

Vortrag cand.phys. Weidelt, Göttingen

"Ergebnisse von Modellrechnungen für Strukturen mit horizontalem Leitfähigkeitsprung"

Freitag, den 1.10.1965

In letzter Zeit ist der Versuch unternommen worden, die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie durch die rasche oberflächennahe Leitfähigkeitsänderung am norddeutschen Sedimentabbruch zu deuten.

Dies ist der Anlaß dazu, das anomale innere Feld einer starken Leitfähigkeitsänderung in der Deckschicht, im folgenden durch einen Leitfähigkeitsprung schematisiert, etwas ausführlicher zu betrachten. Gleichzeitig soll auch der Einfluß der Conductosphäre auf den anomalen Feldverlauf untersucht werden.

Den Rechnungen legen wir das folgende zweidimensionale Modell zugrunde (Figur 1). Die ebene Deckschicht werde durch den in E-W-Richtung verlaufenden Sprung in zwei Halbplatten aufgeteilt. Ihre Mächtigkeit sei d , die Leitfähigkeit sei σ_1 im Süden, σ_2 im Norden, $\sigma_1 < \sigma_2$. Die Resistosphäre habe die Leitfähigkeit $\sigma = 0$, im Abstand a von der Erdoberfläche beginne die Conductosphäre mit $\sigma = \infty$. Der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems liege im Sprungpunkt an der Oberfläche, x nach rechts, y nach vorn, z nach unten.

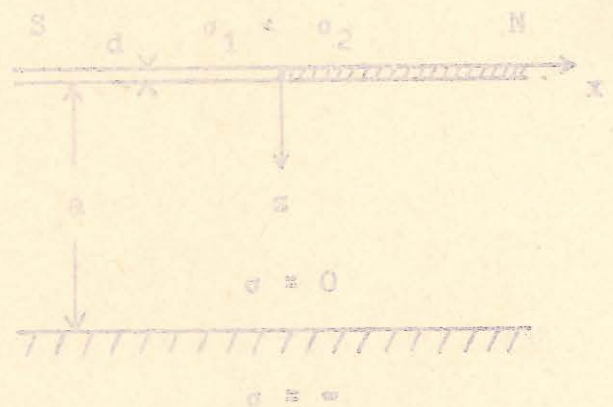


Fig. 1

Der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems liege im Sprungpunkt an der Oberfläche, x nach rechts, y nach vorn, z nach unten.

In diesem zweidimensionalen Modell erzeugt ein induzierendes Feld in y -Richtung kein anomales Magnetfeld. Deshalb werden im folgenden nur Magnetfelder in der x, z -Ebene betrachtet. Die Lösung des Induktionsproblems für endlich dicke Platten bereitet große mathematische Schwierigkeiten. Um dennoch einige Aussagen machen zu können, sollen unsere Platten als "dünn" behandelt werden. Dies bedeutet, daß das elektrische Feld über die Dicke der Platte kon-

stant sein soll. Voraussetzung hierfür ist u. a., daß die Länge, in der sich das Feld wesentlich ändert, groß ist gegen die Plattendicke. In unmittelbarer Umgebung des Sprunges wird diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt sein.

An der Platte soll die Grenzbedingung für dünne leitende Schichten befriedigt werden:

$$E(x,0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx \left\{ \frac{\partial}{\partial z} E(x,z) \Big|_{z=+0} - \frac{\partial}{\partial z} E(x,z) \Big|_{z=-0} \right\} \quad (1)$$

$E = E_y$ ist die einzige nicht verschwindende Komponente des elektrischen Feldes; als Zeitabhängigkeit ist $e^{+i\omega t}$ angenommen worden. Die Aufgabe besteht darin, eine Lösung der Laplacegleichung $\Delta E = 0$ zu suchen, die bei $z = 0$ der Gleichung (1) gehorcht, mit $\sigma(x) = \sigma_1$, $x < 0$, $= \sigma_2$, $x > 0$, bei $z = a$ verschwindet und im übrigen dort, wo die induzierenden Ströme fließen, die richtigen Singularitäten besitzt. Dies Problem läßt sich auf eine (singuläre) Integralgleichung für die Fouriertransformierte $E_1^*(s)$ des inneren elektrischen Feldes reduzieren. Sie ist vom Typ

$$f(s)E_1^*(s) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) E_1^*(t) \frac{dt}{t-s} = h(s), \quad (2)$$

mit den drei gegebenen Funktionen f , g , h .

Der Weg zur Lösung von (2) ist bekannt. Für ein beliebiges zweidimensionales induzierendes Feld erhält man die geschlossene Lösung in Integraldarstellung. Um dann die Feldkomponenten zu erhalten sind noch etwas umständliche numerische Integrationen durchzuführen.

Durch die Grenzbedingung (1) wird eine Länge festgelegt, die das elektromagnetische Verhalten einer homogenen Platte charakterisiert.

Offensichtlich hat

$$\alpha = \frac{2}{\nu_0 \cdot \omega \epsilon_0 d} = \frac{d^2}{\delta^2} \quad (\delta = \text{Eindringtiefe})$$

die Dimension einer Länge. Die charakteristische Länge α_2 der gutleitenden Halbplatte sollte für eine Bayströmung etwa in folgenden Grenzen liegen

	Min	Max
$\frac{2\pi}{v}$	1/2 Std.	1 Std.
$1/\sigma_2$	3 cm	10 cm
$1/d$	1/10 km	1/5 km
n_2	137 km	1824 km

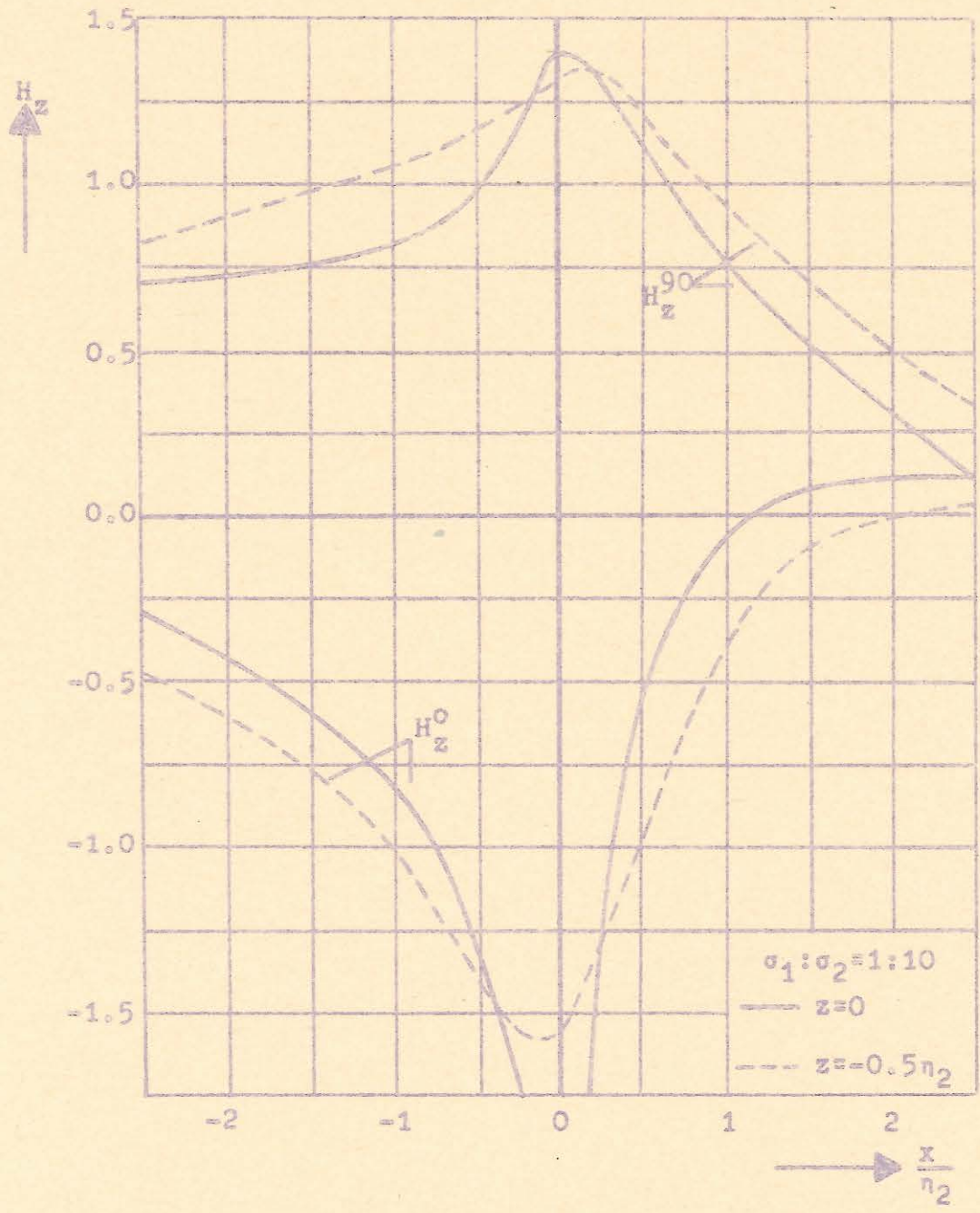
Eine Angleichung des berechneten Feldverlaufs an den beobachteten zeigt, daß in diesem Fall der kleinste Wert von n_2 noch um den Faktor 2 zu groß ist.

In allen folgenden Modellen wird ein Leitfähigkeitsverhältnis von $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 10$ vorausgesetzt. Dargestellt sind jeweils die 0° - und 90° -Phase. Wenn das induzierende Feld die Zeitabhängigkeit $\sin \omega t$ besitzt, dann gilt $H = H^0 \sin \omega t + H^{90} \cos \omega t$; H ist irgend eine Magnetfeldkomponente.

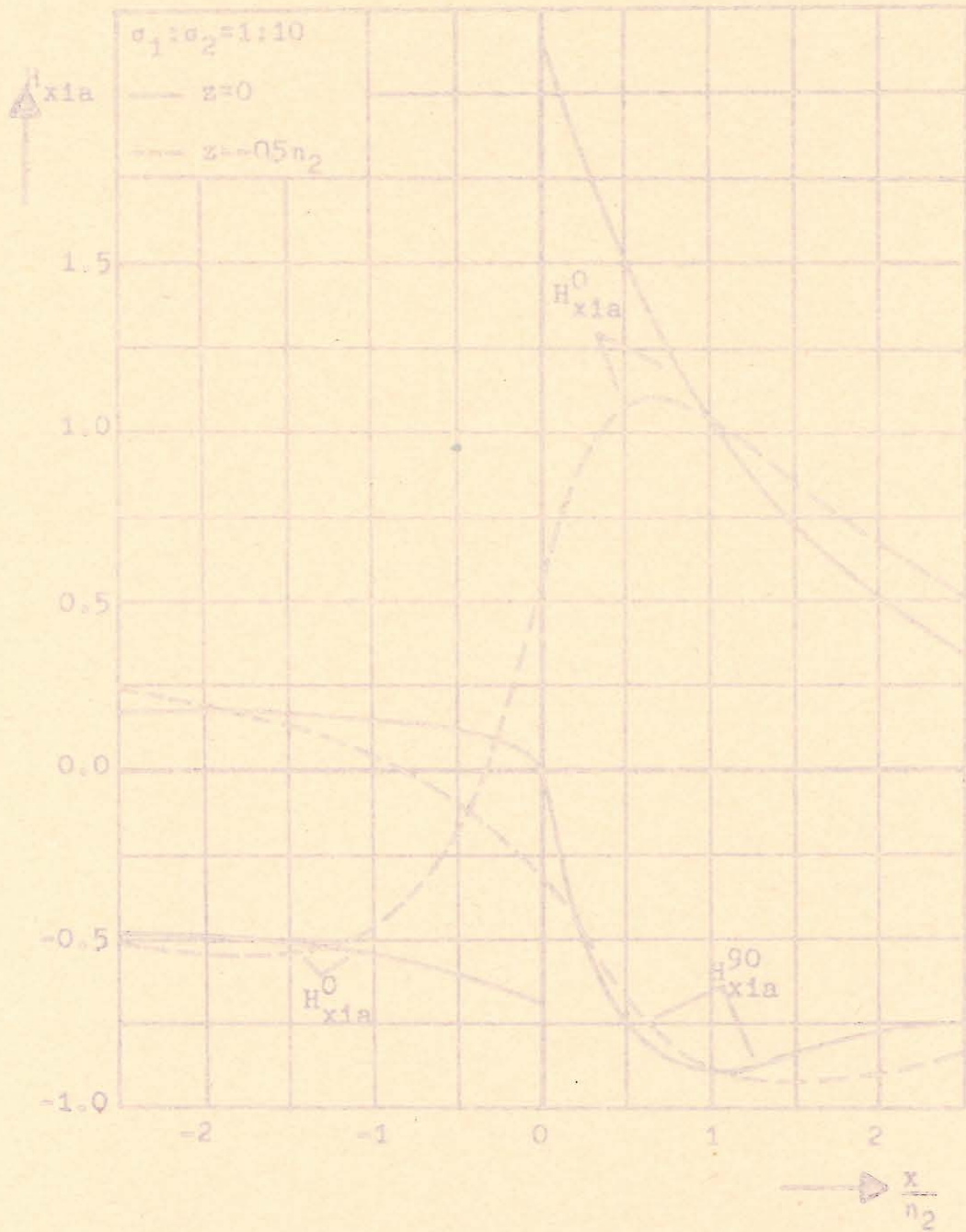
Zunächst bleibe der Einfluß der Conductosphäre unberücksichtigt, d.h. $a = \infty$. Es induziere ein homogenes Feld in $+x$ -Richtung. Dies homogene Feld ist die Bezugsgröße für alle Magnetfelder. Der Längenmaßstab ist n_2 .

Figur 2 zeigt den Verlauf von H_z auf 2 Profilen. Das Feld ist recht asymmetrisch zu $x = 0$. Direkt im Sprungpunkt wird H_z^0 logarithmisch unendlich, eine Folge der hier ungültigen Grenzbedingung. Der Nulldurchgang der 0° -Phase liegt etwa bei $x = n_2$. In Norddeutschland liegen zwischen dem H_z -Extremum bei Fallersleben und dem Nulldurchgang bei Ebsterf etwa 70 km. Bemerkenswert ist die große phasenverschobene Komponente.

In den Horizontalkomponenten beobachtet man auch in großer Entfernung vom Sprung ein inneres Feld, das gleich dem äußeren ist. Dies ist in jedem Punkt von dem inneren Feld abgezogen, die Differenz, das anomale innere Feld H_{x1a} ist aufgetragen worden (Figur 3). Das Gegenstück zur logarithmischen Singularität in H_z^0 ist ein Sprung in H_x^0 . Da die elektrische Feldstärke am Sprung stetig ist, verhalten sich die Flächenstromdichten, und damit auch die inneren Magnetfelder links und rechts des Sprunges zueinander wie die Leitfähigkeiten. Die Extrema von H_x^0 liegen direkt am Sprung, während



Figur 2



Figur 3

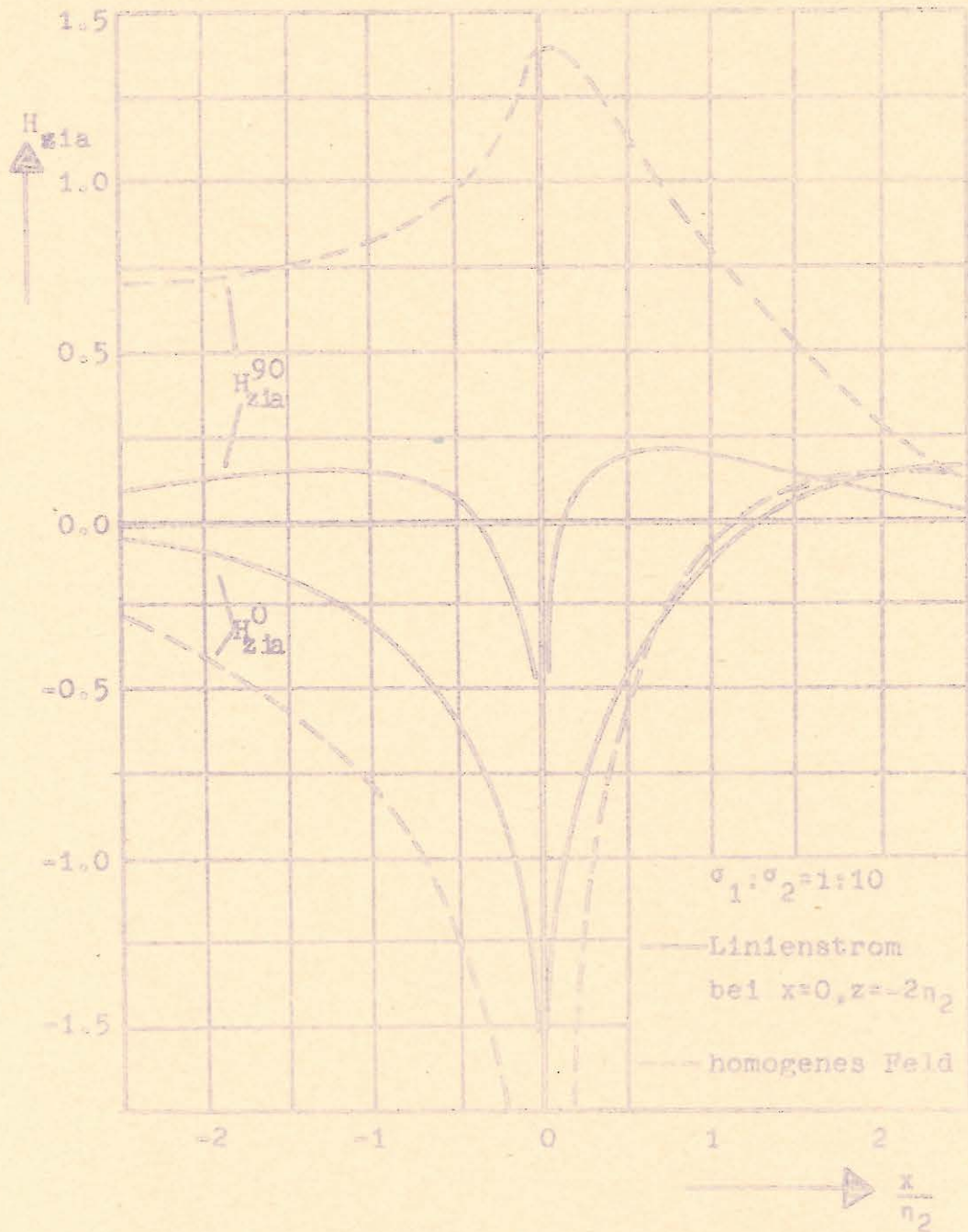
in der Norddeutschen Anomalie das nördliche Extremum etwa beim Nulldurchgang von H_z liegt.

Das homogene induzierende Feld werde nun durch einen Linienstrom direkt über dem Sprung in der Höhe $z = -2n_2$ ersetzt. Seine Horizontalkomponente im Sprungpunkt sei dem homogenen Feld gleich. Figur 4 zeigt das anomale innere H_z . Die 90° -Phase reagiert empfindlich auf diese Änderung. Sie wird nun auch singulär. Die 0° -Phase der schlecht leitenden Seite schrumpft zusammen, während sich die 0° -Phase auf der gut leitenden Seite als sehr stabil erweist. - Bei der Horizontalkomponente läßt sich ähnliches beobachten.

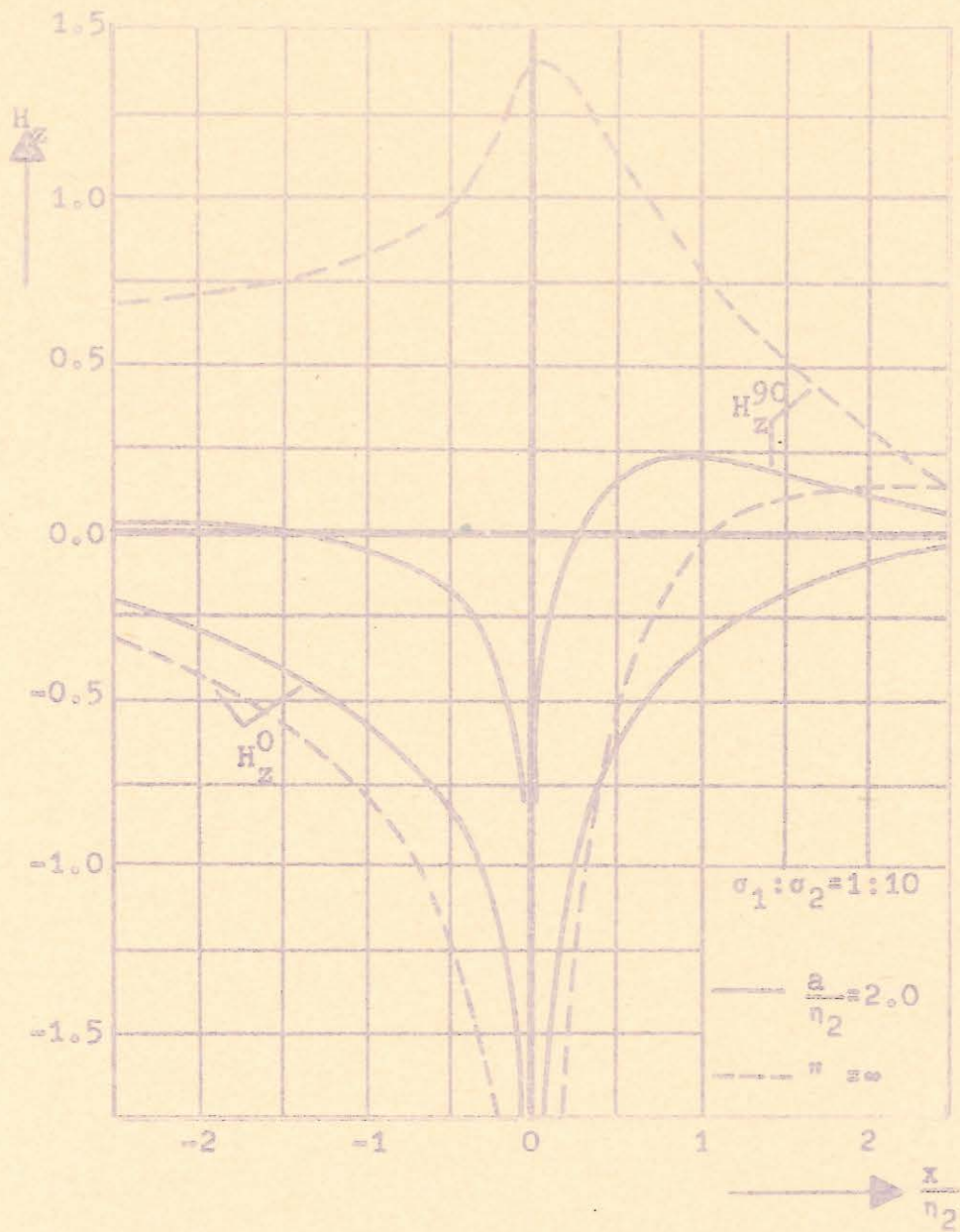
Jetzt werde die Conductosphäre mitberücksichtigt, das induzierende Feld sei wieder homogen. Die Wirkung der ideal leitenden Platte auf den Feldverlauf kann durch den Parameter $\frac{a}{n_2} = \frac{ad}{\delta_2^2}$ beschrieben werden. Die Conductosphäre hat, je nach dem ob $\frac{a}{n_2} \gg 1$ oder $\ll 1$, geringe oder große Bedeutung für den Feldverlauf. Ihr nivellierender Einfluß drückt sich aus in einer Symmetrisierung der anomalen Komponenten. Figur 5 enthält H_z für $a = 2n_2$. Die 0° -Phase wird in $x < 0$ zusammengedrückt, in $x > 0$ verbreitert. Gleichzeitig verkleinert sich die phasenverschobene Komponente erheblich. Der systematische Einfluß der Conductosphäre wird deutlich, wenn H_z nach Betrag und Phase aufgetragen wird, $H_z = |H_z| \sin(\omega t + \phi)$. (Figur 6). Mit dem Heranrücken der Conductosphäre wird der Verlauf des Betrages symmetrischer, seine Größe nimmt ab. Es ist eine starke Phasenverschiebung vorhanden. Extrema treten zuerst im Sprungpunkt ein. Von 2 gleichweit vom Sprung entfernten Punkten erreicht der Punkt in $x < 0$ sein Extremum vor dem Punkt mit $x > 0$. Die Phasenverschiebung kann über 100° betragen. Dies stimmt qualitativ mit der Beobachtung von Scheube an einem magnetischen Sturm überein. Bei Baystörungen ist die Phasenverschiebung nicht so ausgeprägt.

Figur 7 enthält Betrag und Phase von H_x . Wiederum ist eine Symmetrisierung und Reduktion des Betrages bemerkbar. Die Phasenverschiebung bleibt relativ klein. -

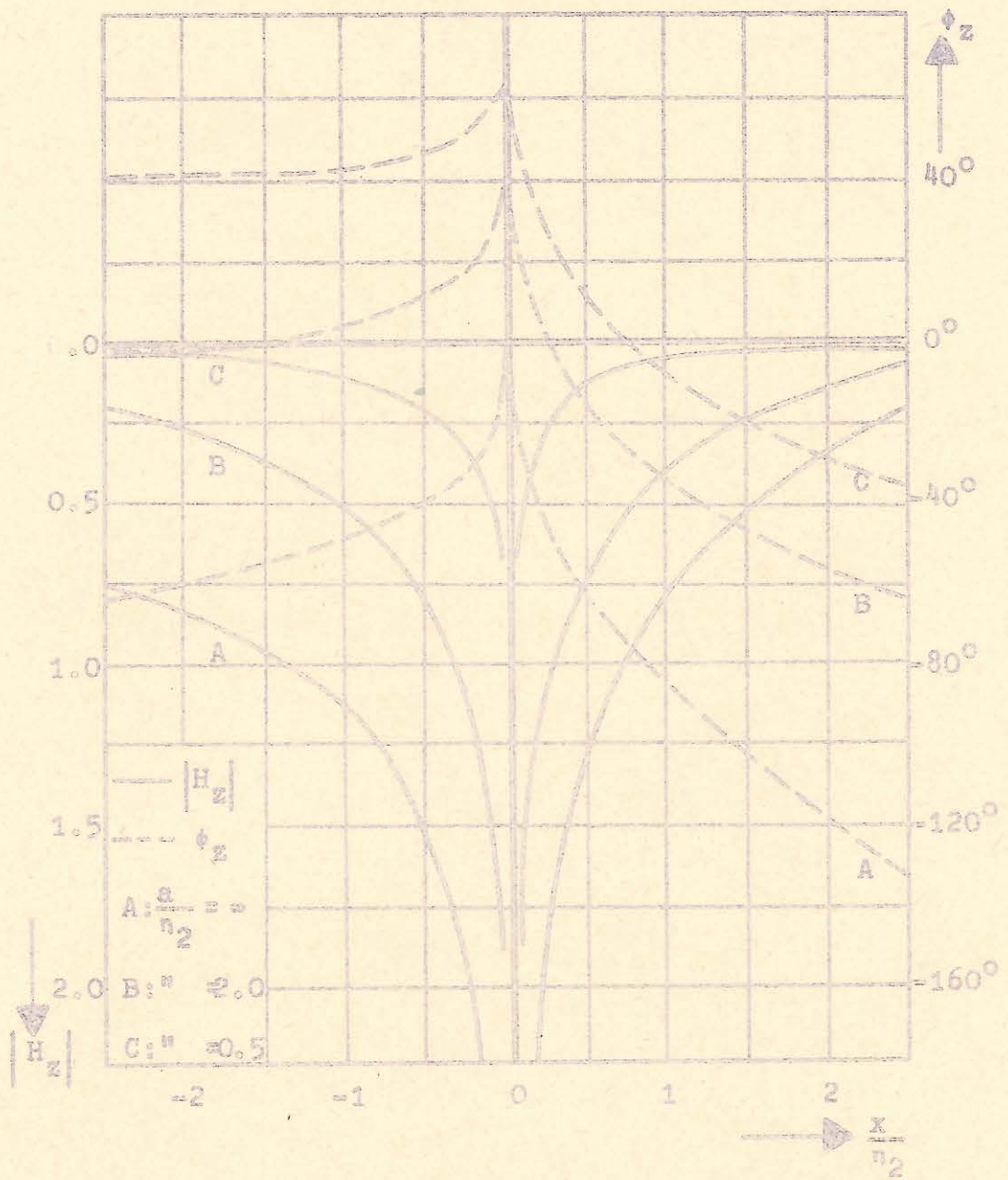
Wie erwähnt, bereitet die Induktionsrechnung für ausgedehnte Körper mit Leitfähigkeitssprung Schwierigkeiten. Dazu zählt auch die Induktion über 2 Viertelräume. Um ein ungefähres Bild vom Feldver-



Figur 4



Figur 5



Figur 6

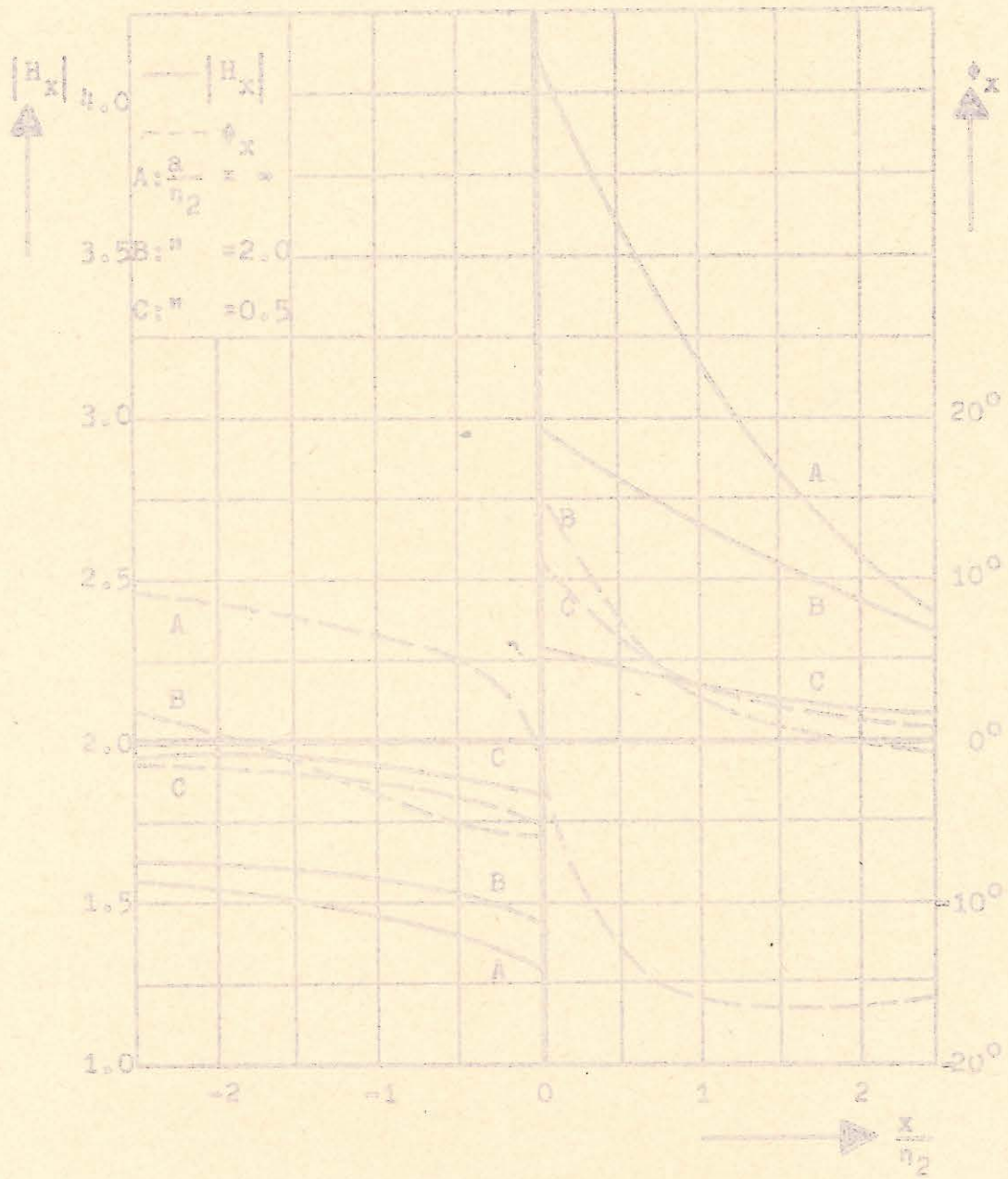


Figure 7

lauf zu bekommen, müssen Näherungsmethoden angewandt werden. So ist es zum Beispiel möglich, H_z zu berechnen, wenn H_x vorgeschrieben ist.

Fordert man etwa, daß die gesamte Horizontalkomponente über dem Profil konstant ist, so erhält man einen Verlauf von H_z , wie ihn Figur 8 wiedergibt. Die entsprechenden Formeln wurden bereits von Weaver (Can. J. Phys. 41 (1963), 484) angegeben. Magnetische Bezugsgröße ist das konstante Horizontalfeld, der Längenmaßstab ist die Eindringtiefe δ_2 . Wieder gilt $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 10$. Zum ersten Male ergibt sich hier eine endliche Vertikalkomponente im Sprungpunkt ($H_z(0,0) = -1/\pi \log \sigma_2/\sigma_1$). Diese Figur enthält auch den Verlauf von H_x , wenn die Viertelräume in z-Richtung nicht ins Unendliche ausgedehnt sind, sondern in der Ebene $z = -1.5 \delta_2$ durch eine leitende Platte abgeschlossen sind. Auch hier beobachtet man eine Symmetrisierung der 0° -Phase und ein rasches Abklingen der 90° -Phase. Unter dem Einfluß der leitenden Platte wird das Feld zusammengedrückt.

Die Voraussetzung $H_x = \text{const.}$ bedeutet die Annahme eines vom Leitfähigkeitssprung beeinflussten äußeren Feldes. Falls das anomale äußere Feld im Vergleich zum gesamten äußeren Feld klein ist, kann das so gewonnene H_z als erste Näherung für den Verlauf bei einem homogenen induzierenden Feld aufgefaßt werden. Deshalb ist H_x über H_z getrennt worden. Das Ergebnis zeigt Figur 9. -

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß durch die Vorstellung eines oberflächennahen Leitfähigkeitssprunges das anomale Feld der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie in groben Zügen gedeutet werden kann. Auch Einzelheiten, wie Nulldurchgang und Phasenverschiebung passen in dies Bild. Dagegen läßt sich der große Abstand der Extrema von H_x nicht durch einen Leitfähigkeitssprung interpretieren.

Unter dem Einfluß der Conductosphäre wird das anomale Feld der Diskontinuität symmetrischer, der Betrag des anomalen Feldes nimmt ab. Da die Norddeutsche Anomalie einen recht asymmetrischen Verlauf in H_z hat, kann der Einfluß der Conductosphäre nicht von großer Bedeutung sein, falls ihre Ursache in der Deckschicht zu suchen ist.

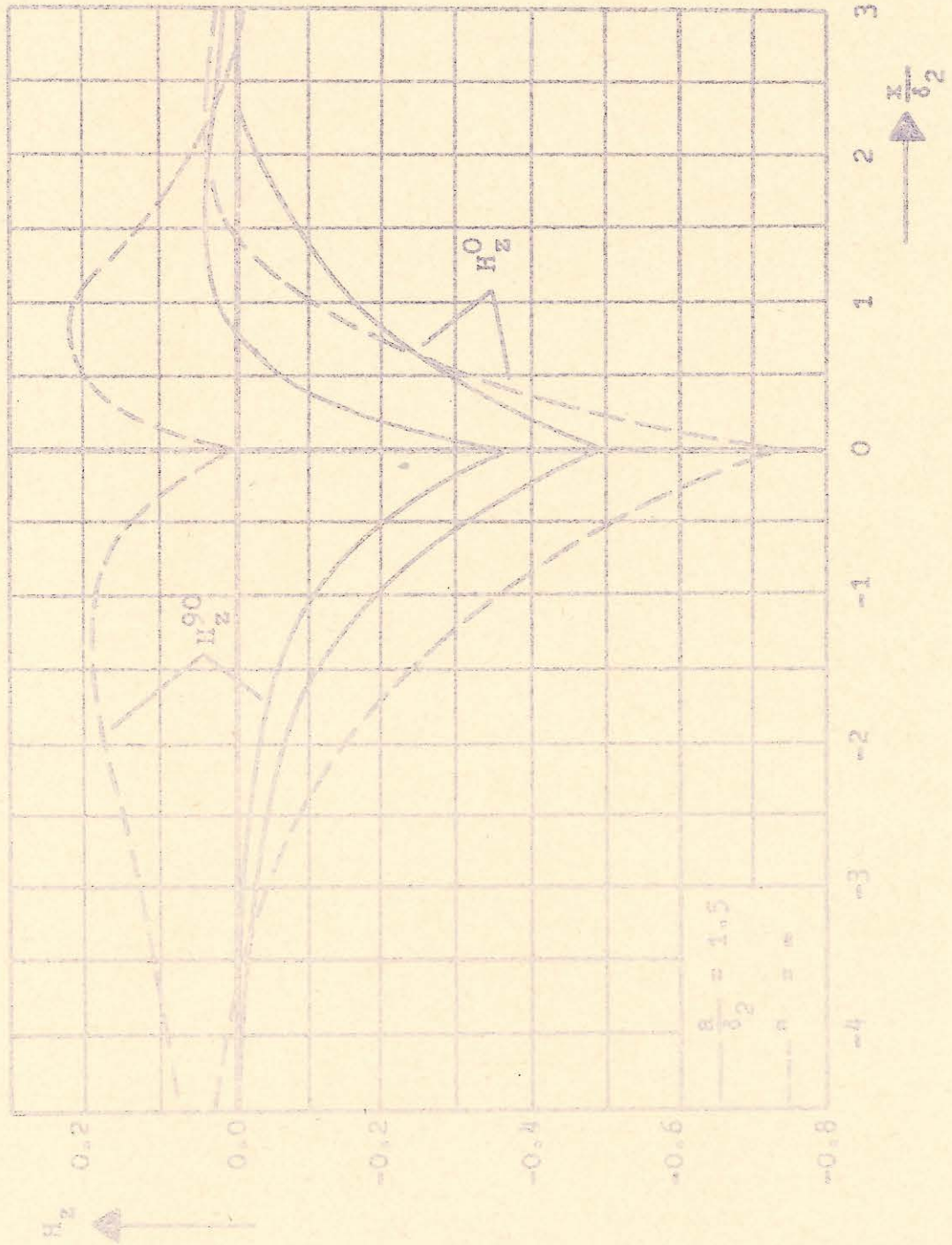


Figure 8

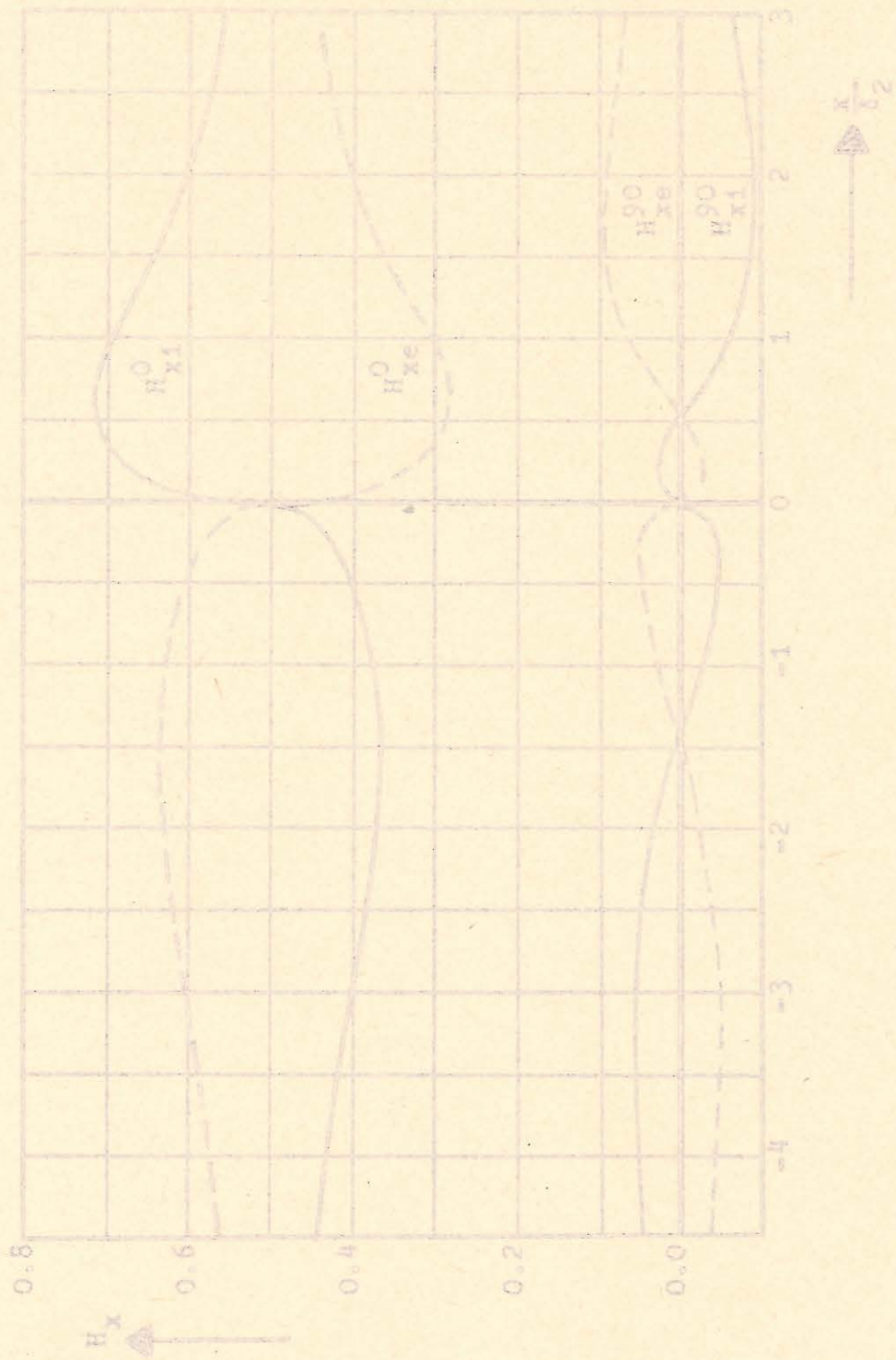


Figure 9