

Vortrag cand.geophys. R.Latka, München

"Berechnung von Musterkurven für verschiedene Modelle der Magnetotellurik"

Freitag, den 1.10.1965

I. Ein Kurvenatlas für das Cagniard'sche Modell.

Die Herleitung der der Cagniard'schen Theorie zugrunde liegenden Gleichung $\Delta \vec{A} = k^2 \vec{A}$ mit $k^2 = \frac{4\pi i \omega}{\rho}$ ist hinreichend bekannt. Es soll daher nur kurz die Rekursionsformel für den scheinbaren Widerstand ρ_s abgeleitet werden.

Wir gehen von der Lösung $A_m = e^{i\omega t} (B_m e^{zk_m} + C_m e^{-zk_m})$ für die Schicht m aus. Mit $E_x = -\frac{\partial A}{\partial t}$ und $H_y = \frac{\partial A}{\partial z}$ erhalten wir für $\frac{E_x}{H_y}$:

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_m(z) = -\frac{i\omega}{k_m} \cdot \frac{B_m e^{zk_m} + C_m e^{-zk_m}}{B_m e^{zk_m} - C_m e^{-zk_m}} = -\frac{i\omega}{k_m} \cdot \frac{e^{(zk_m + \ln \sqrt{\frac{B}{C}})} + e^{-(\dots)}}{e^{(\dots)} - e^{-(\dots)}} =$$

$$= -\frac{i\omega}{k_m} \operatorname{cth}(zk_m + 0,5 \ln \frac{B}{C})$$

Speziell für den Halbraum ($B = 0$) gilt: $Z_{HR} = \frac{i\omega}{k_{HR}}$.

Wir wollen $\frac{B}{C}$ eliminieren und berechnen dazu $Z(z_2)$ in Abhängigkeit von $Z(z_1)$, wobei z_1 und z_2 in der gleichen Schicht liegen sollen.

$$0,5 \ln \frac{B}{C} + zk_m = -\operatorname{ar} \operatorname{cth}(Z_m(z) \frac{k_m}{i\omega})$$

$$Z_m(z_2) = -\frac{i\omega}{k_m} \operatorname{cth}(k_m(z_2 - z_1) - \operatorname{ar} \operatorname{cth}(Z_m(z_1) \frac{k_m}{i\omega}))$$

Da an den Schichtgrenzen E und H stetig sind, ist auch Z dort stetig. Indem wir für z_1 bzw. z_2 jeweils die untere bzw. obere Grenze einer Schicht einsetzen, erhalten wir mit $z_{2,m} = z_{1,m} + h_m$ durch fortgesetztes Einsetzen:

$$Z(0) = -\frac{i\omega}{k_m} \operatorname{cth}(-h_1 k_1 - \operatorname{ar} \operatorname{cth}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{cth}(-h_2 k_2 - \dots - \operatorname{ar} \operatorname{cth}(\frac{k_{n+1}}{k_n} \dots))))$$

und mit der Definition $\rho_s = 2TZ(0)^2 e^{-i\pi}$:

$$\rho_s = \rho_1 \left[\operatorname{cth}(h_1 k_1 + \ar \operatorname{cth}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{cth}(h_2 k_2 + \dots + \ar \operatorname{cth}(\frac{k_{n-1}}{k_n} \dots))) \right]^2$$

Aus E- und H-Feldmessungen bestimmt sich ρ_s zu

$$\rho_s = 2T e^{-i\pi} \left(\frac{E_x}{H_y} \right)^2$$

Verfügen wir über einen genügend großen Satz von Modellkurven, so können wir durch Vergleich Widerstände und Schichtdicken bestimmen - vorausgesetzt, die Annahmen, von denen man beim Cagniard'schen Modell ausgeht, sind hinreichend gut erfüllt. Zur Herstellung eines Kurvenatlases von ρ_s wurde ein Programm für die Rechenanlage IBM 7090 in Garching geschrieben. Der berechnete Atlas für den Betrag von ρ_s wurde für 2, 3 und 4 Schichtenmodelle angelegt. Die Parameter variieren wie folgt:

$$T = 10s \dots 10^6 s; \rho_1 = h_1 = 1$$

n	ρ_2	h_2	ρ_3	h_3	ρ_4
2	$10^{-4} \dots 10^4$				
3	$10^{-2} \dots 10^2$	$10^{-.5} \dots 10^{1.5}$	$10^{-3} \dots 10^3$		
4	$10^{-2} \dots 10^2$	$10^{-.5} \dots 10^{1.5}$	$10^{-1} \dots 10^3$	$10^{-.5} \dots 10^{1.5}$	$10^{-2} \dots 10$

Die Parameter ändern sich jeweils um den Faktor 10 bzw. $10^{0.5}$ bei ρ bzw. h .

II. Numerische Lösung der Differentialgleichung $\Delta \vec{A} = k^2 \vec{A}$.

Um Lösungen der Gleichung für kompliziertere Anordnungen zu erhalten, bietet sich ein numerisches Verfahren an: Die Differentialgleichung wird durch eine Differenzengleichung angenähert. Für diese wird durch ein Iterationsverfahren auf einem Gebiet eine beliebig genaue Lösung berechnet. Durch Übergang zu immer kleineren Differenzen kann die Lösung der Differentialgleichung i.A. beliebig genau angenähert werden.

Zur Verringerung des Rechenaufwands beschränken wir uns auf eine zweidimensionale Anordnung; außerdem setzen wir voraus, daß das Vektorpotential nur eine Komponente senkrecht zur Fläche hat.

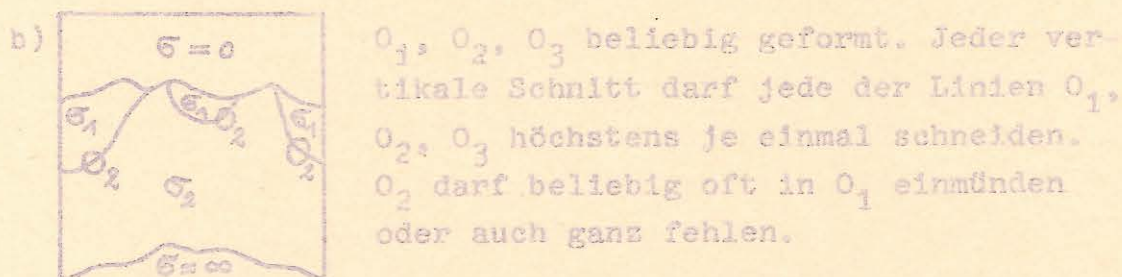
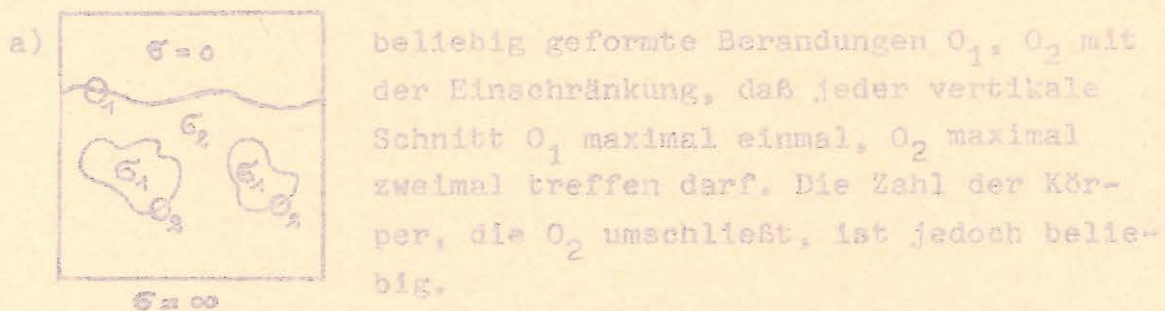
Indem wir

$$\frac{A(x-h, z) + A(x+h, z) + A(x, z-h) + A(x, z+h) - 4A(x, z)}{h^2} \quad \text{für } \Delta A \text{ einsetzen,}$$

$$\text{ergibt sich: } A(x, z) = \frac{A(x, z-h) + A(x, z+h) + A(x-h, z) + A(x+h, z)}{4 + 4\pi i \omega h^2 / \rho}$$

Diese Gleichung verwenden wir zur Iteration: ein verbesserter Wert in einem Punkt ist ein gemittelter Wert aus den vier Nachbarwerten.

Das Hauptproblem stellt die Wahl der Randwerte dar. Am unteren Rand setzen wir $\rho = 0$, damit wird dort auch $A = 0$. Für den linken und rechten Rand nehmen wir an, daß Störungen soweit abgeklungen sind, daß wir dort das Cagniard'sche Modell anwenden können. Insbesondere wählen wir rechts den Amplitudenfaktor so, daß sich am oberen Rand links und rechts gleiche Werte ergeben. Diesen Wert nehmen wir an ganzen oberen Rand an. Für die Durchführung der Rechnung wurde ein Programm für die IBM 7090 geschrieben. Um möglichst geringe Rechenzeiten zu erhalten und um die Dateneingabe zu erleichtern, wurden die Modelle noch folgenden Einschränkungen unterworfen:



Berechnete Modelle.

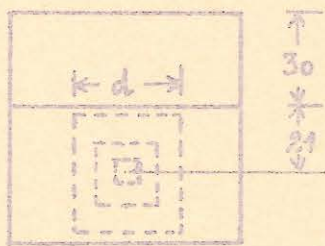
Folgende Modelle wurden mit 25 Punkten pro Kante für die Schwingungsdauern 5, 50, 500, 5000 s und die Widerstandsverhältnisse $10^{11}; 10^{13}$ und $10^{12}; 10^{13}$ (cgs Einheiten!) gerechnet (bis zu einer Genauigkeit von etwa 10^{-3}):

(Im folgenden alle Längenangaben in km)



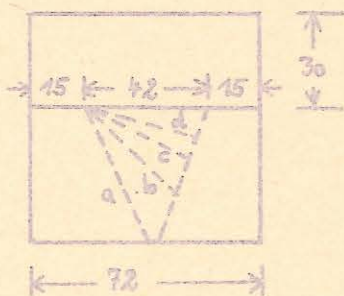
M1) Einlagerung in wechselnden Tiefen:

- bei a 0 km
- b 12 km
- c 24 km



M2) Einlagerungen mit verschiedenen Querschnitten:

- a d = 36
- b d = 18
- c d = 6



M3) keilförmige Einlagerungen mit verschiedenen Winkeln:
a 63°, b 45°, c 27°, d 18°

Ergebnisse zu den gerechneten Modellen.

Gezeichnet sind die E- und H-Feldwerte an der Oberfläche
(Alle Größen in el.mag.Maßsystem)

EY = E-Feldkomponente senkrecht zur Modellfläche (die beiden anderen Komponenten sind Null);

HX = H-Feldkomponente in der Modellebene, parallel zur Oberfläche

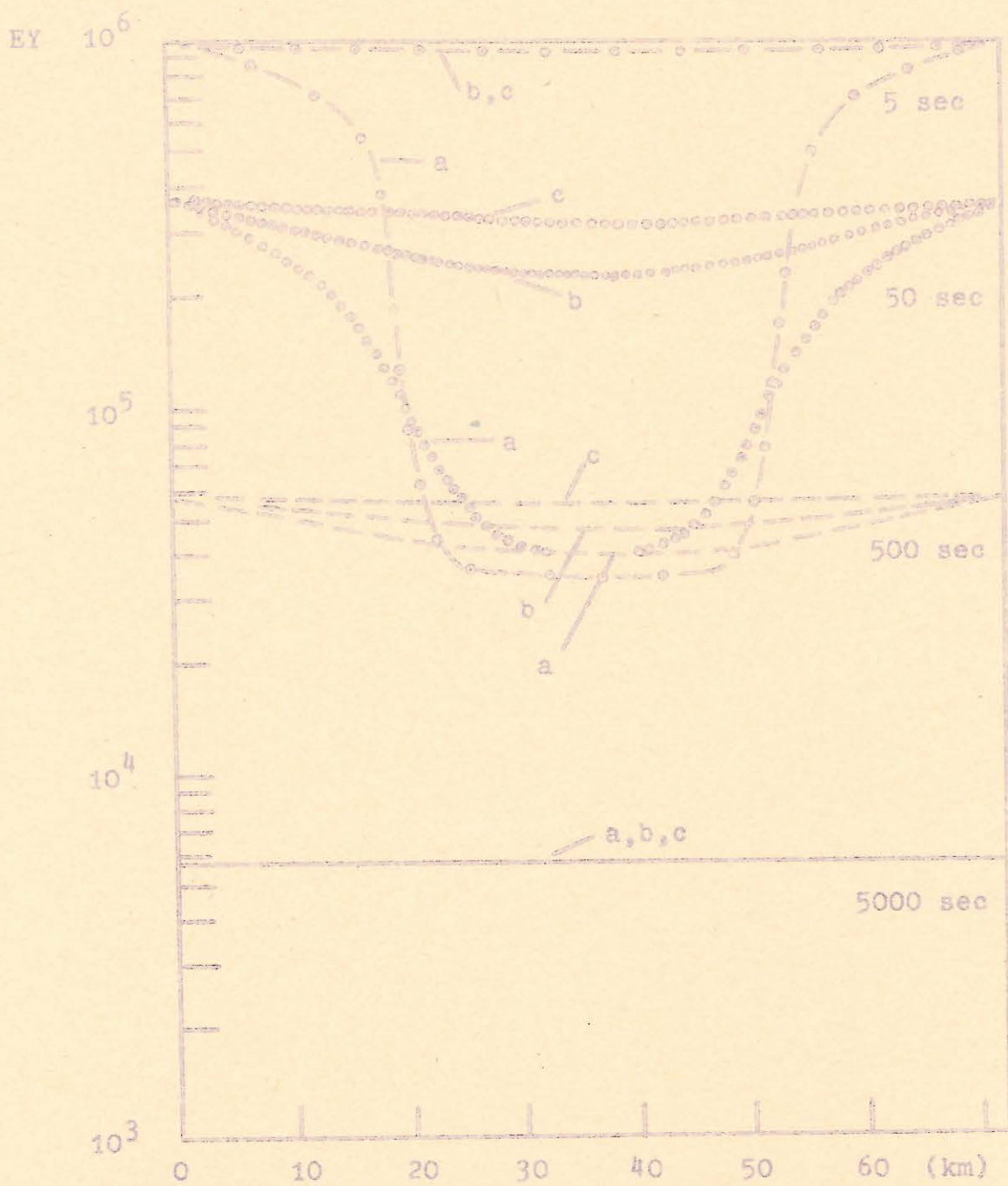
HZ = Z-Komponente (die dritte Komponente ist Null)

Modell M1 a,b,c s.Figuren 1-3

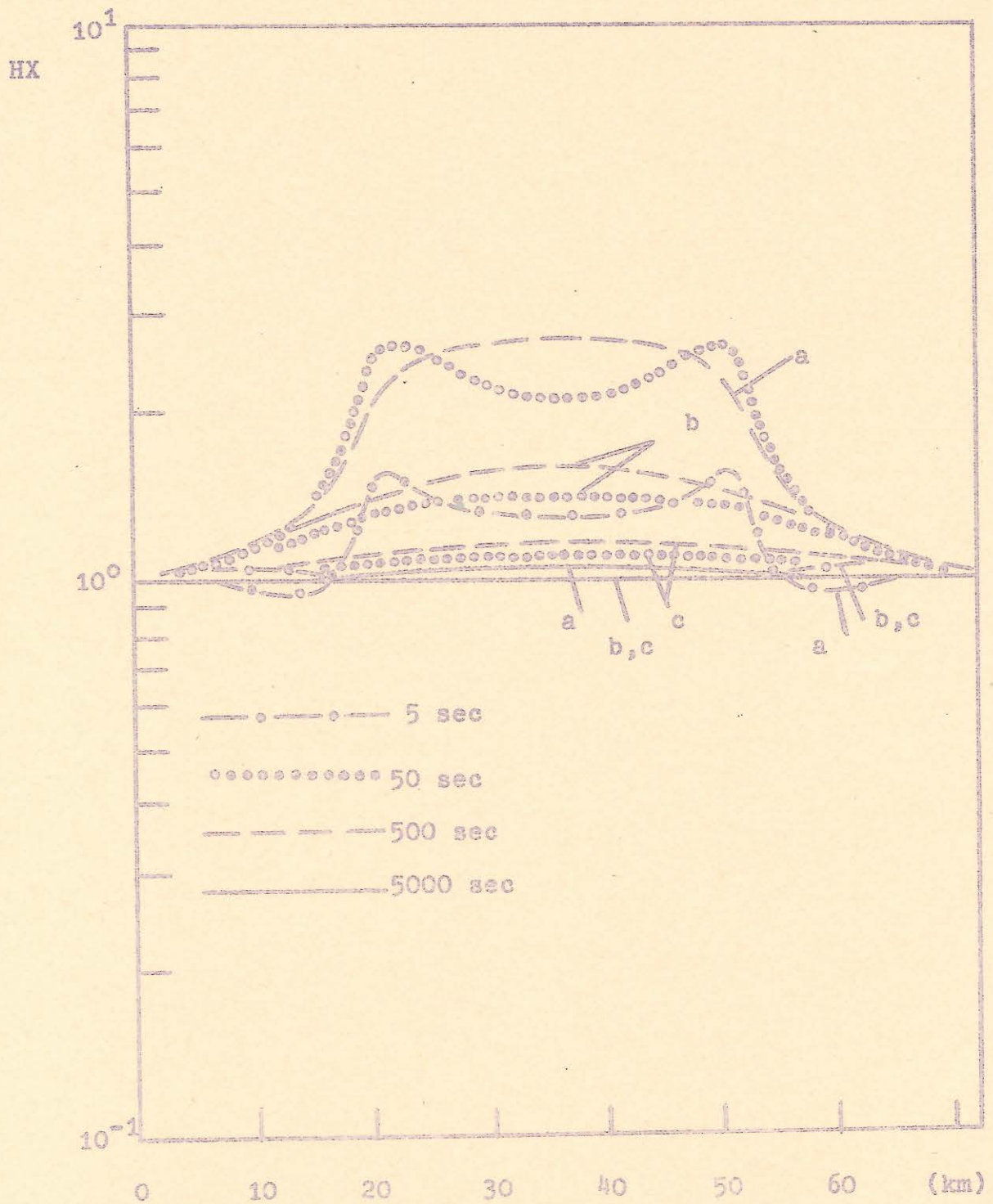
Modell M2 a,b,c s.Figuren 4-6 und

Modell M3 a,b,c,d s.Figuren 7-9.

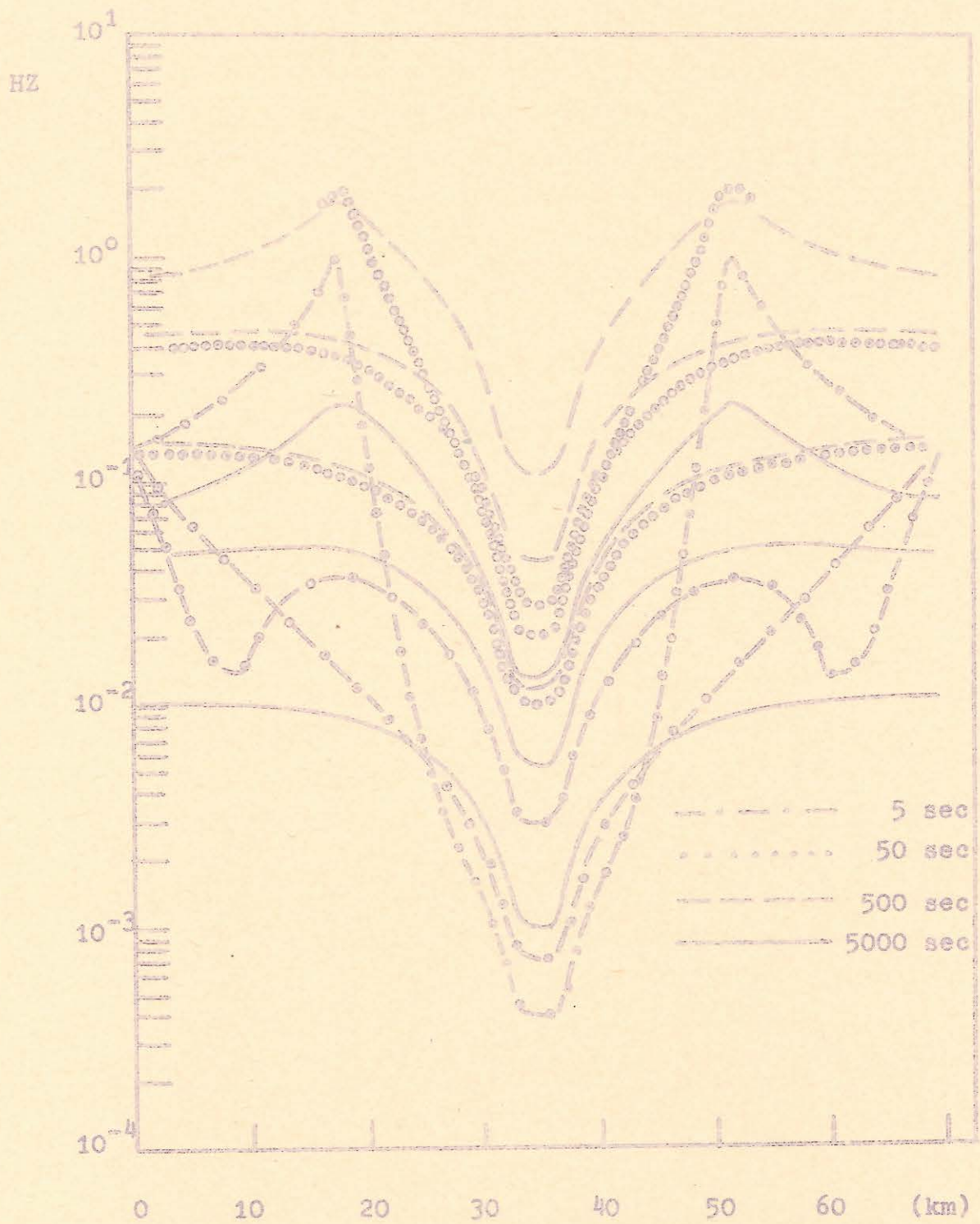
Bei HZ ist nur M3 d gezeichnet, eine vollständige Wiedergabe wäre zu unübersichtlich. Die, vor allem bei der 5 sec Kurve sichtbare, Stufe bei etwa 20 km rührt von der Annäherung des Keils durch eine Treppenkurve her.



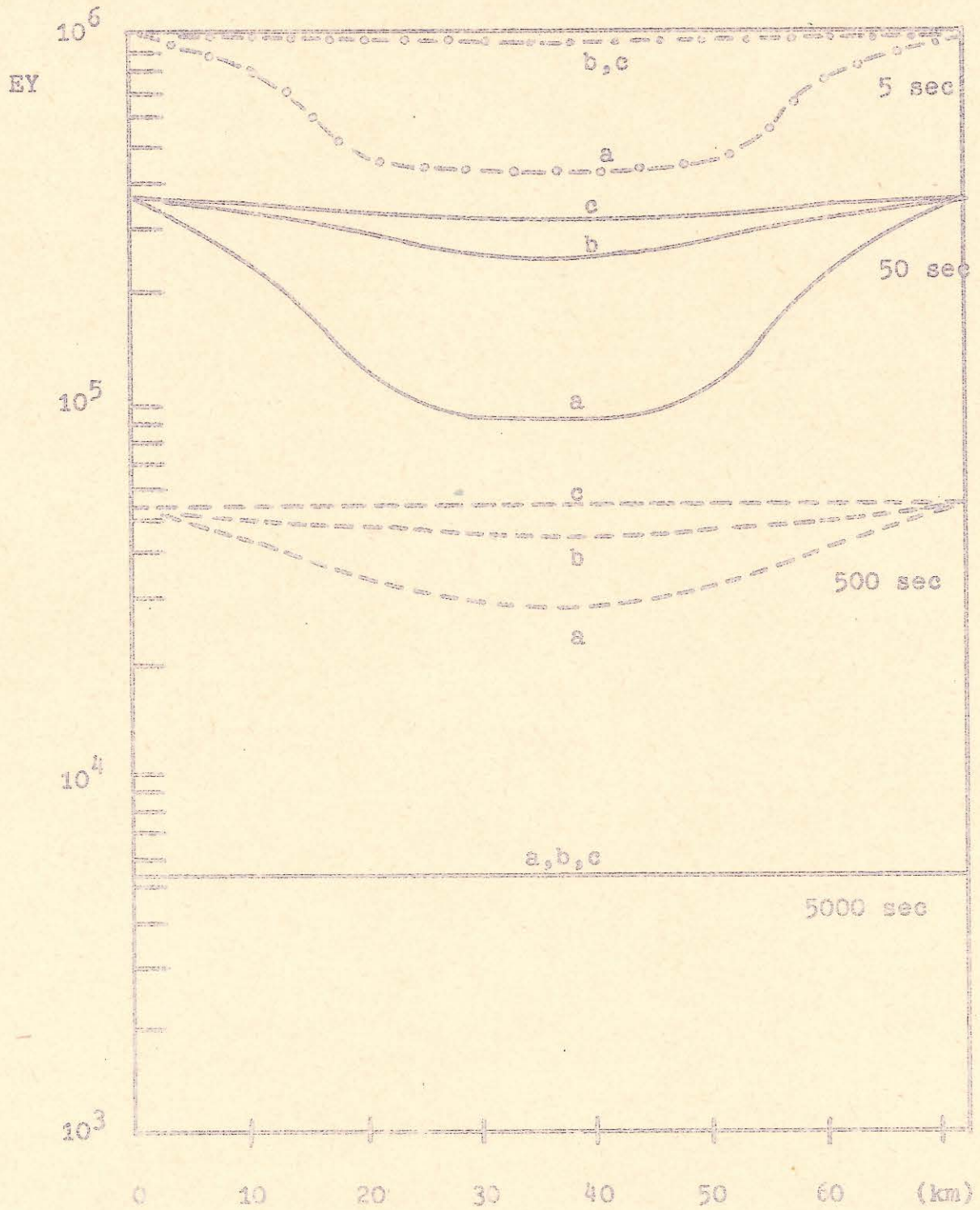
Figur 1



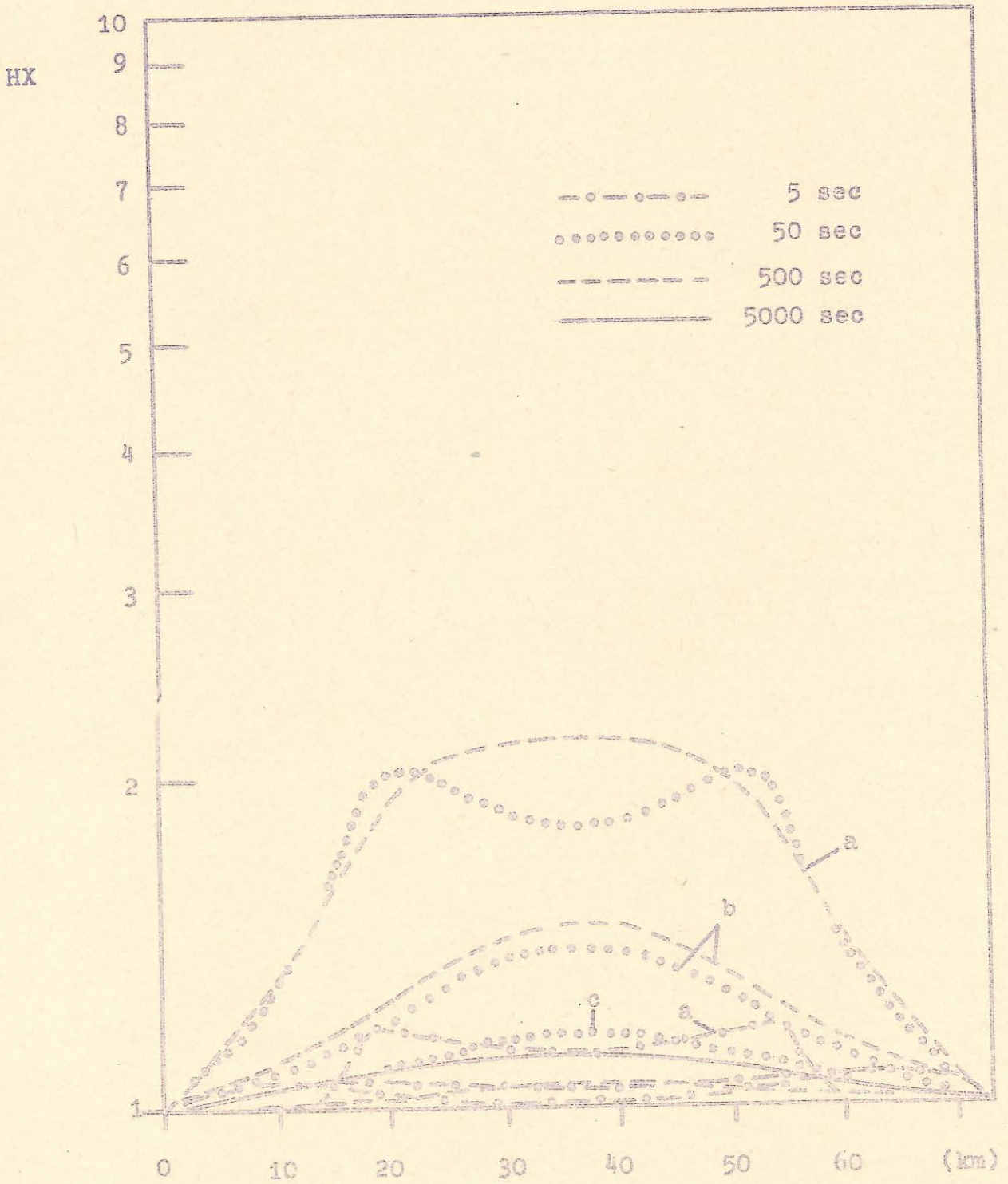
Figur 2



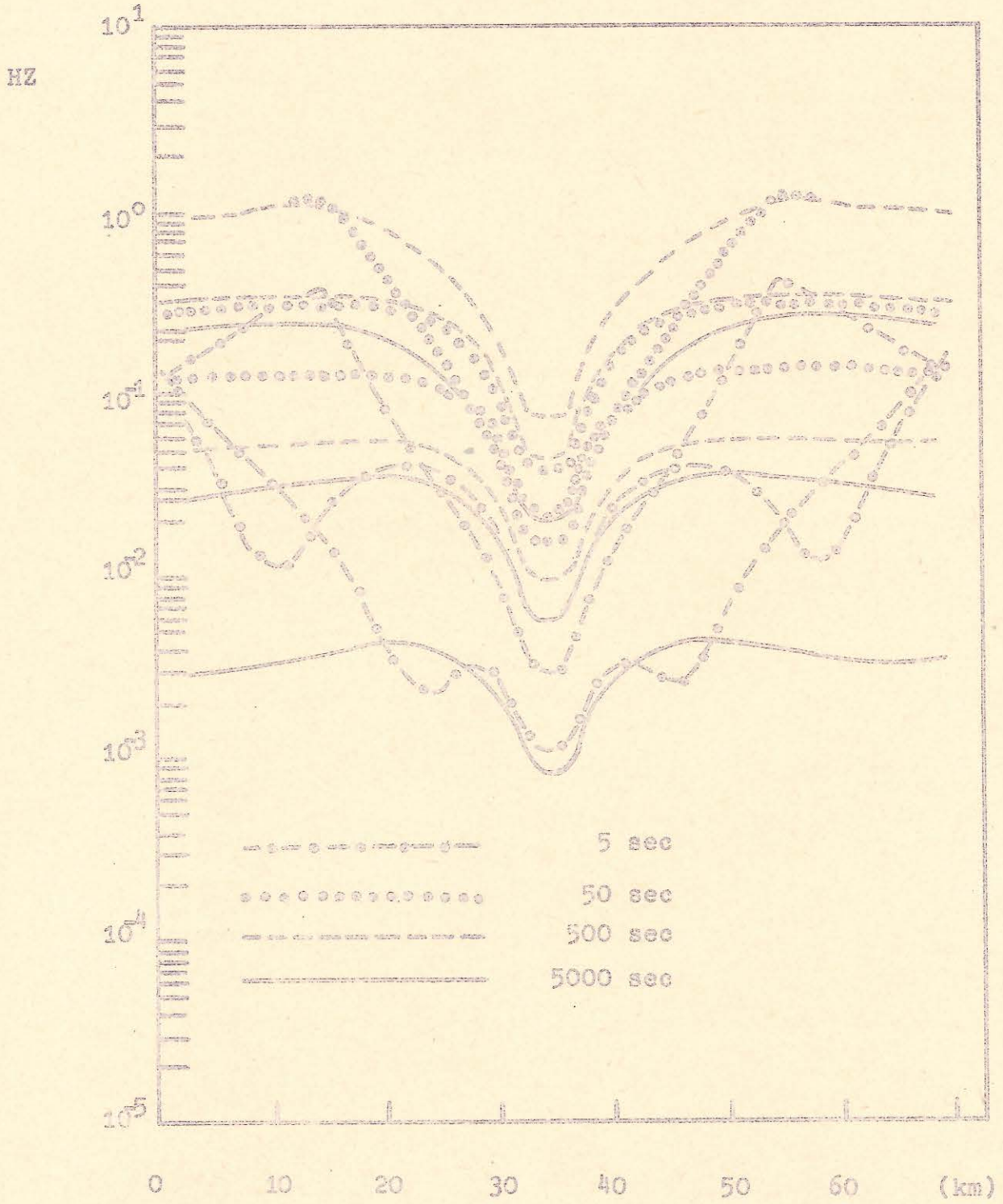
Figur 3



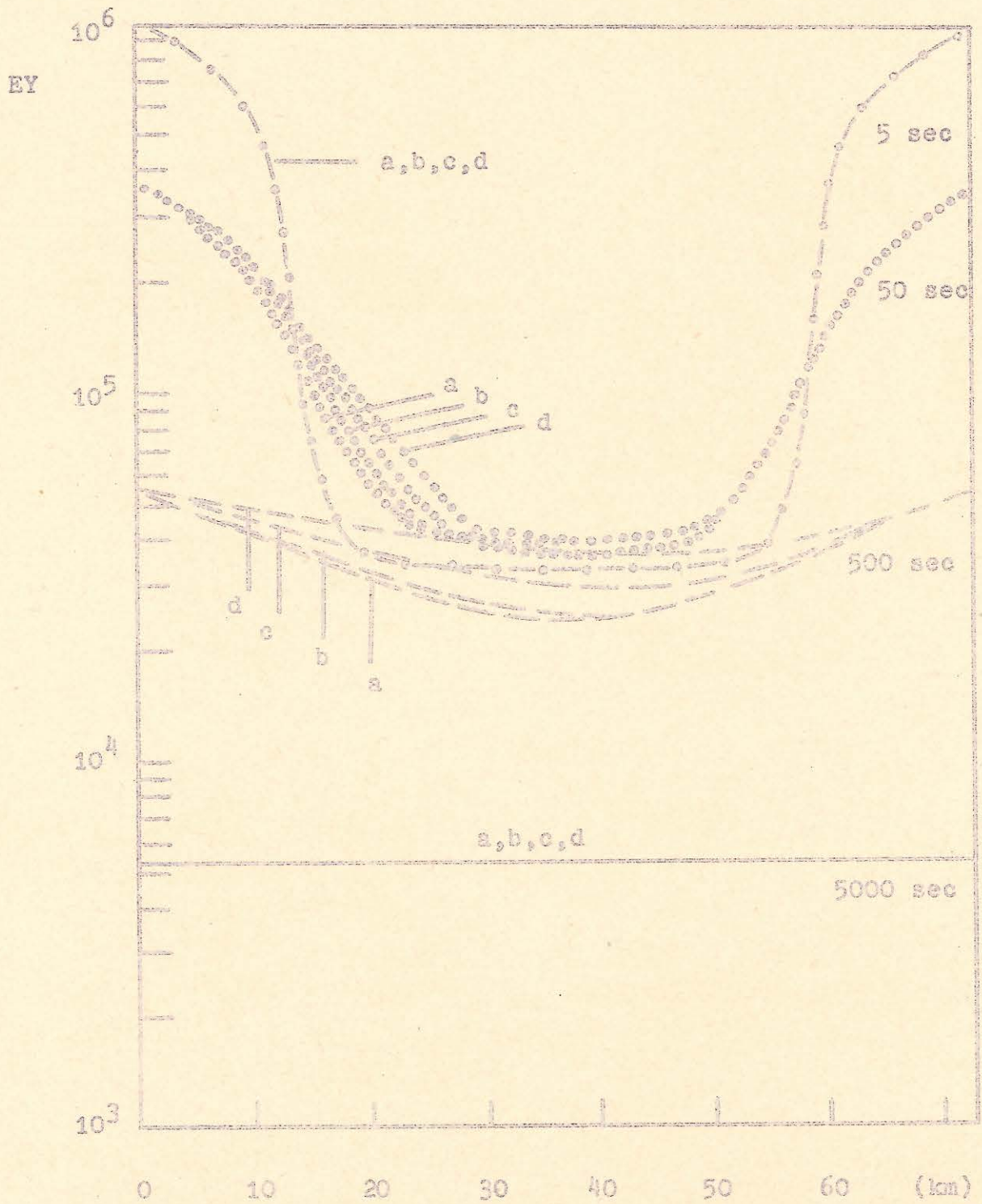
Figur 4



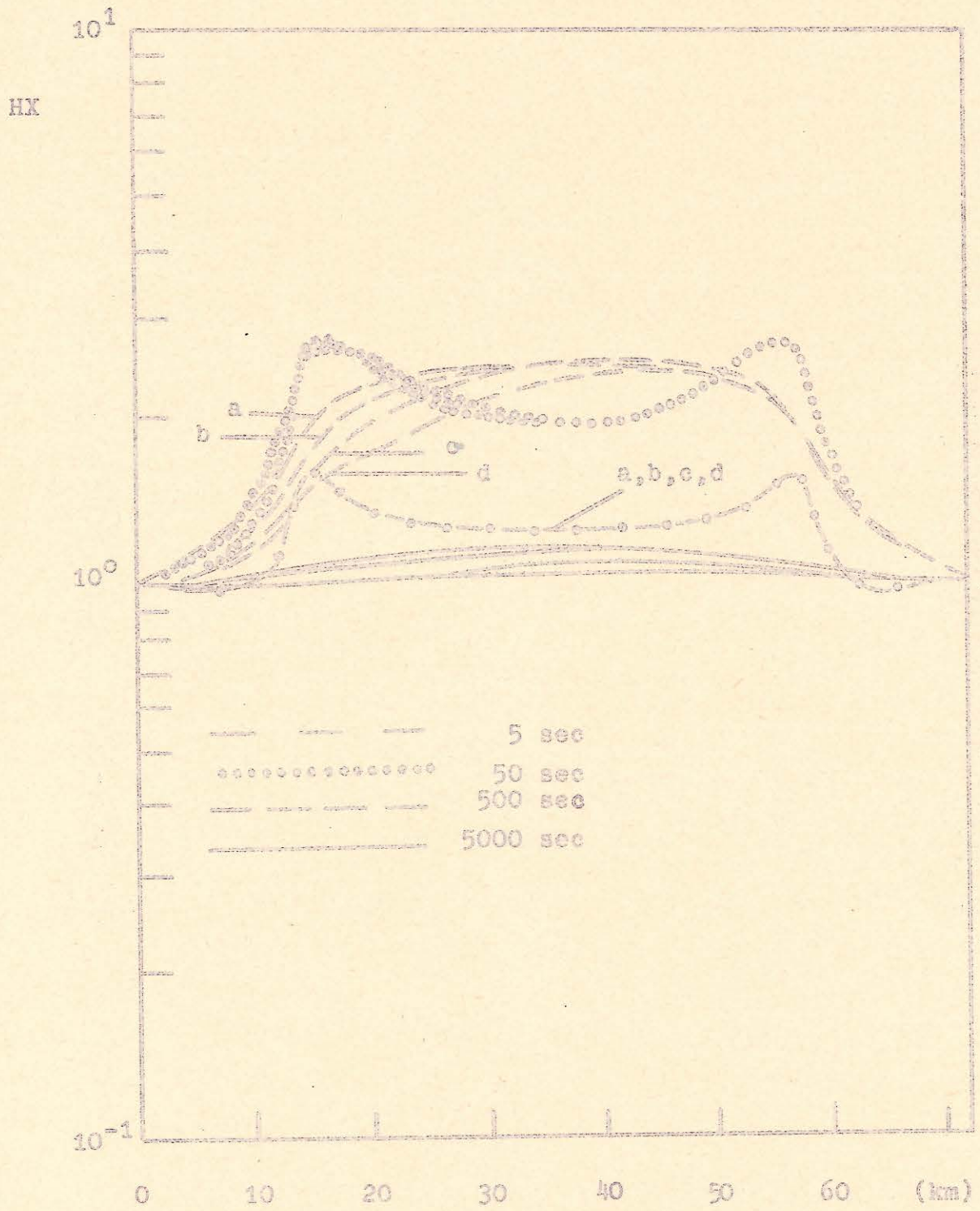
Figur 5



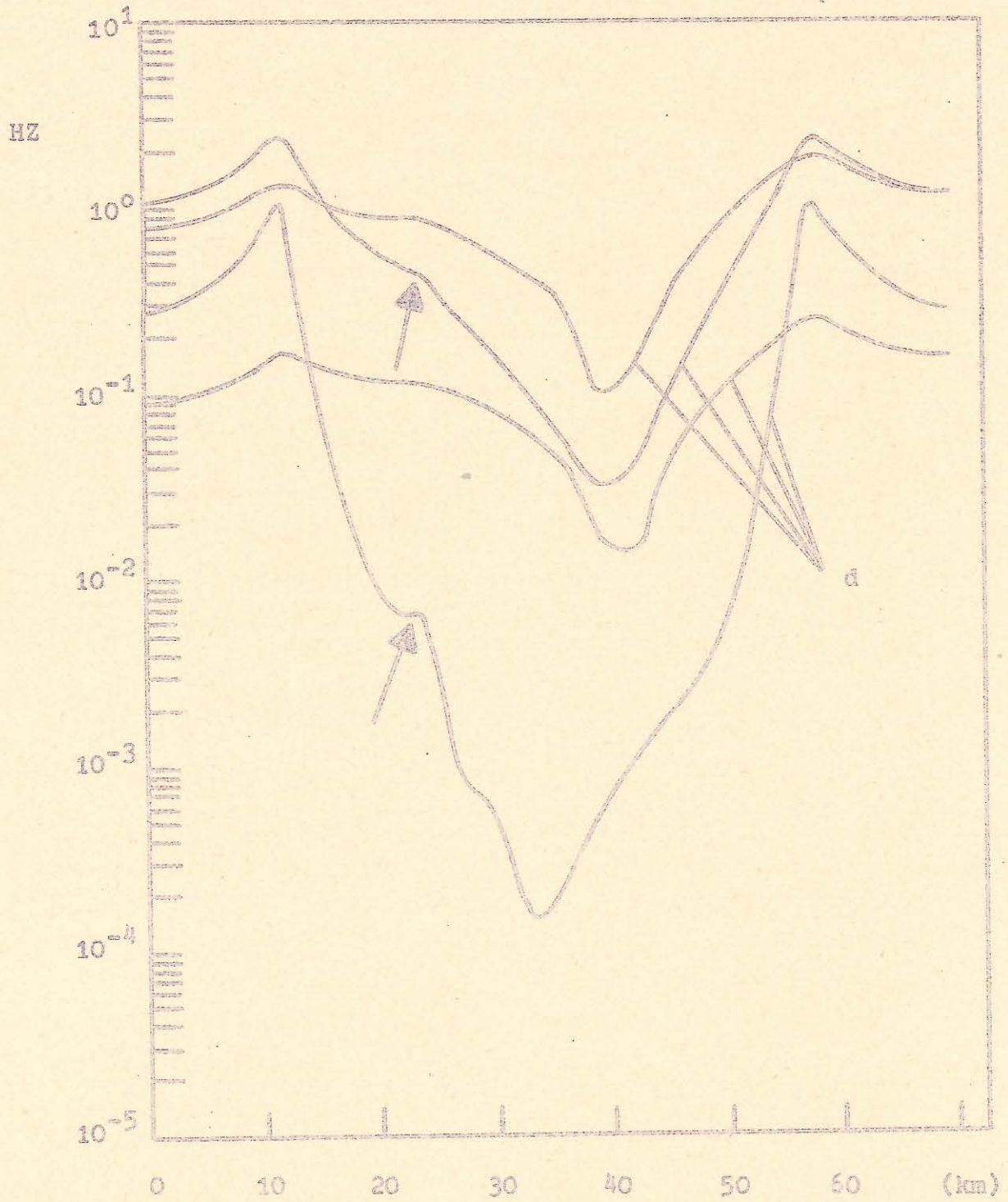
Figur 6



Figur 7



Figur 8



Figur 9