

NUMERISCHE SIMULATION DER WECHSELWIRKUNG VON RISSEN

G. Möhring-Erdmann

Zusammenfassung

Der Bruchprozeß in Gesteinen bei Druckbeanspruchung ist durch Dilatanz gekennzeichnet, wobei eine Vielzahl von Mikrorissen quasi-stationär wachsen und die Wechselwirkung zwischen benachbarten Rissen zunimmt. Bei Erreichen eines kritischen Zustandes (Rißdichte, Rißanordnung, Spannungsintensität) vereinigen sich einzelne Risse und führen zum makroskopischen Scherbruch.

Während die Ausbreitung von Einzelrissen heute mit Hilfe der Bruchmechanik gut beschrieben werden kann, bedarf die Erfassung der Wechselwirkung zwischen mehreren Rissen beliebiger Anordnung bezüglich der äußeren Belastung numerischer Methoden.

Hier wird ein numerisches Modell vorgestellt, das die Wechselwirkung von n beliebig orientierten Rissen in einer unendlichen Scheibe behandelt. Als Rechenverfahren wird die Methode der Boundary Elemente, als Instabilitätskriterium für das Rißwachstum wird das Verformungsenergiedichtekriterium benutzt. Zur Überprüfung des Modells wurden zunächst einfache Rißprobleme gerechnet, für die analytische bzw. numerische Lösungen in der Literatur vorliegen. Bisher können mit der vorgegebenen Rechenkapazität die Wechselwirkung zwischen ca. 10 Rissen gut beschrieben werden.

Die Ergebnisse sind sowohl für die Beschreibung der Ergebnisse von Bruchversuchen an Gesteinsproben im Labor als auch für die Interpretation von Bohrlochrandausbrüchen in Tiefbohrungen von Bedeutung.

1. Einleitung

Der Mechanismus eines makroskopischen Bruchs unter Druckspannung unterscheidet sich grundlegend von dem eines Bruchs unter Zugspannung (u.a. Hoek and Bieniawski, 1965, Bieniawski, 1967, Cotterell, 1972).

Einem Bruch unter Druckbeanspruchung geht Dilatanz voraus. Dilatanz heißt Volumenzunahme durch Entstehen und Wachstum von Mikrorissen, die ab einer gewissen Dichte in Wechselwirkung treten und schließlich in einem makroskopischen Scherbruch enden (Holzhausen und Johnson, 1979; Nemat-Nasser and Horii, 1982; Horii and Nemat-Nasser, 1985; Möhring-Erdmann and Rummel, 1987).

Eine Voraussetzung für die quantitative Beschreibung des Phänomens des Scherbruchs ist das Wissen um die Gesetzmäßigkeiten der Wechselwirkung von Rissen.

Experimente zur Rißwechselwirkung wurden in der Vergangenheit z.B. von Bombalakis, 1964, 1968, 1973; Hoek and Bieniawski, 1965; Kranz, 1979; Nemat-Nasser and Horii, 1982, Sobolev and Rummel, 1982; Horii and Nemat-Nasser, 1984; Vallejo and Pramono, 1984; Smolka and Rummel, 1987) durchgeführt. Theoretische analytische Lösungen der Rißwechselwirkung sind nur für spezielle Rißgeometrien vorhanden (Sih, 1973, Gdoutos, 1980, 1984; Nemat-Nasser and Horii, 1982; Dey and Wang, 1981, Kishida and Asano, 1984, Horii and Nemat-Nasser, 1985). Numerische Methoden (z.B. die Methode der finiten Elemente) zur Lösung des Problems wurden nur begrenzt herangezogen, da man bis jetzt wegen begrenzter Speicherkapazitäten an Rechnern auf wenige Risse ($n < 5$) beschränkt war.

Im folgenden wird ein numerisches Modell vorgestellt, das die zweidimensionale Simulation der Wechselwirkung mehrerer ($n > 5$) willkürlich orientierter Risse erlaubt.

2. Die numerische Methode

Es stellen sich folgende Forderungen an die numerische Methode:

- (i) Die Methode muß sicherstellen, daß jeder Riß von allen anderen Rissen "Kenntnis" hat.
- (ii) Die Methode sollte so konzipiert sein, daß möglichst wenig Rechenspeicherraum benötigt wird.
- (iii) Die gegenüberliegenden Rißseiten dürfen sich auch bei größerem Normaldruck auf den Riß nicht überlappen.

Diese Forderungen erfüllt die Boundary Element Methode (BEM) der konstanten Verschiebungsdiskontinuität. Zu ihrer Anwendung müssen zwei Annahmen erfüllt werden:

- (i) Die Differentialgleichungen (Gleichgewichtsbedingung, Kompatibilitätsgleichung) zur Behandlung des Problems sind linear. Dies gilt, solange man keine großen Verformungen zuläßt (Timoshenko and Goodier, 1982).
- (ii) Der Bereich zwischen einzelnen Rissen läßt sich mit der linearen Elastizitätstheorie beschreiben. Dies beinhalten die in diesem Modell verwendeten Bruchkriterien (Kap.3).

Es wird in diesem Rahmen darauf verzichtet, auf die numerische Methode weiter einzugehen; eine genaue Beschreibung findet man z.B. bei Crouch and Starfield (1983).

3. Das Bruchkriterium

Die zentrale Fragestellung für die Ausbreitung eines Einzelrisses ist, wann und in welche Richtung ein Riß wächst. Will man die Wechselwirkung von Rissen beschreiben, muß man untersuchen, inwieweit die Anwesenheit anderer Risse Beginn und Richtung der Ausbreitung beeinflusst.

Im allgemeinen Fall breitet sich bei Beanspruchung ein Riß in der Ebene sowohl mit Zug- als auch mit Scheranteilen aus (mixed-mode Rißausbreitung, Abb.1). Um die Rißausbreitung zu bestimmen, bietet die linear elastische Bruchmechanik verschiedene Kriterien. Für das hier beschriebene Problem, werden die beiden folgenden Kriterien benutzt:

- (i) Das Verformungsenergiedichtefaktor - Kriterium nach Sih (S - Kriterium)
- (ii) Das Kriterium der maximalen Tangentialspannung ($\sigma_{\theta, \max}$ - Kriterium)

Die beiden Kriterien sind ausführlich bei Ingraffea (1985) beschrieben. Das S - Kriterium in Zusammenhang mit der BEM wurde von Cornet (1979) behandelt. Das hier vorgestellte ebene Modell benutzt hauptsächlich das S - Kriterium. Der Verformungsenergiedichtefaktor S wird aus den lokalen Spannungen σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} berechnet:

$$S = r \cdot \pi \{ (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) / 2E - \nu \sigma_{xx} \sigma_{yy} / E + \sigma_{xy} / 2G \}$$

r - Abstand,
E - Elastizitätsmodul, G - Schermodul, ν - Poissonzahl.

Unter Verwendung des Kriteriums erhält man zwei Lösungen (einmal für Zug- und einmal für Druckbelastungen), denn die Spannungen gehen in die S - Berechnung quadratisch ein. Deswegen wird zusätzlich das $\sigma_{\theta, \max}$ - Kriterium als Ausscheidungskriterium miteinbezogen.

4. Ergebnisse

4.1. Der Einzelriß

Um die Methode zu überprüfen, wurde die Ausbreitungsrichtung θ , eines einzelnen Risses in der unendlichen Ebene bei einachsiger Belastung (Abb.1) als Funktion der Orientierung des Risses β bezüglich der angelegten Spannung σ mit dem S - Kriterium numerisch und analytisch berechnet. Zusätzlich wurde θ , mit Hilfe des $\sigma_{\theta, \max}$ - Kriteriums für Zugspannungsbelastung numerisch berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt. Für Druckspannungen zeigt sich, daß die numerischen Werte im Bereich $20^\circ \leq \beta \leq 80^\circ$ um einen kleinen Betrag ($\sim 5^\circ$) geringer sind als die analytisch berechneten Werte. Größere Abweichung liegen in den Bereichen um 90° (parallel zu σ) und 0° (senkrecht zu σ) vor. Für Zugspannungen stimmen die analytischen und numerischen Resultate gut überein. Auch zeigt sich, daß das $\sigma_{\theta, \max}$ - Kriterium als Ausscheidungskriterium wirksam ist. Die Abweichung zwischen numerischen und analytischen Berechnungen läßt sich darauf zurückführen, daß die modellierte Rißspitze im Gegensatz zur Theorie nicht unendlich spitz ist.

Berechnet man den Rißweg eines gegen eine einachsige Druckbelastung um 45° geneigten Riß in der Ebene, so wird das experimentelle Ergebnis genau simuliert (Abb.3, vgl. z.B. Nemat-Nasser and Horii, 1982).

4.2. Wechselwirkung mehrerer Risse

Die Wechselwirkung von 5 links- bzw. rechtsstufig angeordneten Rissen zeigen die Abbildungen 4 und 5. In beiden Fällen sind die Risse 45° zur angelegten Druckspannung orientiert; die Materialparameter für das Gebiet zwischen den Rissen sind die eines Carrara-Marmors (Elastizitätsmodul $E = 75000$ MPa, Poissonzahl $\nu = .25$; Rummel and Möhring-Erdmann, 1984; $K_{IC} = 1.2$ MNm $^{-3/2}$; Müller, 1987), der Abstand zwischen den benachbarten Rißspitzen ist in beiden Fällen gleich ($d/b = 0.35$, Rißlänge $2b = 5.6$ mm).

Das linksstufige Array kennzeichnet eine starke Wechselwirkung, bei der sowohl der Ausbreitungswinkel als auch die Verformungsenergiedichte stark beeinflußt werden. Der Winkel wird von 111° (ein einzelner Riß mit gleicher Orientierung, Rißlänge und Elementkonfiguration) um maximal 48° reduziert und die Verformungsenergiedichte wird fast verzehnfacht (Abb.4b). Nimmt man eine angelegte Spannung von 15 MPa, so überschreitet an allen Rißspitzen - bis auf die äußeren (I1, V2) - der Verformungsenergiedichtefaktor den kritischen Wert S_C , und die Risse wachsen zusammen (Abb.4b).

Die Wechselwirkung ist wesentlich geringer bei einem rechtsstufigen Array. Der Winkel wird bis zu max. 11° vergrößert; die Verformungsenergiedichte schwankt um ihren Normalwert (Abb.5a). Würde man die Spannung erhöhen, damit die Risse sich ausbreiten (gestrichelte Linien), zeigt sich keine Tendenz, daß sie zusammenwachsen. Das Ergebnis wird durch Experimente von Vallejo and Pramono (1984) bestätigt.

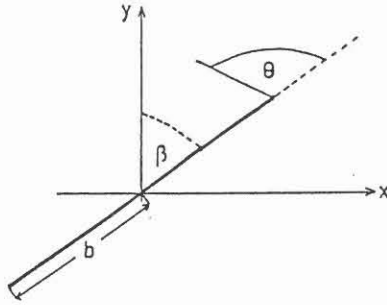


Abb.1: Riß der Länge $2b$ in einer (unendlichen) Platte
 r, θ Polarkoordinaten des Feldpunktes P bezogen auf die Rißspitze
 β Winkel zwischen Riß und größter Hauptspannung σ (σ im Modell immer parallel zur y - Achse)

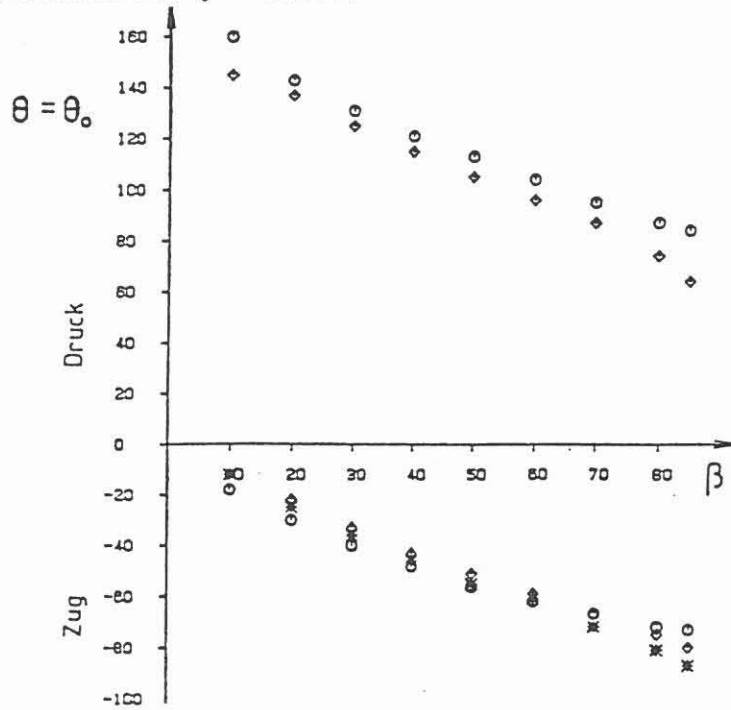


Abb.2: Ausbreitungsrichtung θ , eines Risses in einer (unendlichen) Platte als Funktion der Rißorientierung ($\nu = 0.25$, einachsige Belastung).

- S - Kriterium, analytisch berechnet
- ◇ S - Kriterium, numerisch berechnet
- * $\sigma_{\theta, \max}$ - Kriterium, numerisch berechnet

positive Winkel θ , korrelieren mit Druckbelastung
 negative Winkel θ , korrelieren mit Zugbelastung

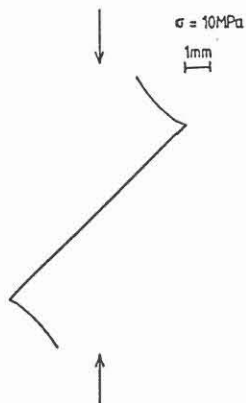


Abb.3: Ausbreitung eines unter 45° zur einachsigen Druckspannung σ ($\sigma = 10 \text{ MPa}$) orientierten Risses ($b = 5 \text{ mm}$, $E = 75000 \text{ Mpa}$, $\nu = 0.25$).

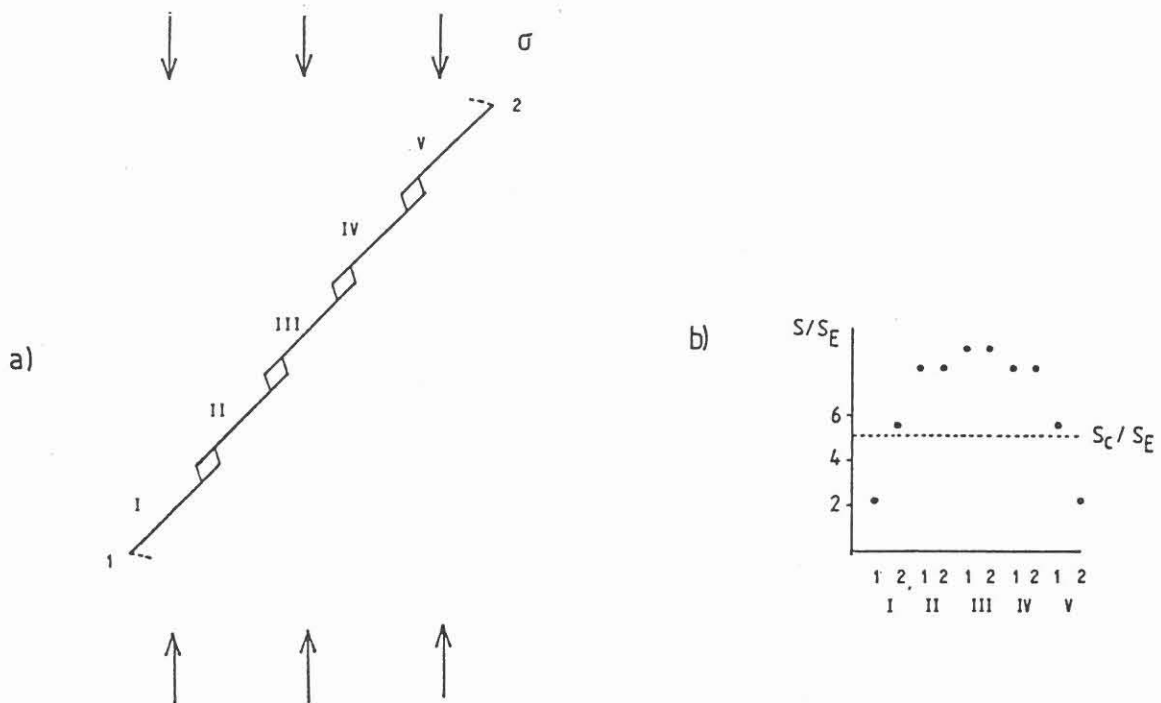


Abb.4: a) Linksstufiges Array von 5 unter 45° zur Hauptspannungsrichtung geneigten Rissen ($b = 2.5 \text{ mm}$) bei einachsiger Druckbelastung ($E = 75000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.25$).
 b) Die zu den einzelnen Rißspitzen zugehörigen Verformungsenergiegedichtefaktoren (S_E eines einzelnen unter 45° geneigten Risses normiert, $S_C = 5 \cdot 10^{-3} \text{ MPamm}$, $S_E = 10^{-3} \text{ MPamm}$; für $\sigma = 15 \text{ MPa}$).

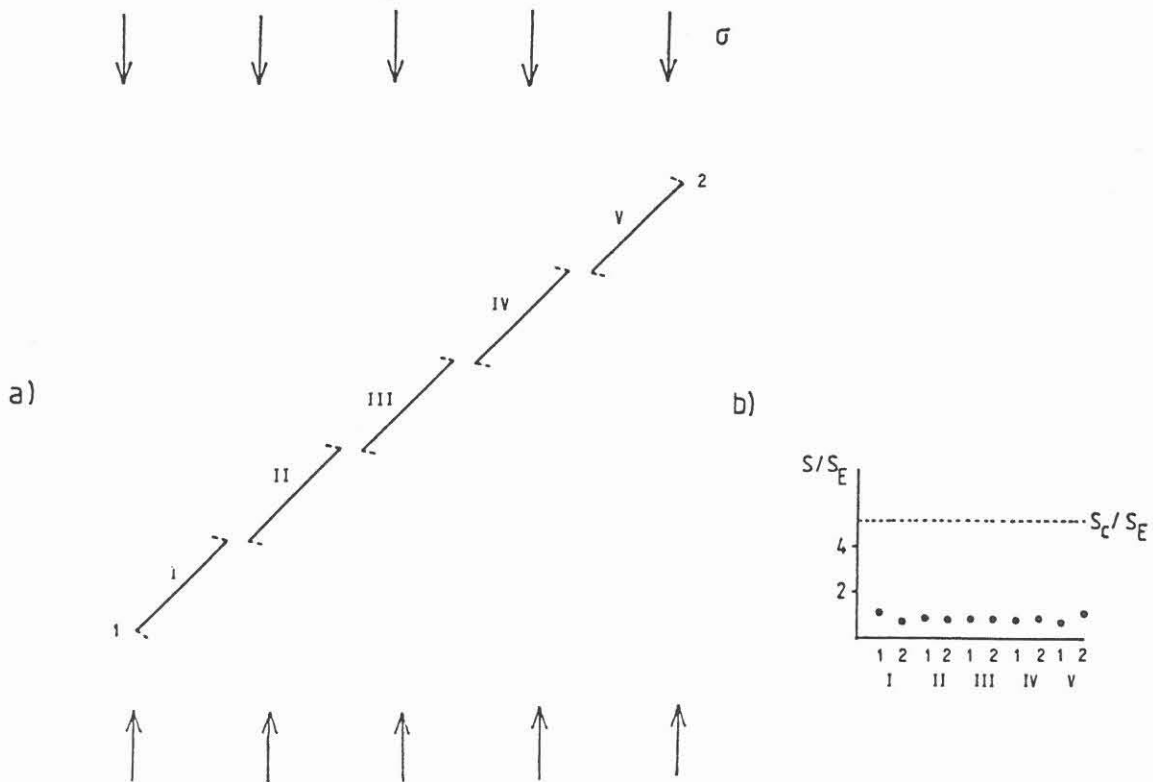


Abb.5: a) und b) analog zu Abb.4 a) und b), aber rechtsstufiges Riß - Array.

Die Anordnung von 23 willkürlich orientierten Rissen, die einer einachsigen Drucklast unterworfen werden, zeigt Abb.6a. Nach 5 Rechenschritten (bei gleichbleibender axialer Last) ergibt sich die Rißkonfiguration in Abb.6b; es bilden sich deutlich makroskopischen Zugrisse aus (axiales Splitten).

5. Diskussion

Die Boundary Element Methode der konstanten Verschiebungsdiskontinuität kombiniert mit dem S - und G_{\max} - Kriterium der linear elastischen Bruchmechanik ergibt ein effektives Werkzeug, um die Wechselwirkung mehrerer Risse zu simulieren.

Die Methode ermöglicht es, die Bildung makroskopischer Bruchphänomene aus der Wechselwirkung mehrere Risse zu simulieren (z.B. axiales Splitten, Abb.6). Damit wird ein Beitrag zum Verständnis der Mechanismen geleistet, die zu Brüchen unter Druckbelastung führen. Dies könnte zur Beschreibung von Phänomenen wie Randausbrüche in Tiefbohrungen nützlich sein und allgemein zur Betrachtung der Stabilität von Tiefbohrungen beitragen.

6. Danksagung

Die numerischen Berechnungen wurden von dem Bundesministerium für Forschung und Technik (BMFT; Nr. 03E6075 A-1) und von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG; Nr. CG-Ru/225-12-1) finanziell gefördert.

Herrn Prof. Dr. F. Rummel danke ich für wichtige Anregungen und seine stete Diskussionsbereitschaft.

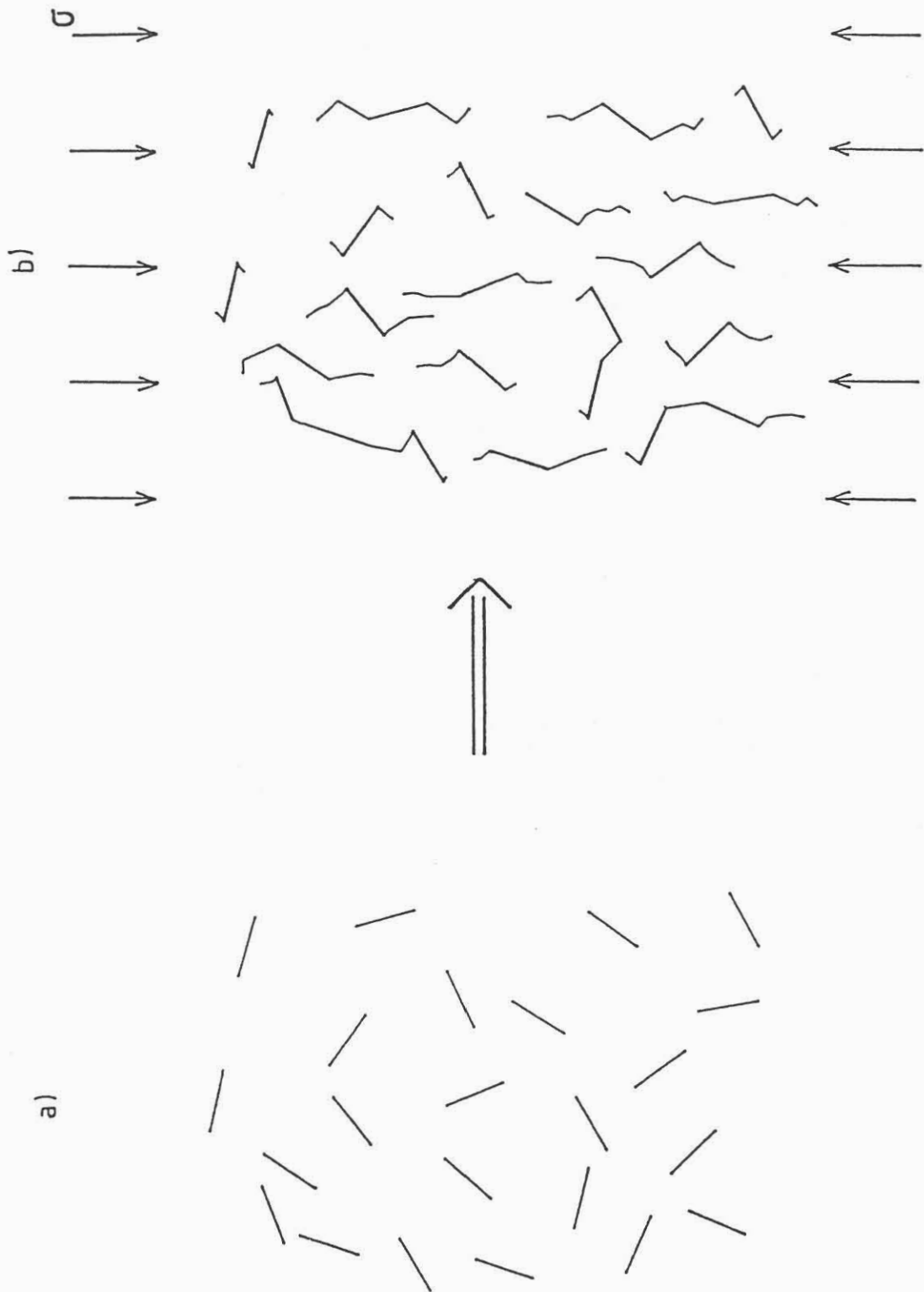


Abb.6: a) 23 willkürlich zur einachsigen Druckspannung σ orientierte Risse ($b = 0.5$ mm, $E = 75000$ MPa, $\nu = 0.25$, $\sigma = 100$ MPa, $S_C = 5 \cdot 10^{-3}$ MPamm).
b) Rißkonfiguration nach 5 Rechenschritten.

7. Literatur

-
- Bieniawski, Z.T.: Mechanism of brittle fracture of rock. Part I - Theory of the fracture process. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 4, 395 - 406, 1967.
- Bombalakis, E.G.: Photoelastic investigation of brittle crack growth within a field of uniaxial compression. *Tectonophysics*, 1, 343 - 351, 1964.
- Bombalakis, E.G.: Photoelastic study of initial stages of brittle fracture in compression. *Tectonophysics*, 6, 461 - 473, 1968.
- Bombalakis, E.G.: Study of the brittle fracture process under uniaxial compression. *Tectonophysics*, 18, 231 - 248, 1973.
- Cornet, F.H.: Comparative analysis by the displacement-discontinuity method of two energy criteria of fracture. *J. Appl. Mech.*, 46, 349 - 355, 1979.
- Cotterell, B.: Brittle fracture in compression. *Int. J. Frac. Mech.*, 8, 195 - 208, 1972.
- Crouch, S.L. and A.M. Starfield: Boundary element methods in solid mechanics. George Allen & Unwin, London, 1983.
- Dey, T.N. and Wang Chi-Yuen: Some mechanisms of microcrack growth and interaction in compressive rock failure. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 18, 199 - 209, 1981.
- Gdoutos, E.E.: Interaction between two equal skew-parallel cracks. *J. Strain Anal.*, 15, 127 - 136, 1980.
- Gdoutos, E.E.: Growth prediction of two interacting cracks. *Theor. Appl. Frac. Mech.*, 1, 133 - 137, 1984.
- Hoek, E. and Z.T. Bieniawski: Brittle Fracture propagation in rock under compression. *J. Frac. Mech.*, 1, 137 - 155, 1965.
- Holzhausen G.R. and A.M. Johnson: Analyses of longitudinal splitting of uniaxially compressed rock cylinders. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 16, 163 - 177, 1979.
- Horii, H. and S. Nemat-Nasser: Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure. *J. Geophys. Res.*, 90, 3105 - 3125, 1985.
- Ingraffea, A.R.: Theory of crack initiation and propagation in rock. in: *Rock fracture mechanics*. ed. B. Atkinson, Academic Press Inc. 1985.
- Kishida, M. and M., Asano: A study of interference of three parallel cracks. *Eng. Frac. Mech.*, 19, 531 - 538, 1984.
- Kranz, R.L.: Crack-crack and crack-pore interactions in stressed granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 16, 37 - 47, 1979.

- Möhring-Erdmann, G. and F. Rummel: Borehole breakouts mechanisms and stress estimation. subm. for publication: The Falkenberg Hot Dry Rock Project. ed. O. Kappelmeyer and F. Rummel, BGR, 1987.
- Müller, W.: Experimentell und numerische Untersuchungen zur Rißausbreitung im anisotropen Gestein in der Nähe von Grenzflächen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1987.
- Nemat-Nasser, S. and H. Horii: Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst. J. Geophys. Res., 87, 6805 - 6821, 1982.
- Rummel, F. and G. Möhring-Erdmann: Unveröffentlichte Daten, persönliche Mitteilung, 1984.
- Sih, G.C.: Handbook of stress intensity factors: Stress intensity factor solutions and formulas for reference, Inst. of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh Univ. Bethlehem, Pennsylvania, 1973.
- Smolka, K. and F. Rummel: Thermal cracking in glass. subm. for publication in: The Falkenberg Hot Dry Rock Project, ed. O. Kappelmeyer and F. Rummel, BGR, 1987.
- Sobolev, G. and F. Rummel: Shear fracture development and seismic regime in pyrophyllite specimens with soft inclusions. J. Geophys., 51, 180 - 187, 1982.
- Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier: Theory of elasticity. McGraw Hill, 1982.
- Vallejo, L.E. and E. Pramono: Development of fracture regions in brittle materials. in : Rock mechanics in productivity and protection. ed. C.H. Dowding and M.M. Singh, Proc. 25th Symposium on Rock Mechanics, 47 - 54, 1984.