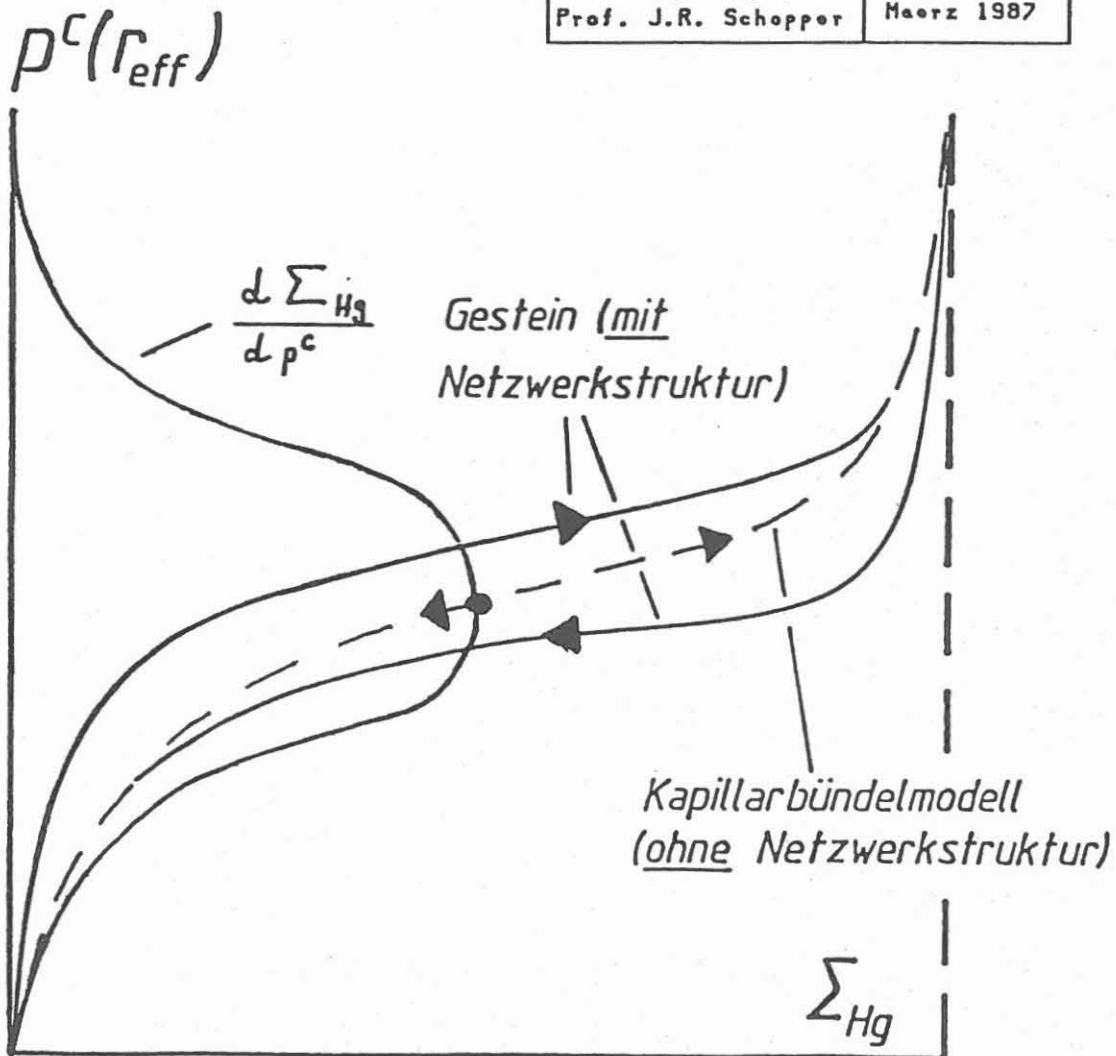
# Kapillardruckkurve $p^c$ vs $\Sigma_{Hg}$

## Parameter

Netzwerk-  
struktur

Porenradien-  
verteilung

INSTITUT FUER GEOPHYSIK TU CLAUSTHAL Sedimentpetrophysik Prof. J.R. Schopper	Bearbeiter: Jonac Datum: Maerz 1987
--	--



oder Dekonvolution. Dies ist eine - natürlich von der Netzwerkstruktur abhängige - Abbildung zurück auf die KBM-Kurve. Erst dann liefert eine Differentiation wieder das gewünschte Ergebnis.

Eine exakte Lösung für die jeweils durchzuführende Dekonvolution ist nur über Studien graphentheoretisch kombinatorischer Natur an Netzwerkmodellen zu erhalten. Da dieses ein recht aufwendiges Unterfangen ist, soll stattdessen ein Näherungsverfahren vorgestellt werden, bei dem die Hysterese ausgenutzt und der Aufwand wesentlich eingeschränkt wird.

Dazu ist es ratsam, modelltheoretisch vorzugehen und das gesamte Kapillardruckexperiment z. B. an einem regelmäßigen Quadratmaschen-Netzwerk (QMN) zu simulieren (Abb. 5). Trotz dieser Einschränkung und der folgenden Vereinfachungen, die nur dazu dienen, das Modell behandelbar zu machen, wird der Übergang auf realistische Verhältnisse - und dies soll ausdrücklich betont werden - später möglich sein.

So soll/sollen vorerst:

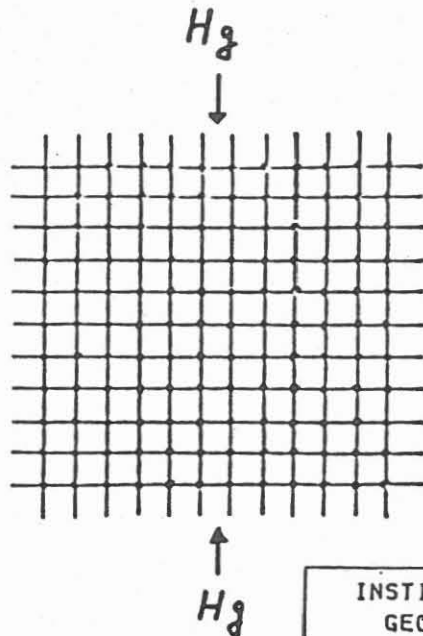
- nur Vorgänge im Porenraum, d. h. in den Kapillaren interessieren;
- alle Zweigkapillaren im Netzwerk kreiszylindrisch sein und die mittlere Länge  $l$  besitzen;
- eine 2-Radienverteilung vorliegen, etwa gemäß Abb. 5. Die genaue Lage der jeweiligen Kapillaren im Netzwerk ist jedoch nicht bekannt;
- im Netzwerkinnen anfangs Vakuum herrschen - allerdings ohne physikalische Wirkung -, das an zwei Seiten des Netzwerkes über ein für Hg undurchdringliches Diaphragma mit einem Vakuumreservoir, in Verbindung steht. Von den so entstandenen Sackgassenkapillaren kann das Hg dann - nach vollständiger Sättigung des Netzwerkes - später wieder seinen Rückweg antreten;
- die Knoten im Netzwerk kein eigenes Volumen besitzen und auch kein Abreißen der Hg-Phase zulassen; d. h. der Entsättigungsast wird bis in den jungfräulichen Anfangszustand mit Sättigung Null zurücklaufen.

Mit diesen Voraussetzungen läßt sich ein solches Quadratmaschen-Netzwerkmodell in Angriff nehmen, aber es soll eine andere Vorgehensweise gewählt werden:

Der Kapillardruck  $p_1^C$  soll als erreicht und gedanklich als fest vorgegeben angenommen werden (Abb. 6). Die 2-Radienverteilung soll stattdessen variieren, d. h.  $n_1$  und  $n_2$ , und zwar derart, daß ihre Summe, die Gesamtzahl aller Kapillaren ( $N$ ), weiterhin konstant bleibt. Die Netzwerkstruktur soll ebenfalls erhalten bleiben.



# Regelmäßiges Quadratmaschen-Netzwerkmodell



INSTITUT FÜR GEOPHYSIK TU CLAUSTHAL Sedimentpetrophysik Prof. J.R. Schopper	Bearbeiter: Jonec Datum: März 1987
---	---

## Vereinbarungen:

- nur Vorgänge im Porenraum von Interesse
- alle Kapillaren kreiszylindrisch mit der mittleren Länge  $\bar{l}$
- beliebige 2-Radienverteilung:

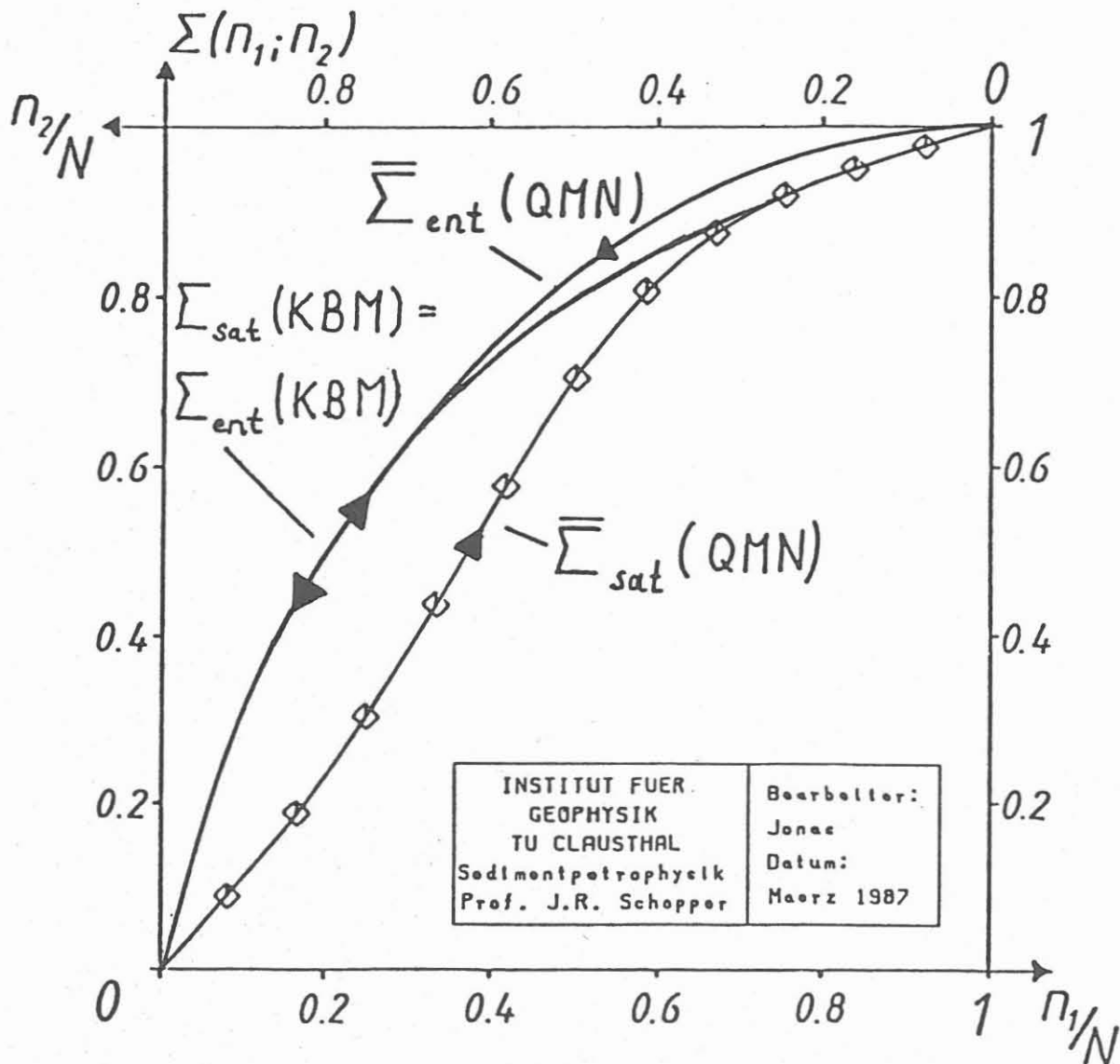
$$\begin{array}{l}
 n_1 \times r_1 \leftarrow \text{korrespondierender} \rightarrow p_1^c \\
 n_2 \times r_2 \leftarrow \text{Kapillardruck} \rightarrow p_2^c \\
 \text{mit } N = n_1 + n_2 ; r_1 > r_2 \Leftrightarrow p_1^c < p_2^c
 \end{array}$$

- im Netzwerkinneren Vakuum ohne physikalische Wirkung
- Knotenstellen mit dem Volumen Null; kein Abreißen der Hg-Phase

Abb. 6

Verhalten eines ausgewählten QMNes hinsichtlich der Erwartungswerte  $\bar{\Sigma}_{sat}(n_1;n_2)$ ,  $\bar{\Sigma}_{ent}(n_1;n_2)$  und gegenüber dem entsprechenden KBM

PARAMETER: $p_1^c$ , NETZWERK- STRUKTUR	SÄTTIGUNG: 0 $\rightarrow$ $p_1^c$ ENTSÄTTIGUNG: $p_2^c \rightarrow p_1^c$
$r_1 = 2 r_2$	$n_1 + n_2 = N$



Es ist bereits bekannt: bei erreichtem Kapillardruck  $p_1^c$  sind - im Falle der Sättigung - alle  $n_1$  Stück  $r_1$ -Kapillaren potentiell füllbar, die übrigen,  $n_2$  Stück  $r_2$ -Kapillaren, sind dagegen weiterhin nicht füllbar.

Für jede vorgegebene 2-Radienverteilung - das Radienverhältnis wurde hier willkürlich mit 2 gewählt - läßt sich nun das zu erwartende, mit Hg gefüllte Netzwerkvolumen bzw. - nach Normierung auf das Gesamtporenvolumen - die zugehörige Sättigung berechnen. Diese Sättigungswerte lassen sich nun in einen Graph eintragen, in dem die Abszisse die relative Radienhäufigkeit  $n_1/N$  und die Ordinate die Sättigung  $\sum(n_1, n_2)$  angibt - angedeutet durch die Rauten in Abb. 6. Im nächsten Schritt ist die 2-Radienverteilung jetzt noch kontinuierlich zu denken. Die entsprechende Kurve soll mit " $\sum_{\text{sat}}(\text{QMN})$ " bezeichnet werden - der Querbalken als Hinweis darauf, daß es sich hier um einen Erwartungswert handelt, der Index "sat" verweist auf den Sättigungsvorgang und "QMN" schließlich steht für Quadratmaschen-Netzwerk.

Um über diese für das Quadratmaschen-Netzwerkmodell spezifische Kurve etwas aussagen zu können, ist es zweckmäßig, das entsprechende KBM heranzuziehen, dessen Kurve sich in einem derartigen Graphen stets angeben läßt. Sie ist wie gesagt hysteresefrei, worauf auch ihre Kennzeichnung

$$"\sum_{\text{sat}}(\text{KBM}) = \sum_{\text{ent}}(\text{KBM})"$$

hinweisen soll - diesmal ohne Querbalken, "ent" für Entsättigungsvorgang und "KBM" für Kapillarbündelmodell. Sie muß natürlich in Anbetracht der Tatsache, daß bei paralleler Anordnung der Kapillaren stets maximale Sättigung vorliegt, oberhalb ( $\supset$ ) unserer zuerst eingetragenen Kurve verlaufen.

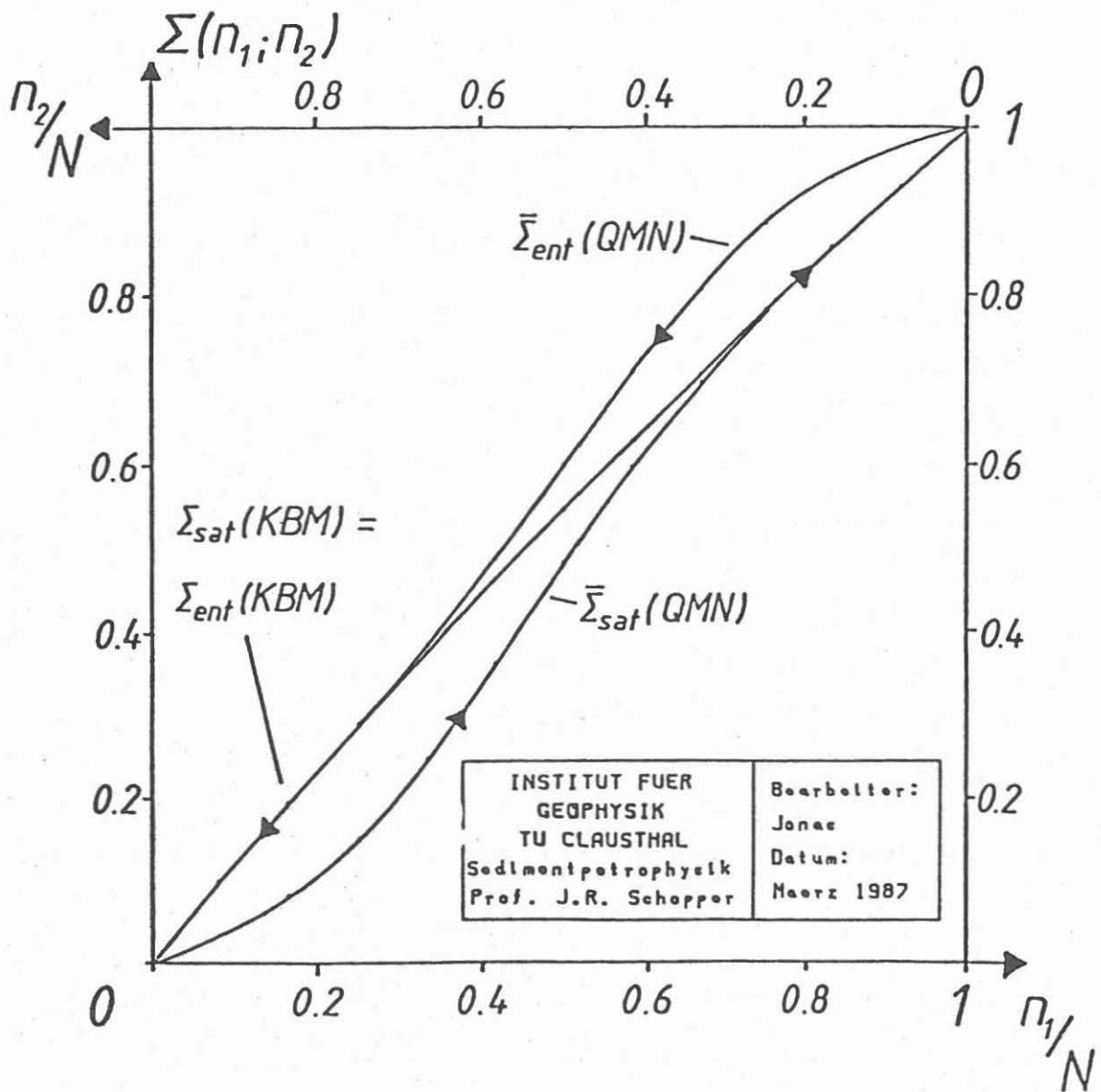
Bei Vergleich ist festzustellen, daß sich beim QMN nach einem anfänglich entgegengesetzten Verhalten mit zunehmender Anzahl potentiell füllbarer  $r_1$ -Kapillaren eine Annäherung an die jeweils maximale Sättigung einstellt. Dieses asymptotische Verhalten ist auch verständlich, denn je größer  $n_1$ , um so schwieriger wird es werden, lediglich potentiell füllbare Kapillaren isoliert im Netzwerk unterzubringen, so daß sie nicht mit tatsächlich gefüllten Kapillaren in Kontakt kommen.

Die soweit geschilderten Gedanken können natürlich auch auf den Entsättigungsvorgang übertragen werden: Das gleiche Modell, eine variable 2-Radienverteilung, Druckerniedrigung von  $p_2$  auf  $p_1$ , d. h. nun sind die  $r_2$ -Kapillaren die potentiell entleerbaren, die  $r_1$ -Kapillaren die nicht entleerbaren, und es wird ein zur Sättigung genau entgegengesetztes Verhalten auftreten - einen Entsättigungsast, der oberhalb ( $\supset$ ) des KBM zu liegen kommt, bei kleineren  $n_2/N$ -Werten ein "weglaufendes" Verhalten, bei größeren dann wieder eine asymptotische Näherung an das KBM. Genau die gleichen Kurven, nur für ein anderes Radienverhältnis, sind in Abb. 7 dargestellt.

Abb. 7

Verhalten eines ausgewählten QMNes hinsichtlich der Erwartungswerte  $\bar{\Sigma}_{sat}(n_1;n_2)$ ,  $\bar{\Sigma}_{ent}(n_1;n_2)$  und gegenüber dem entsprechenden KBM

PARAMETER: $p_1^c$ , NETZWERK- STRUKTUR	SÄTTIGUNG: 0 $\rightarrow$ $p_1^c$ ENTSÄTTIGUNG: $p_2^c \rightarrow p_1^c$
$r_1 = 1.1 r_2$	$n_1 + n_2 = N$



Damit wurde alles zusammengetragen was nötig ist, um das ganze Verfahren zu invertieren und um rückwärts auf die Radienverteilung zu schließen, die bis hierhin - zusammen mit der Netzwerkstruktur - stets als bekannt vorausgesetzt und als "Input" für die Rechnungen und Graphen vorgegeben war.

Im folgenden soll ein beliebiges Netzwerkmodell vorliegen (Abb. 8), von dem wir weder wissen, was für eine Netzwerkstruktur es besitzt, noch wie groß es ist. Einzig und allein sei bekannt - etwa durch Vergleich des bei der höchsten Druckstufe eingepreßten Hg-Volumens mit einer anderweitigen volumetrischen Messung -, daß eine 2-Radienverteilung vorliege. Inversion ist nun, wie bereits gesagt, der Rückwärtsschluß von der durchgeführten Kapillardruckmessung auf die tatsächlich vorliegende 2-Radienverteilung.

Die uns aus dem Experiment verfügbaren Meßwerte mögen etwa entsprechend Abb. 8 vorliegen. Mit ihnen erstellt man nun nicht etwa eine konventionelle Kapillardruck- bzw. zweistufige Treppenkurve, sondern betrachtet sie im Zusammenhang mit dem Graphen für  $p_c$  konstant, wie dies soeben durchdiskutiert wurde. In ihn tragen wir zunächst die Kurve des entsprechenden KBM vollständig ein, dann die auf das Porenvolumen normierten Meßwerte - und zwar in Form von horizontalen Geraden bzw. Meßwertniveaus, denn es ist bekannt, daß auf ihnen irgendwo für das richtige  $n_1/N$  (und damit auch  $n_2/N$ ) der tatsächliche Sättigungs- bzw. Entsättigungspunkt liegen muß. Nun ist vom Sättigungspunkt bekannt, daß er unterhalb ( $\leq$ ) der KBM-Kurve liegen muß, der Entsättigungspunkt dagegen oberhalb ( $\geq$ ) der KBM-Kurve liegt. Der  $n_1/N$ -Bereich, den beide Meßwerte erfüllen, kann dann also nur die gemeinsame Schnittmenge des in Abb. 8 schraffierten Bereiches sein. Der zugehörige  $n_2/N$ -Bereich ist oben abzulesen.

Damit sind also Intervalle gefunden, in denen die tatsächlichen relativen Radienhäufigkeiten liegen müssen. Mehr als diese beschränkten Inversionsaussagen sind allerdings auch nicht zu erwarten, denn es ist genau die unbekanntes Netzwerkstruktur, neben dem Druck der zweite Parameter in dieser Darstellung, über die keine Information irgendeiner Art erhältlich ist; und sie ist die Ursache für die Breite des verbleibenden Intervalles.

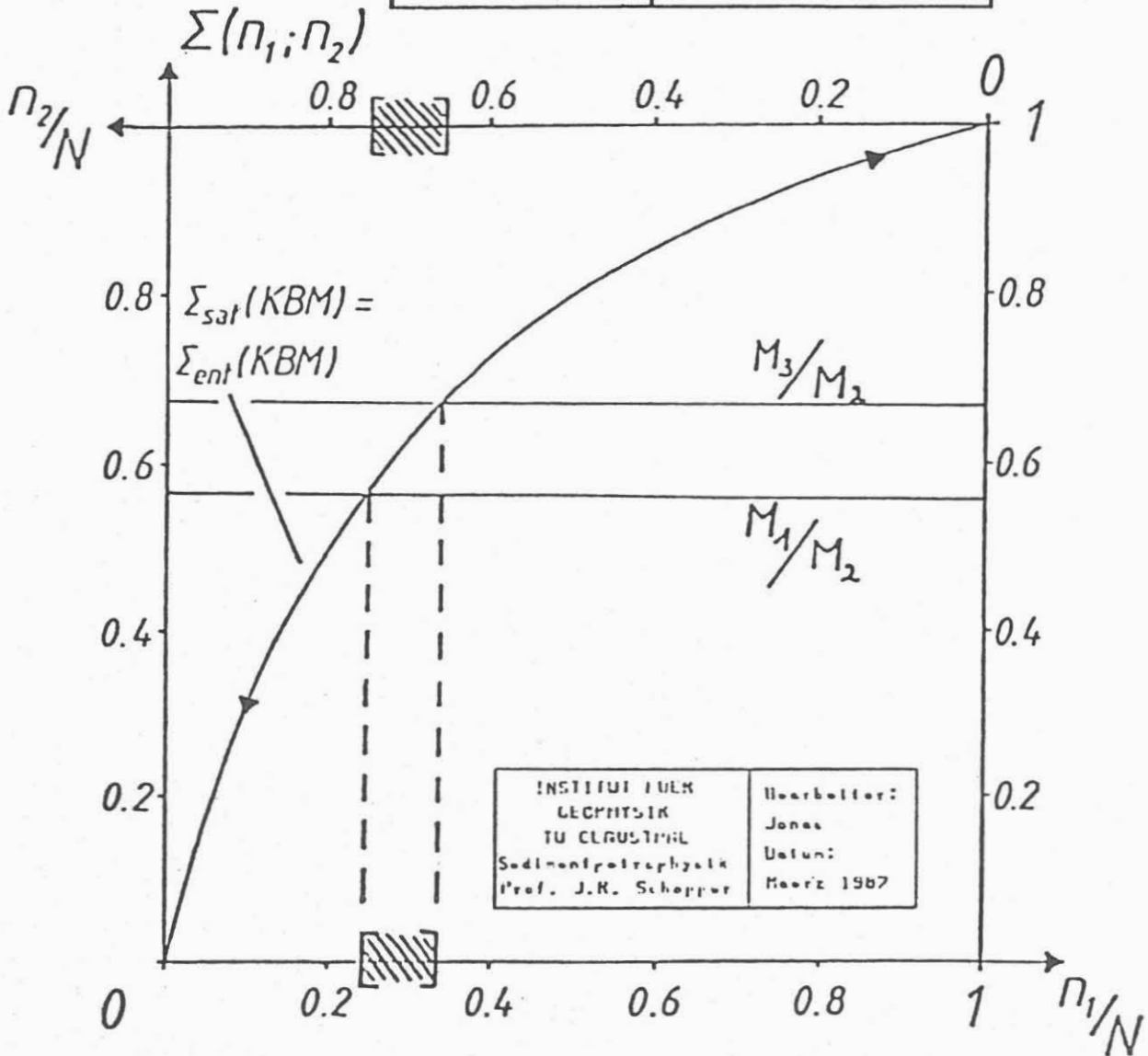
Das gleiche Inversionsverfahren - mit einer sogar etwas beschränkenderen bzw. eingrenzenderen Aussagefähigkeit - läßt sich nun auch bei Mehrradienverteilungen anwenden. Falls also eine Kapillardruckmessung in z. B.  $k$  Druckschnitten durchgeführt wurde, erhält man ebenso viele Intervallaussagen für die  $k$  Stück relativen Radienhäufigkeiten  $n_1/N, \dots, n_k/N$ . Diese Intervallaussagen erlauben es dann, mit folgender Überlegung in die ursprüngliche, konventionelle Kapillardruckkurve zurückzugehen, in der die Kapillarradienverteilung und Netzwerkstruktur die Parameter sind:

Abb. 8

## Inversion: 2-Radienverteilung

$$\begin{array}{l}
 0 \rightarrow p_1^c: \bar{V}_{sat}(n_1; n_2) = M_1 \\
 p_1^c \rightarrow p_2^c: V_{pot}(n_1; n_2) = M_2 \\
 p_2^c \rightarrow p_1^c: \bar{V}_{ent}(n_1; n_2) = M_3
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \bar{\Sigma}_{sat}(n_1; n_2) = \frac{M_1}{M_2} \\
 \Sigma_{ent}(n_1; n_2) = \frac{M_3}{M_2}
 \end{array}$$

<b>PARAMETER:</b> $p_1^c$ , NETZWERK- STRUKTUR	SÄTTIGUNG: $0 \rightarrow p_1^c$ ENTSÄTTIGUNG: $p_2^c \rightarrow p_1^c$
$r_1 = a \cdot r_2$	$n_1 + n_2 = N$



INSTITUT FÜR GEOPHYSIK TU CLUSTAL Sedimentpetrophysik Prof. J.R. Schopper	Mitarbeiter: Jonas Datum: März 1967
---	--

Würde die genaue, tatsächlich vorliegende Mehrradienverteilung bekannt sein (Abb. 9), dann könnte man auch den genauen Verlauf der KBM-Kurve angeben. Da aber nur Intervallaussagen zur Verfügung stehen, kann auch nur ein Schlauch konstruiert werden, in dem die Kurve des entsprechenden KBM liegen muß, und etwa den Verlauf in Abb. 9 haben wird. Dies läßt sich mit dem vorhin gefundenen asymptotischen Verhalten des Netzwerkcharakters des Gesteins begründen.

Nun von der Modellvorstellung zurück in die Realität (Abb.10):

Bis hierhin wurde mit einem Entsättigungsast gearbeitet, der bis in den jungfräulichen Anfangszustand mit Sättigung Null zurückläuft. Genau dieser Fall ist in der Realität aber auch gegeben, wenn ein Kapillardruckexperiment zwei- oder mehrfach wiederholt wird, also eine Art Schaukelversuch. Der Schlauch, der soeben betrachtet wurde, würde also genau zwischen den beiden Ästen der Kapillardruckkurve liegen und es uns ermöglichen, die wahre relative Porenradienverteilung zumindest der Poren recht genau zu ermitteln, die für diese Hysterese verantwortlich ist.

Das gleiche Verfahren läßt sich natürlich auch auf die breitere Hystereseerscheinung übertragen. Hier sind allerdings weitergehende netzwerktheoretische Überlegungen erforderlich, die letztendlich aber nur die Breite des Schlauches und den Verlauf der KBM-Kurve im Innern betreffen, im Prinzip jedoch nichts an der Auswertetechnik ändern.

Eine wichtige Anmerkung: Dieses Inversionsverfahren berücksichtigt auch andere in der Realität vorkommende Erscheinungen wie z. B. Kontaktwinkelhysterese, Konstriktionen der Porenkanäle und - last not least - Anpassungen an den die innere Oberfläche beschreibenden Kulissenbereich.

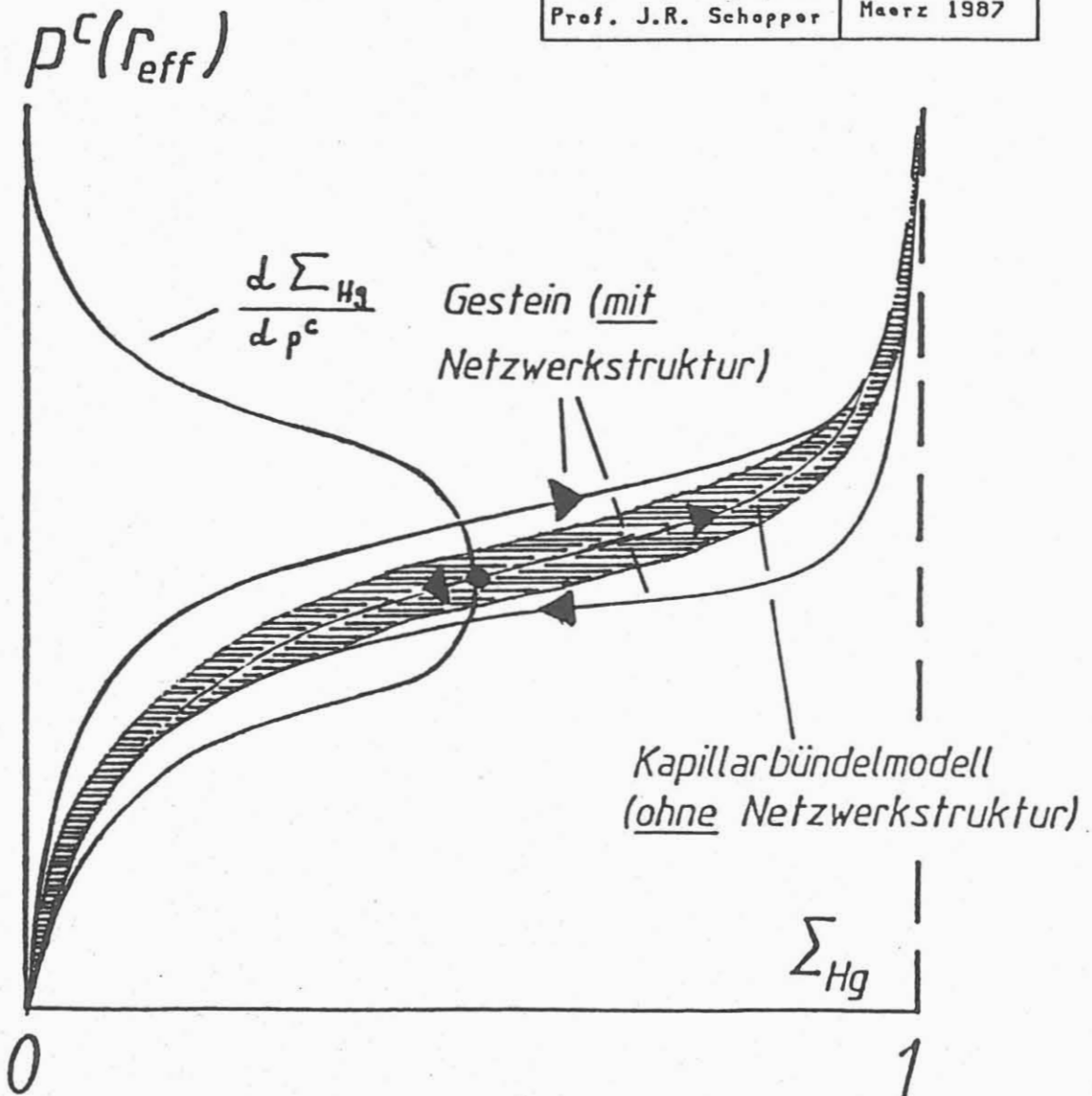
# Kapillardruckkurve $p^c$ vs $\Sigma_{Hg}$

## Parameter

Netzwerk-  
struktur

Porenradien-  
verteilung

INSTITUT FUER GEOPHYSIK TU CLAUSTHAL Sedimentpetrophysik Prof. J.R. Schopper	Bearbeiter: Jonas Datum: Maerz 1987
--	--





# Kapillardruckkurve eines B52-Sand- steines

