

Vortrag Dr. J. Meyer, Göttingen

"Übertragung des Cagniard'schen Verfahrens auf den Fall der Beobachtung nur magnetischer Größen"

Freitag, den 1.10.1965

Wenn man die an der Erdoberfläche gemessenen magnetischen und elektrischen Felder zerlegt in einen normalen Anteil (ohne lokale Störungen) und einen anomalen (inneren) Anteil,

$$H = H_e + H_i = H_a + H_{in} + H_{ia} = H_n + H_{ia}$$

$$E = E_1 = E_{in} + E_{ia} = E_n + E_{ia}$$

dann lassen sich folgende Aufgabenstellungen unterscheiden:

- 1) Im Falle, daß keine lateralen Inhomogenitäten im Untergrund vorhanden sind ($H_{ia} = E_{ia} = 0$), hat man nur normale Felder (Definition!). Die Aufgabe ist dann, die normale Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$, als reine Funktion der Tiefe, zu bestimmen, im einfachsten Fall einer horizontalen homogenen Schichtung also die Schicht-Leitfähigkeiten σ_v ($v = 1, 2, \dots$).
- 2) Sind laterale Inhomogenitäten vorhanden, erfolgt zunächst eine Trennung von normalem und anomalem (innerem) Anteil.
 - a) Aus dem normalen Anteil wird die normale Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$ bzw. die normale Schichtung σ_v bestimmt, wie im Fall 1).
 - b) Aus dem anomalen (inneren) Anteil erfolgt die Bestimmung der horizontalen Leitfähigkeitsänderungen sowie der eingelagerten Leitfähigkeitsanomalien, etwa mit Hilfe von Modellrechnungen oder -Versuchen.

Über eine Auswertemöglichkeit für den normalen Feldanteil des Magnetfeldes (Fall 2a) zur Bestimmung der Leitfähigkeiten einer Zwei-Schichten-Erde habe ich bereits auf dem Symposium in Kassel 1962 berichtet, und zwar für den speziellen Fall einer dipolförmigen Quellverteilung an der Erdoberfläche. Wichtiger, da besser realisiert, ist der Fall eines homogenen äußeren Feldes. Sieht man weiter ab von lateralen Inhomogenitäten im Untergrund (Fall 1), so ist der normale Feldanteil jeweils gleich dem gemessenen Gesamt-

feld: $H = H_n$, $E = E_n$. Bei dem magneto-tellurischen Verfahren von Cagniard werden unter diesen Voraussetzungen beide Felder, H und E , benutzt zur Bestimmung der Leitfähigkeiten einer schichtweise homogenen und isotropen ebenen Erde. Es ist seit langem das Bestreben der Erdmagnetiker, dieses Verfahren auf die Verwendung von ausschließlich magnetischen Größen umzuschreiben, um die meßtechnischen Vorteile einer H - gegenüber einer E -Feldmessung zu nutzen. Über diese Umschreibung des Cagniardschen Verfahrens möchte ich hier berichten und zugleich auch auf die übrigen Vorteile des neuen Verfahrens hinweisen, das man sehr lax etwa "erdmagnetische Magneto-Tellurik" nennen könnte. Das Wort soll jedoch nur zur Abschreckung dienen und zeigen, wie wichtig es ist, sich bei der Einführung eines neuen Verfahrens über eine sinnvolle Nomenklatur Gedanken zu machen. Auch darauf möchte ich etwas näher eingehen. Vor der Eliminierung des elektrischen bzw. tellurischen Feldes aus der Cagniardschen Theorie möchte ich aber zunächst deren Grundzüge noch einmal kurz beschreiben, um dann das Wesentliche an dem neuen Verfahren sehr schnell zeigen und beide besser vergleichen zu können.

Gegeben sei ein horizontales, homogenes induzierendes Magnetfeld in y -Richtung (H_y) über ebener Erde (Figur 1), mit harmonischer Zeitabhängigkeit. Bei homogener Erde oder homogener Schichtung tritt keinerlei Störung des homogenen Magnetfeldes auf. Die in der Erde induzierten Ströme fließen horizontal und senkrecht zur Magnetfeld-Richtung, d.h. in Richtung der x -Achse (j_x). An der Erdoberfläche ($z = 0$) sei $j_x = j_0 \cos \omega t$. Dann ist in beliebiger Tiefe

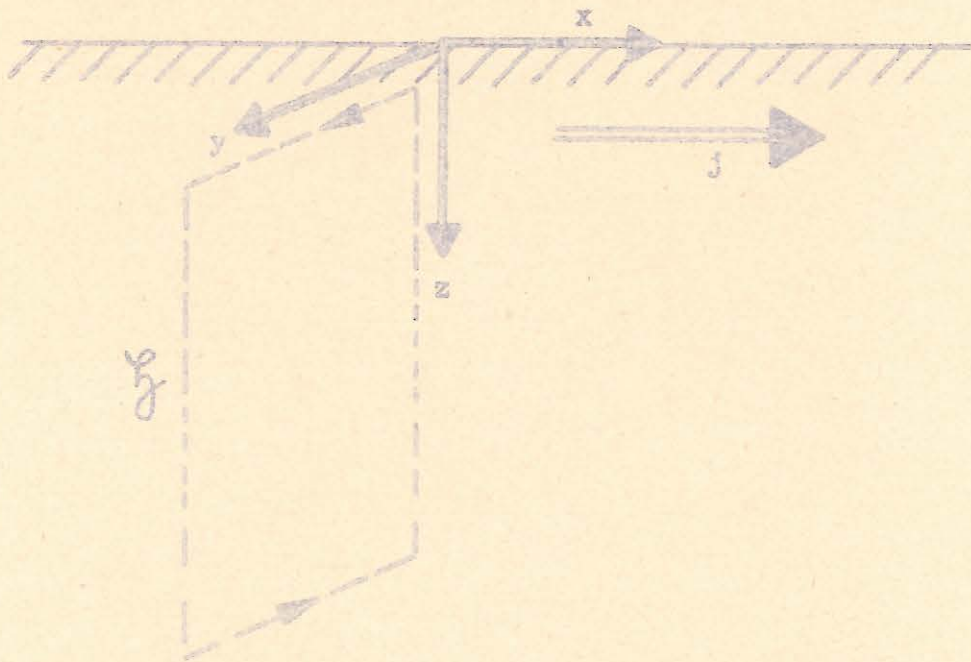
$$j_x(z) = j_0 e^{-z \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}}} \cos \left(\omega t - z \sqrt{\frac{\sigma \mu \omega}{2}} \right).$$

Aus der exponentiellen Abnahme der Amplitude ergibt sich die "Eindringtiefe" p zu

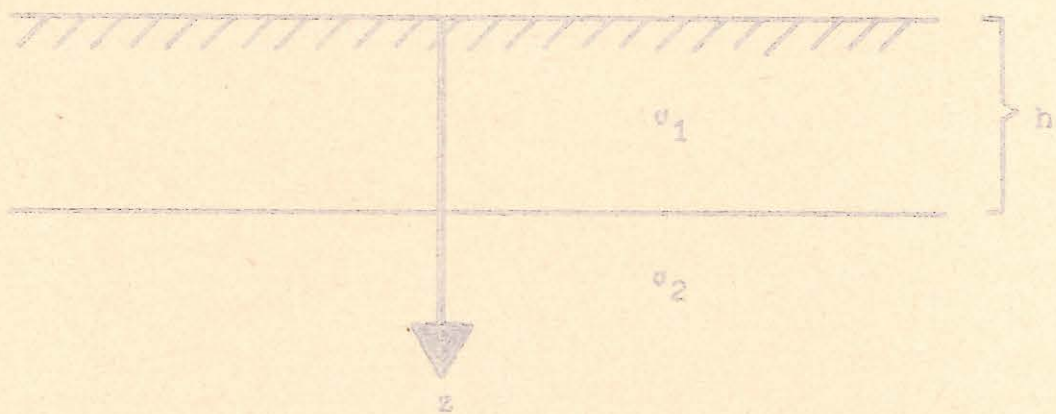
$$p = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu \nu}} = 503,8 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu \nu}}$$

$$(p = j_0 \mu_T; \text{Praktisches Maßsystem}).$$

Die Beziehung zwischen Stromdichte und Magnetfeld an der Erdoberfläche folgt aus dem Ampereschen Verkettungsgesetz (I. Maxwell'sche Gleichung im quasistationären Fall), wobei der (in Figur 1 gestrichelt eingezeichnete) Integrationsweg nach unten bis ins Unendli-



Figur 1



Figur 2

che ausgedehnt wird, wo Magnetfeld und Stromdichte verschwinden. Es gehen dann allein die Beträge an der Erdoberfläche ein:

$$H_y = \int_0^{\infty} j_x(z) dz = \frac{1}{\sqrt{\sigma\mu\omega}} j_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dort ist also, mit $j_x = \sigma E_x$, das Amplitudenverhältnis

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma T}} e^{+i\frac{\pi}{4}}.$$

Der komplexe Exponentialfaktor hierin gibt lediglich an, daß die Phase des Magnetfeldes gegenüber derjenigen des elektrischen Feldes um 45° verzögert ist.

Über homogenem Boden kann man demnach durch Messung des Amplitudenverhältnisses $\left|\frac{E_x}{H_y}\right|$ (und bei homogenem Boden nur durch $\left|\frac{E_x}{H_y}\right|$) die Leitfähigkeit σ des Bodens bestimmen ($\mu = \mu_0$; Periode T bekannt). Das Magnetfeld H dient dabei jedoch nur zur Normierung, da alle induzierten Größen dem induzierenden (äußeren) Feld proportional sind und infolgedessen aus ihren absoluten Werten keine eindeutigen Schlüsse gezogen werden können.

Sieht man auch weiterhin ab von lateralen Inhomogenitäten, so wird sich eine vertikale Schichtung in einem von oben verschiedenen Amplitudenverhältnis bemerkbar machen, sowohl dem Betrage nach als auch in der Phase. Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen kann man E und H bei $z = 0$ berechnen. Für eine Zweischichten-Erde (Figur 2) ist ihr Quotient, unter den gleichen Voraussetzungen wie vorhin, von der Form

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma_1 T}} \frac{M}{N} e^{+i\theta}$$

wobei M und N Funktionen von σ_1 , σ_2 , h und T sind.

Man geht nun vor wie bei den Gleichstromverfahren der Geoelektrik: Man mißt $\left|\frac{E_x}{H_y}\right|$ (von der Phase sei abgesehen) unter der Annahme eines homogenen Untergrundes und definiert dadurch eine scheinbare Leitfähigkeit σ_s . Es ist die Leitfähigkeit, die eine homogene Erde haben würde, die ein gleiches $\left|\frac{E_x}{H_y}\right|$ ergäbe:

$$\left|\frac{E_x}{H_y}\right| = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma_1 T}} \frac{M}{N} = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma_s T}} \quad (1)$$

Die so definierte scheinbare Leitfähigkeit σ_s hat ähnliche Eigenschaften wie diejenige in der Geoelektrik:

für $T \rightarrow 0$, d.h. Eindringtiefe $p_1 \rightarrow 0$, geht $\sigma_s \rightarrow \sigma_1$,

für $T \rightarrow \infty$, d.h. Eindringtiefe $p_1 \rightarrow \infty$, geht $\sigma_s \rightarrow \sigma_2$.

Aus der Doppelgleichung (1) erhält man zwei Beziehungen für σ_2 : eine theoretische Beziehung zwischen σ_s und den gegebenen Modellkonstanten (enthalten in M und N) sowie eine experimentelle Beziehung zwischen σ_s und dem gemessenen $\left| \frac{E_x}{H_y} \right|$ (entsprechend der Definition von σ_s):

$$\text{theoretisch} \quad \sigma_s = \sigma_1 \left(\frac{N}{M} \right)^2 \quad (2)$$

$$\text{experimentell} \quad \sigma_s = \frac{2\pi y}{T \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2} \quad (3)$$

Den theoretischen Zusammenhang zwischen σ_s und den Modellkonstanten zeigt die bekannte Kurvenschar in Figur 3: $\frac{\sigma_s}{\sigma_1}$ als Funktion von $\frac{p_1}{h}$ in doppelt-logarithmischer Darstellung, mit $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ als Parameter der Kurvenschar.

Mißt man nun an einem beliebigen Ort (gemäß der Beziehung (3)) die scheinbare Leitfähigkeit σ_s in Abhängigkeit von der Periode T bzw. \sqrt{T} und trägt beides ebenfalls logarithmisch im gleichen Maßstab auf, so kann man durch Anpassung der gemessenen Kurve an eine der theoretischen Kurven innerhalb der berechneten Kurvenschar in ähnlicher Weise wie in der Geoelektrik σ_1 , σ_2 und h eindeutig bestimmen:

- 1) Vergleich der Ordinaten $\rightarrow \sigma_1$,
- 2) Kurvenparameter $\rightarrow \sigma_2$,
- 3) Vergleich der Abszissen $\rightarrow h$.

Infolge des bereits erwähnten Verhaltens von σ_s für $T \rightarrow \infty$ läßt sich der Kurvenparameter $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ auch aus dem asymptotischen Wert der Kurve für große Abszissenwerte bestimmen, bezüglich der theoretischen Ordinate. Dies ist besonders bei Interpolationen nützlich.

An die Stelle des Amplitudenverhältnisses $\left| \frac{E}{H} \right|$ kann auch die Phase θ als Meßgröße treten. Auch für sie ist eine theoretische Kurvenschar berechnet. Die Ergebnisse müssen in beiden Fällen übereinstimmen und stellen so eine gegenseitige Kontrolle dar. Allerdings lassen

sich mit der Phase allein nur $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ und $\sqrt{\sigma_1} h$ bestimmen, nicht σ_1 selbst. Auch hier sagen also Amplitudenmessungen mehr aus. In der Praxis wird, nicht zuletzt auch aus meßtechnischen Gründen, von Phasenmessungen meist abgesehen. Sie sollen deshalb im weiteren nicht betrachtet werden.

Nun zur Eliminierung von E_x ! E_x soll ausgedrückt werden durch eine Ableitung von H_y . Wie aus der komplexen Schreibweise direkt ersichtlich ist, kommt die zeitliche Ableitung \dot{H}_y nicht in Frage, da $\frac{\dot{H}_y}{H_y} = \omega$ ist, also unabhängig von der Leitfähigkeit, die sich daraus nicht bestimmen läßt. Damit fällt aber zugleich auch das Induktionsgesetz (II. Maxwellsche Gleichung) als mögliche Eliminierungsgleichung fort, da dieses gerade \dot{H} enthält. Es bleibt wiederum das Ampèresche Verkettungsgesetz (I. Maxwellsche Gleichung), das jedoch bei der Herleitung des Cagniardschen Verfahrens bereits benutzt worden ist. Der Trick ist nun der, daß, während es vorhin in der Integralform angewandt wurde, es nunmehr in der Differentialform benutzt wird:

$$j = \text{rot } \mathcal{H}$$

In unserem Fall ist die einzige nicht verschwindende Komponente von j

$$j_x = - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

oder, für das elektrische Feld geschrieben,

$$E_x = - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

Setzt man diesen Ausdruck für E_x in die Gleichung für $\frac{E_x}{H_y}$ ein, die für den homogenen Untergrund galt, so erhält man, unter Vernachlässigung der Phase,

$$\left| \frac{\frac{\partial H_y}{\partial z}}{H_y} \right| = \frac{\sqrt{\sigma \omega \mu}}{1}$$

wo die Leitfähigkeit σ , im Unterschied zu früher, jetzt im Zähler des Radikanden steht. Aus dem Magnetfeld und seinem (unteren) Vertikalgradienten an der Erdoberfläche läßt sich also ebenfalls die Leitfähigkeit einer homogenen Erde bestimmen.

In der gleichen Weise wird nun auch beim Zwei-Schichten-Fall $|E_x|$ durch $\frac{1}{\sigma_1} \left| \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|$ ersetzt (σ_1 , da E_x an der Erdoberfläche, d.h. der Oberfläche der oberen Schicht mit der Leitfähigkeit σ_1 , gemessen wird) und, wiederum unter der Annahme einer homogenen Erde, eine andere scheinbare Leitfähigkeit σ_s^{**} definiert, die im allgemeinen von σ_2 verschieden ist. Es ist die Leitfähigkeit, die ein homogener Boden haben würde, der ein gleiches $\frac{\partial H_y / \partial z}{H_y}$ ergäbe:

$$\frac{\partial H_y / \partial z}{H_y} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_1 u}{T}} \frac{M}{N} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_s^{**} u}{T}} \quad (4)$$

Der Unterschied zwischen σ_s und σ_s^{**} wird deutlich, wenn man wieder die beiden Grenzfälle betrachtet:

für $T \rightarrow 0$, d.h. Eindringtiefe $p_1 \rightarrow 0$, geht zwar wiederum $\sigma_s^{**} \rightarrow \sigma_1$,

für $T \rightarrow \infty$, d.h. Eindringtiefe $p_1 \rightarrow \infty$, dagegen geht $\sigma_s^{**} \rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2}$.

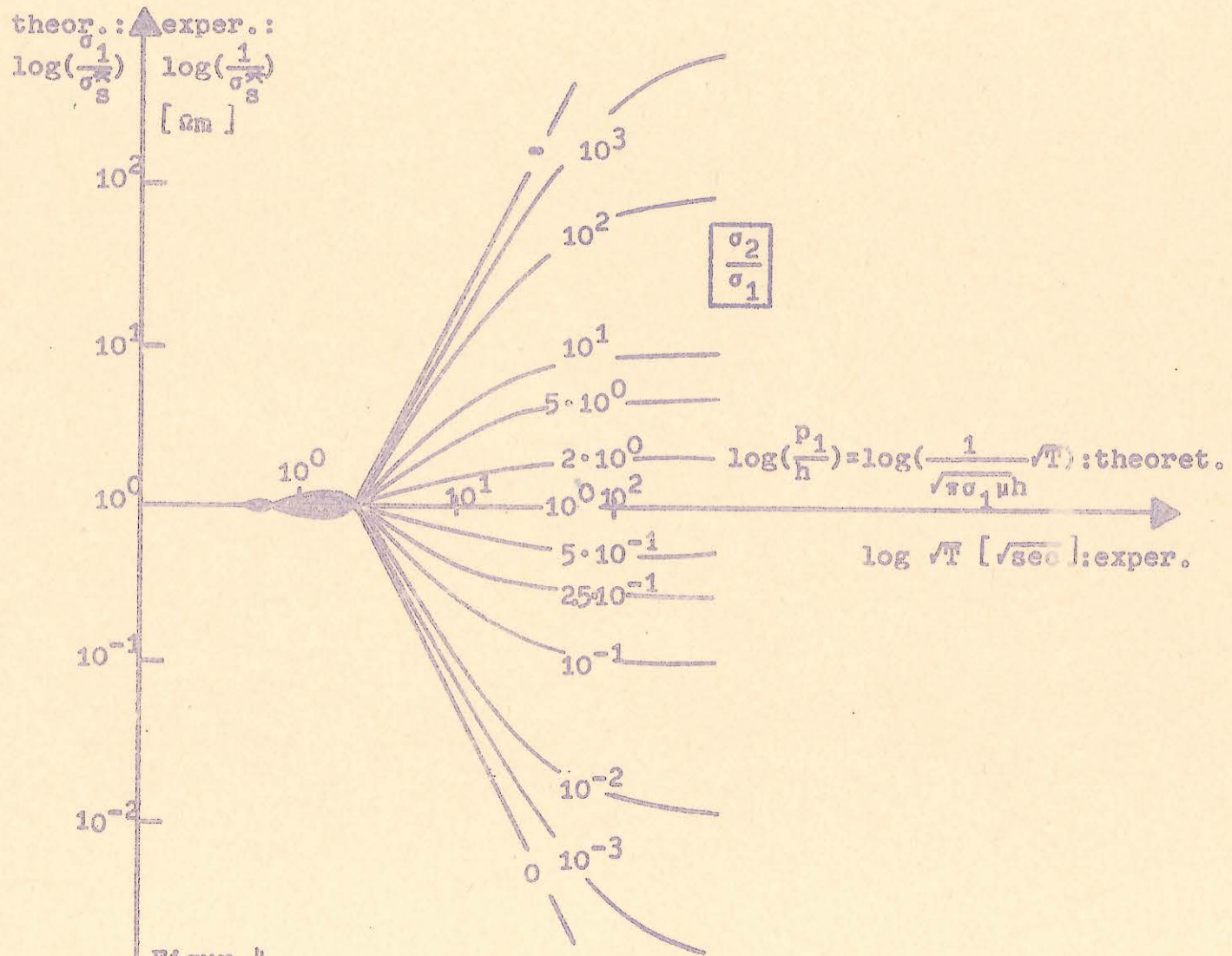
Aus der Doppelgleichung (4) erhält man nun wieder zwei Beziehungen für σ_s^{**} , eine theoretische und eine experimentelle; letztere entsprechend der Definition von σ_s^{**} :

$$\text{theoretisch } \sigma_s^{**} = \sigma_1 \left(\frac{M}{N} \right)^2 \quad (5)$$

$$\text{experimentell } \sigma_s^{**} = \frac{\left| \frac{\partial H_y / \partial z}{H_y} \right|^2 T}{2\pi u} \quad (6)$$

Ein Vergleich der theoretischen Beziehungen für σ_s und σ_s^{**} , (2) und (5), zeigt, daß, wenn man nunmehr $\frac{\sigma_1}{\sigma_s}$ in derselben Weise aufträgt wie früher $\frac{\sigma_s}{\sigma_1}$ (Figur 3), man genau die gleiche Kurvenschar bekommt wie vorher (Figur 4). Mißt man jetzt σ_s^{**} als Funktion der Periode T und trägt $\frac{1}{\sigma_s^{**}}$ im gleichen Maßstab doppelt-logarithmisch über \sqrt{T} auf, so lassen sich, nachdem die gemessene Kurve mit einer aus der theoretischen Kurvenschar zur Deckung gebracht worden ist, genau wie beim Cagniard'schen Verfahren σ_1 , σ_2 und h eindeutig bestimmen:

- 1) Vergleich der Ordinaten $\rightarrow \sigma_1$
- 2) Kurvenparameter $\rightarrow \sigma_2$
- 3) Vergleich der Abszissen $\rightarrow h$



Figur 4

Auch hier entspricht der Kurvenparameter wieder dem asymptotischen Wert für $T \rightarrow \infty$ (bzgl. der theoretischen Ordinate), da dann $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ geht (s.o.).

Die gleiche Aufgabe, die beim Cagniardschen Verfahren durch Messung des elektrischen und des magnetischen Feldes gelöst wird, kann also auch durch Messung des Magnetfeldes und seines (unteren) Vertikalgradienten an der Erdoberfläche gelöst werden. Die E-Feldmessung ist praktisch lediglich durch eine H-Feld-Differenzmessung ersetzt. Solche Differenzmessungen, etwa in einem Bohrloch oder einem Schacht, sind wiederholt gefordert worden. Hier bietet sich eine direkte Anwendungsmöglichkeit.

Das beschriebene neue Verfahren besitzt einige wesentliche Vorteile gegenüber dem Cagniardschen Verfahren: Zunächst die messtechnischen Vorteile von H-Feld- gegenüber E-Feldmessungen. Darüber brauche ich nichts zu sagen, sie sind bekannt. 2) Das Verfahren ist unempfindlicher gegen Störungen durch örtliche Inhomogenitäten der Leitfähigkeit, die bei geoelektrischen und tellurischen Messungen, insbesondere an den Orten der Stromsonden, zu größeren Fehlern führen können. Bei der H-Feld-Differenzmessung wird bereits über kleinere Inhomogenitäten in der oberflächennahen Schicht gemittelt. 3) Das neue Verfahren ist ebenfalls unempfindlicher gegenüber lateralen Leitfähigkeitsanomalien. Die x-Komponente des Stromes ist ja im allgemeinen

$$j_x = - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

Beim Vorhandensein von Leitfähigkeitsanomalien ist der zweite Term auf der rechten Seite nicht mehr gleich Null, wie es beim Cagniardschen Verfahren angenommen wird. Er ist erfahrungsgemäß sogar sehr beträchtlich und geht in die unter den Cagniardschen Voraussetzungen durchgeführten j- bzw. E-Messungen als Fehler ein. Direkte Messungen von $\frac{\partial H_y}{\partial z}$ enthalten diesen Fehler nicht. Natürlich geben die Leitfähigkeitsanomalien in beiden Fällen auch einen Fehler in $\frac{\partial H_y}{\partial z}$. Der gesamte durch Leitfähigkeitsanomalien verursachte Fehler ist jedoch bei dem neuen Verfahren kleiner als beim ursprünglichen Cagniardschen Verfahren, es sei denn, man benützte von vornherein nur normale Feldanteile.

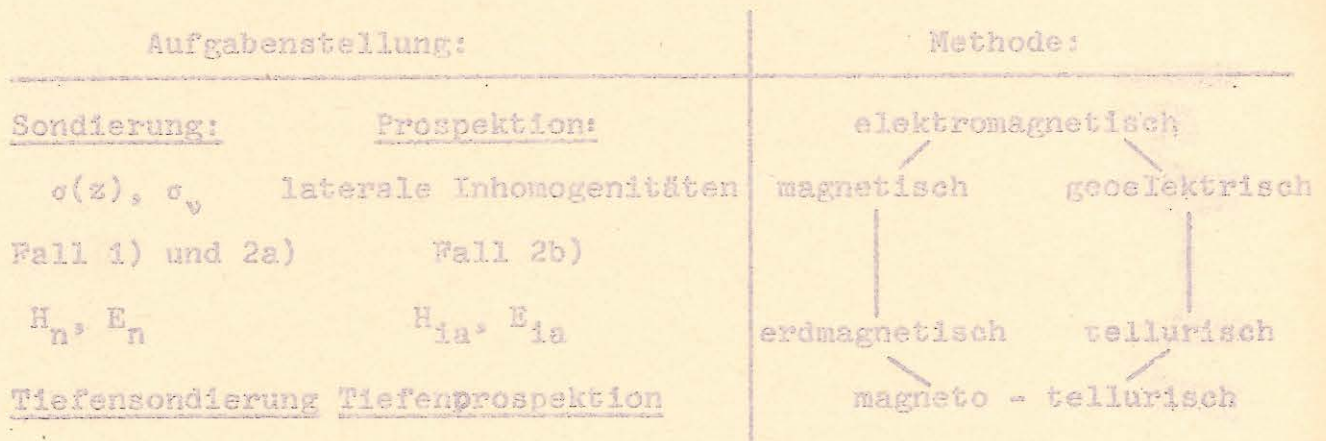
Soviel zu den Vorteilen des neuen Verfahrens. Nun zu der wichtigsten Frage: wie soll man es nennen? Zur Abschreckung hatte ich schon zu Anfang einmal "erdmagnetische Magneto-Tellurik" gesagt. Das direkte Pendant zu "Magneto-Tellurik", wie das Cagniardsche Verfahren häufig kurz genannt wird, wäre sogar nur "Erdmagnetik". Auch von Trivialnamen, wie Cagniard-Verfahren für das eine und etwa "Max-und Moritz-Verfahren" für das andere, halte ich nicht viel. Sie erschweren den Überblick, das Erkennen von Zusammenhängen und entbehren überhaupt jeglicher Systematik. Ein Vorschlag für eine systematische Nomenklatur sei hier kurz angegeben.

Ausgegangen wird von den beiden prinzipiell verschiedenen Aufgabenstellungen, die bei geophysikalischen Erkundungen (in der angewandten Geophysik) vorkommen, nämlich der Sondierung und der Prospektion (Kartierung?). Bei der Sondierung (z.B. einer geoelektrischen Sondierung nach dem Wenner- oder dem Schlumbergerverfahren) ist die Aufgabe, die normale, vertikale Leitfähigkeitsänderung mit der Tiefe $\sigma(z)$ oder σ_v zu bestimmen, entsprechend dem Fall 1) oder 2a) in der anfangs dargelegten Fallunterscheidung. Man benutzt dazu die normalen Feldanteile (H_n, E_n), entweder nach Abtrennung oder unter Vernachlässigung der anomalen (inneren) Feldanteile (H_{ia}, E_{ia}). Bei der Prospektion dagegen werden, entsprechend dem oberen Fall 2b), gerade diese anomalen (inneren) Anteile untersucht in Hinblick auf etwaige Einlagerungen (Bodenschätze), oder allgemein auf laterale Inhomogenitäten (hier der Leitfähigkeit). Während der Anwendungsbereich der klassischen Verfahren in der angewandten Geophysik jedoch im wesentlichen auf den ersten Kilometer des Erdbodens beschränkt ist, interessieren wir uns vor allem für noch größere Tiefen, bis hinab zu einigen 100 km. Dementsprechend können wir zunächst, in einfacher Übertragung der beiden genannten Aufgabenstellungen auf größere Tiefen, eine Tiefensondierung und eine Tiefenprospektion unterscheiden (engl. deep-sounding und deep-prospecting besser als depth-sounding und depth-prospecting).

Die Methoden, mit der diese verschiedenen Aufgaben behandelt werden, können durch vorangestellte Adjektive näher bezeichnet werden: magnetisch für die Verwendung magnetostatischer Felder (z.B. magnetische Prospektion), erdmagnetisch für die Verwendung der erdmagnetischen Variationen, tellurisch bei Benutzung natürlicher Erdströme bzw. erdelektrischer Felder, magneto-tellurisch für die

Verbindung der beiden letzteren, geoelektrisch bei Anwendung künstlicher (stationärer) Erdströme oder elektrischer Felder und schließlich elektromagnetisch für alle Induktionsverfahren mit Wechselstrom.

Das nachstehende Schema gibt einen Überblick.



Die Methoden der oberen Hälfte im schematischen Zyklus (magnetische, elektromagnetische und geoelektrische Methoden) werden vorwiegend verwandt für eine geophysikalische Erkundung (Oberbegriff) der oberflächennahen Bodenschicht (Sondierung, Prospektion). Die Methoden der unteren Hälfte (erdmagnetische, magneto-tellurische und tellurische Methoden) dienen dazu, eine geophysikalische Tiefenerkundung (!) der Erdkruste und des oberen Mantels durchzuführen (Tiefensondierung, Tiefenprospektion).

In dieses Schema lassen sich alle existierenden und zukünftigen Verfahren systematisch einordnen. Das Cagniard'sche Verfahren wäre eine "magneto-tellurische Tiefensondierung", das erdmagnetische Analogon dazu dementsprechend eine "erdmagnetische Tiefensondierung". Das, was bisher so genannt wurde, wäre in der neuen Nomenklatur eine "erdmagnetische Tiefenprospektion". Dieses Umdenken in der gewohnten Bezeichnungsweise ist vielleicht das einzig störende an dieser Nomenklatur. Aber Um- und Neudenken gehören zu den Aufgaben eines Wissenschaftlers.

Trivialnamen bleiben der Kennzeichnung der speziellen Verfahren vorbehalten. So kann man etwa eine geoelektrische Sondierung nach dem Wenner-, dem Schlumberger- oder dem Dipol-Verfahren durchführen. Auch für die magneto-tellurische Tiefensondierung ist ein zweites Auswerteverfahren, neben dem Cagniard'schen Verfahren, bekannt

(NIBLETT und SAYN - WITTGENSTEIN 1960).

Letztlich lassen sich mit Hilfe der neuen Nomenklatur auch allgemeine Aussagen machen, etwa wie: Alle Sondierungsverfahren sind (unter ihren Voraussetzungen) eindeutig, alle Prospektionsverfahren, jedenfalls die bisherigen, nicht; die potentialtheoretischen unter ihnen prinzipiell nicht. Man erhält also genauere Aussagen, wenn man ein Prospektions- mit einem Sondierungsverfahren koppelt, etwa die erdmagnetische Tiefenprospektion mit der erdmagnetischen oder der magneto-tellurischen Tiefensondierung (wie z.B. bei FORSTENDORFER).

Und schließlich bleibe auch ich mit dem neuen Verfahren und der neuen Nomenklatur im Rahmen des Symposions über "Erdmagnetische Tiefensondierung".