

Vortrag Dr. H. G. Scheube

---

"Komponentenverfahren; erste Anwendung auf die  
Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie"

Freitag, den 1.10.1965

Die folgenden Ausführungen schließen an den Vortrag "Komponentenverfahren" in Salzgitter-Lebenstedt (s. [1], p. 80) sowie an den Vortrag ähnlichen Titels auf der Tagung der D.G.G. in Freiburg im Herbst 64 an.

Es handelt sich um ein spezielles Auswertverfahren für die Erdmagnetische Tiefensondierung, deren Aufgabe bekanntlich darin besteht aus den natürlichen Variationen des erdmagnetischen Feldes die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit im Untergrund zu bestimmen. Kennzeichnendes Merkmal des Verfahrens ist, daß es sich vor allem zur Untersuchung horizontaler Leitfähigkeitsunterschiede, der sogenannten Leitfähigkeitsanomalien, eignet.

Das Verfahren unterliegt einschränkenden Voraussetzungen:

- a) Es muß einmal der zu untersuchende Effekt mit guter Näherung zweidimensional sein - d. h. die gemessenen Variationen dürfen sich in einer bestimmten Himmelsrichtung so gut wie nicht ändern. Man beobachtet dann gewöhnlich gleichzeitig an mehreren Stationen längs eines Profiles quer zu dieser Richtung und gibt der Profilrichtung die x-Koordinate, während man senkrecht nach unten die z-Koordinate positiv zählt.
- b) Zum ändern aber müssen die Variationen der H-Komponente überwiegend homogen sein - d. h. die vorliegende Leitfähigkeitsanomalie muß sich überwiegend in der Z-Komponente ausdrücken - was auch oft der Fall ist. Dann hat man

$$H(t) \quad \text{und} \quad Z(x,t) \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Das Verfahren selbst zerfällt in zwei Schritte:

- 1) die Auswertung der Registrierungen;
- 2) die Modellrechnung.

Es handelt sich damit nicht um ein Verfahren zur direkten

Berechnung der Leitfähigkeit, sondern es ein indirektes Verfahren  
wobei zu n-die Nachteilhaftigkeit besteht.

Die Theorie der Übertragungsfunktion ist ein Spezialfall der  
allgemeineren Theorie der Übertragungsfunktion, die hier dargestellt

ist. Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

Die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  ist durch die Gleichung

beschrieben, wobei  $U(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems  
und  $I(\omega)$  die Stromfunktion ist.

das nur bestimmte Einzelperioden herauszieht. (Über die Bedeutung des Index  $\frac{1}{2}$  s. weiter unten)  $D_{\frac{1}{2}}^+(w)$  schreibt sich demnach als Summe von Deltafunktionen:

$$5) \quad D_{\frac{1}{2}}^+(w) = \sum_{m=-(l-1)}^{m=+(l-1)} \delta(w-m\Delta w) + \frac{1}{2} \delta(w-l\Delta w), \quad m \neq 0,$$

während sich im Zeitbereich folgender Zusammenhang zwischen den drei Größen ergibt:

$$6) \quad \hat{g}_{\frac{1}{2}}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t') D_{\frac{1}{2}}(t-t') dt'$$

Der Index  $\frac{1}{2}$  soll auf den aus Gleichung 5) hervorgehenden Aufbau des Fensters hindeuten. Die Halbierung des äußersten Fensters unterdrückt die unerwünschten Nebenmaxima der Funktion  $\hat{g}_{\frac{1}{2}}(x, t)$ .

Explizit ausgeschrieben bedeutet Gl. 4):

$$7) \quad \hat{g}_{\frac{1}{2}}(x, t) = 4\pi \sum_{m=1}^{l-1} |g^+(x, m\Delta f)| \cos(2\pi m\Delta f t + \varphi_g(x, m\Delta f)) + 2\pi |g^+(x, l\Delta f)| \cos(2\pi l\Delta f t + \varphi_g(x, l\Delta f)) \quad m \neq 0,$$

und Gl. 6):

$$8) \quad \hat{g}_{\frac{1}{2}}(t) = \sum_{m=0}^n g(m\Delta t) D_{\frac{1}{2}}(t-m\Delta t)\Delta t \rightarrow g(m\Delta t).$$

Andererseits beruht die Modellrechnung auf der aus der Theorie folgenden Bedeutung von  $g$ . Diese Funktion ist nämlich bestimmt durch:

$$9) \quad g(x, t) = \frac{1}{4\pi\sigma(x, 0)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x, x') dx'$$

mit folgenden drei Bedingungen für  $G_2$ :

$$10) 1) \quad \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(x, z) \frac{\partial G_2}{\partial t}$$

$$2) \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0$$

$$3) \quad G_2 = \text{raumzeitlicher Einheitspol.}$$

Auf Einzelheiten wird später noch eingegangen.

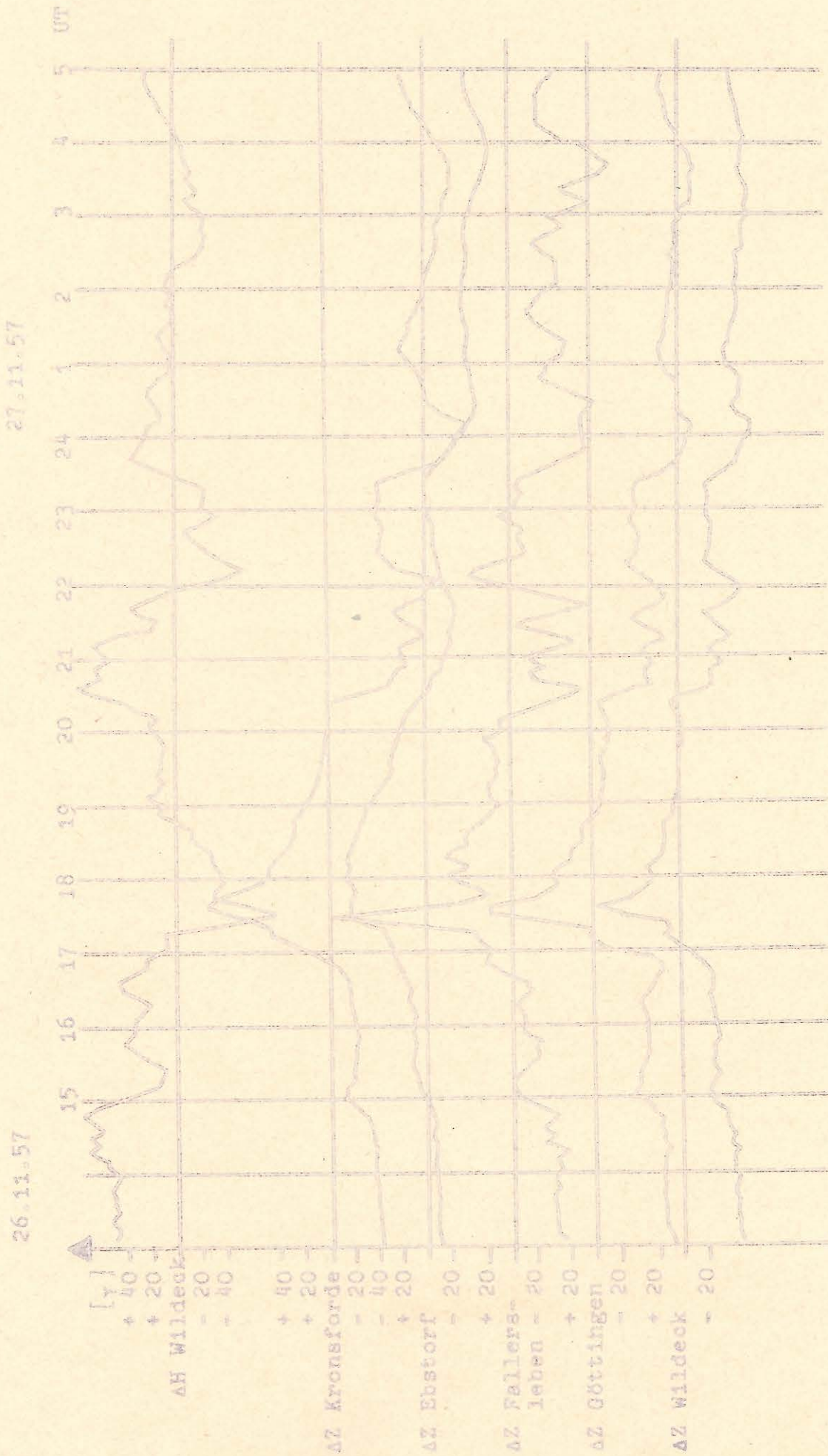
Nach dieser Zusammenfassung der Ergebnisse der theoretischen Entwicklung sei im folgenden die erste Anwendung des Verfahrens auf die Norddeutsche Leitfähigkeitsanomalie beschrieben: Der Auswertung lag der leichte magnetische Sturm vom 26.11.1957 zugrunde, den Schmucker an 6 Stationen längs eines Profiles von Würzburg bis zur Ostsee registrierte (veröffentlicht in [2]). Fig. 1 zeigt, was hiervon nach der Entnahme von äquidistanten Werten ( $\Delta t = 6$  min) übrigblieb. Der Sturm besitzt zwei voneinander durch relative Ruhe getrennte Phasen, deren erste durch den starken Ausschlag um 17 Uhr gekennzeichnet ist. Deutlich sichtbar ist eine Phasenverschiebung des Maximums an den einzelnen Stationen. Die größten Amplituden der Z-Variationen wurden in Fallersleben registriert.

Auf dieses Ausgangsmaterial wurde ein numerischer Filter angewandt, auf dessen Theorie hier nicht eingegangen werden soll. Die Ergebnisse der Filterung, z. B. für die Z-Komponente von Fallersleben und die H-Komponente von Wildeck, sind bereits im Protokoll [1] des Salzgitter-Symposiums enthalten. Aus den Kurven dieser Art für alle Stationen wurden die für die Synthese der Meßfunktionen  $g(t)$  benötigten Werte der Amplituden  $H(t)$  und  $Z(t)$ , des Verhältnisses beider zueinander, sowie der Phasenverschiebungen ermittelt. Die Ergebnisse zeigen die Fig. 2 bis 5 für die Station Fallersleben, und zwar wurden die beiden Teilintervalle - von 16-19 Uhr bzw. von 20-24 Uhr - getrennt voneinander ausgewertet.

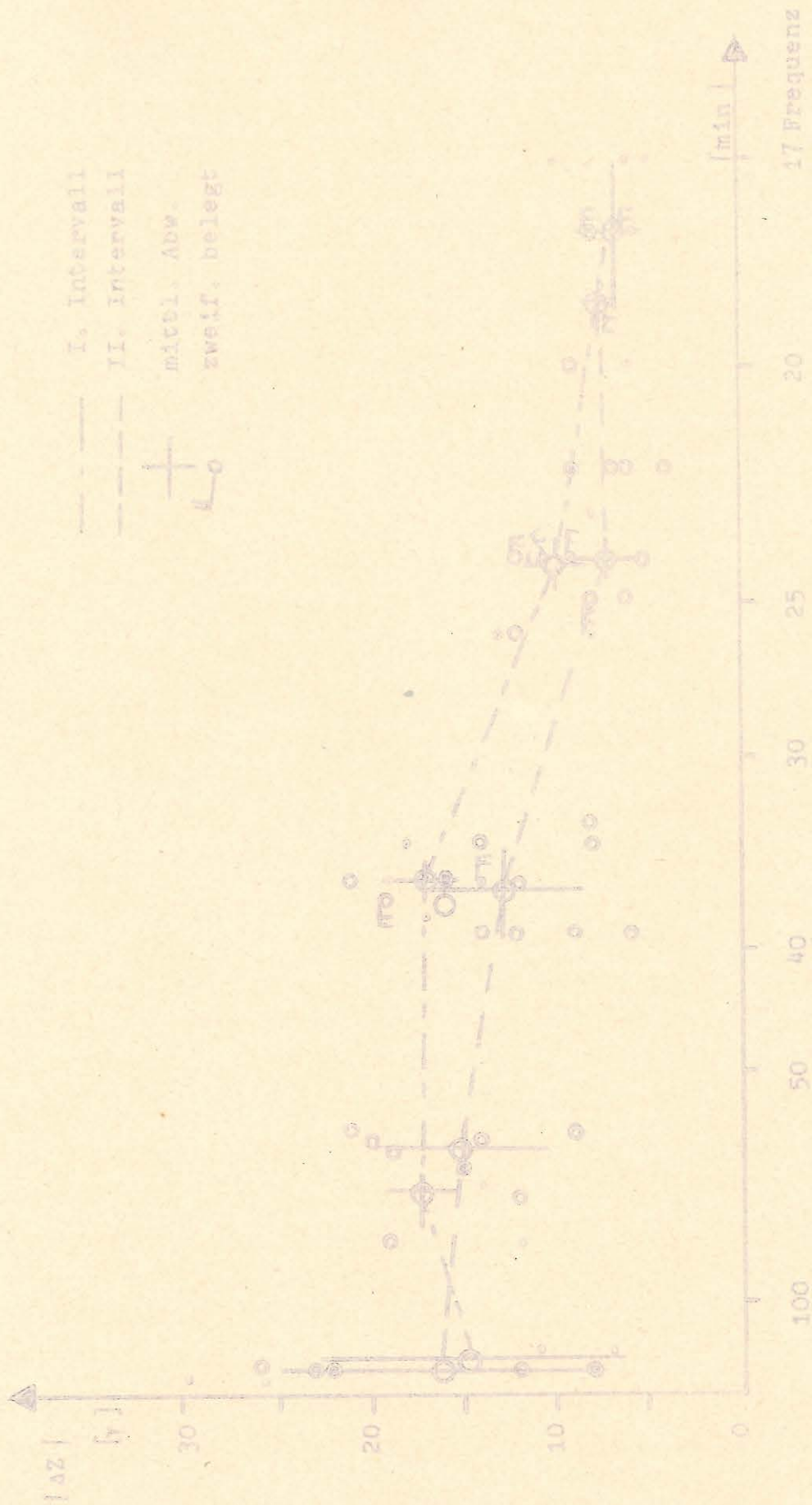
Die so gefundenen Werte bildeten die Grundlage der Synthese der Funktionen  $\tilde{g}_1(t)$  (s. Fig. 6). Fig. 7 zeigt den Grad der Anpassung an dieses Ergebnis der Synthese bei der Bestimmung der wahren Meßfunktionen  $g(t)$  aufgrund der Gl. 8). Ausgehend vom Mechanismus des Faltungsvorganges wurde der ungefähre Verlauf der Kurven  $g(t)$  erschlossen und durch nachträgliche Faltung verifiziert. Die Fig. 8 zeigt die endgültigen Meßfunktionen  $g(t)$ .

#### Deutung der ermittelten Funktionen $g(t)$ .

Die Deutung der Funktionen  $g(t)$  - d. h. die Modellrechnung - fußt auf der Lösung der Gl. 10)1). Sie ist bei ortvariabler Leitfähigkeit in analytischer Form nicht mehr durchführbar. Es bot sich aber die Möglichkeit, der Modellrechnung eine zugehörige Differenzgleichung zugrunde zu legen.



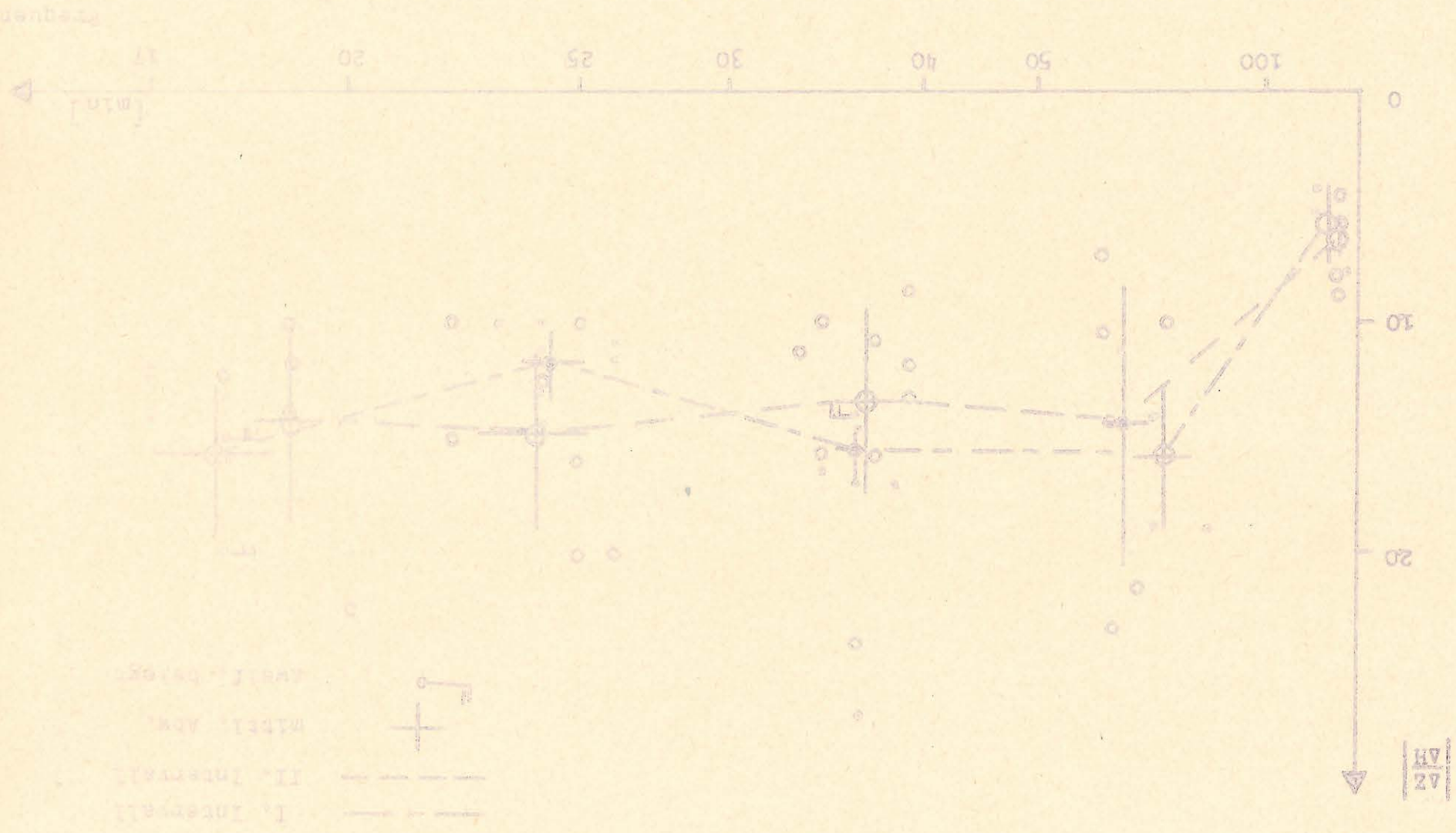
Figur 1: Sturm vom 26. Nov. 1957,  $\Delta t = 6 \text{ min.}$

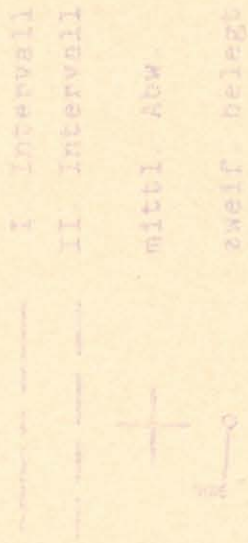


Figur 2: Amplituden als Funktion der Frequenz für die Station Fallersleben.

tion der Frequenz.

Figur 3: Verhältnis der Amplituden von  $\Delta Z$  (Paliersleben) zu denen von  $\Delta H$  (Waldsee) als Funktion der Frequenz.

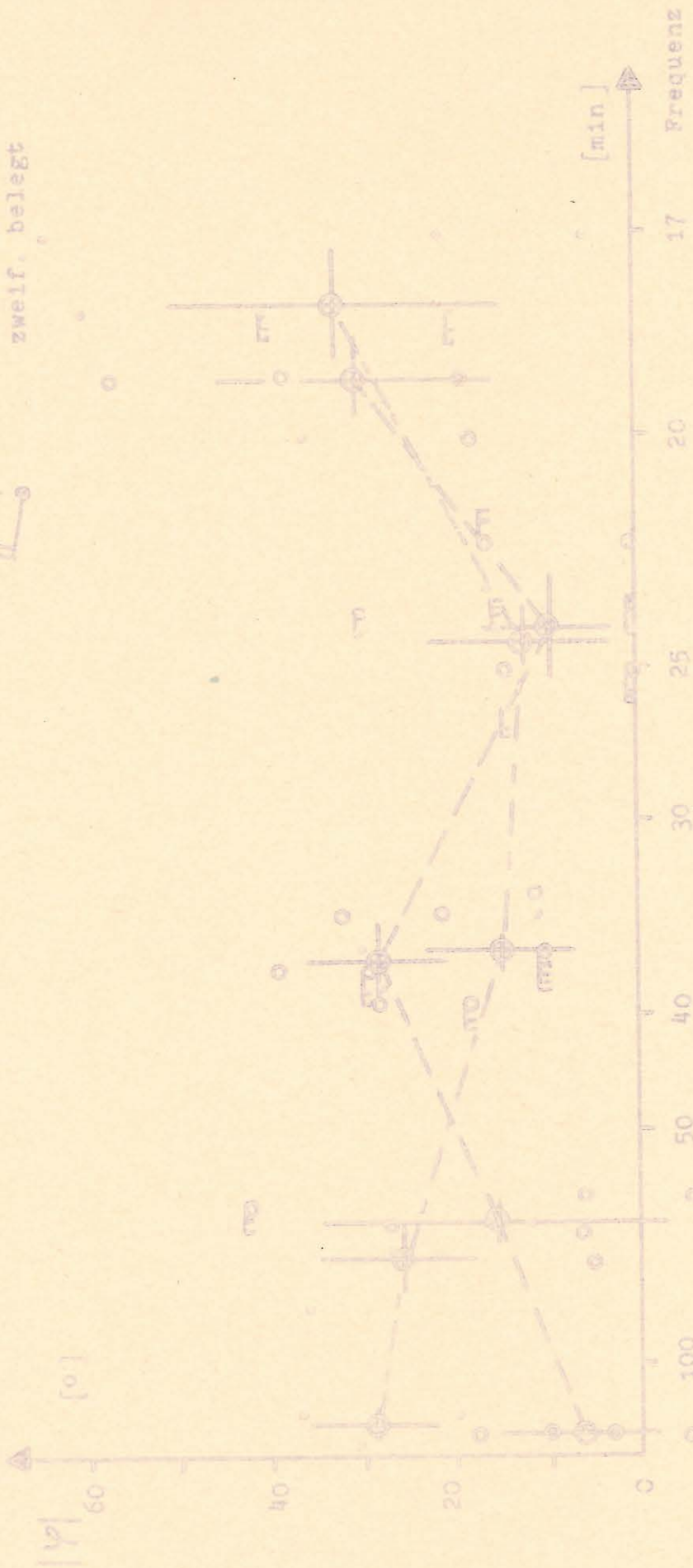




Figur 4: Absolute Phasenverschiebung der Teilwellen bezogen auf  $\Delta H$  (Wilderk) als Funktion der Frequenz.



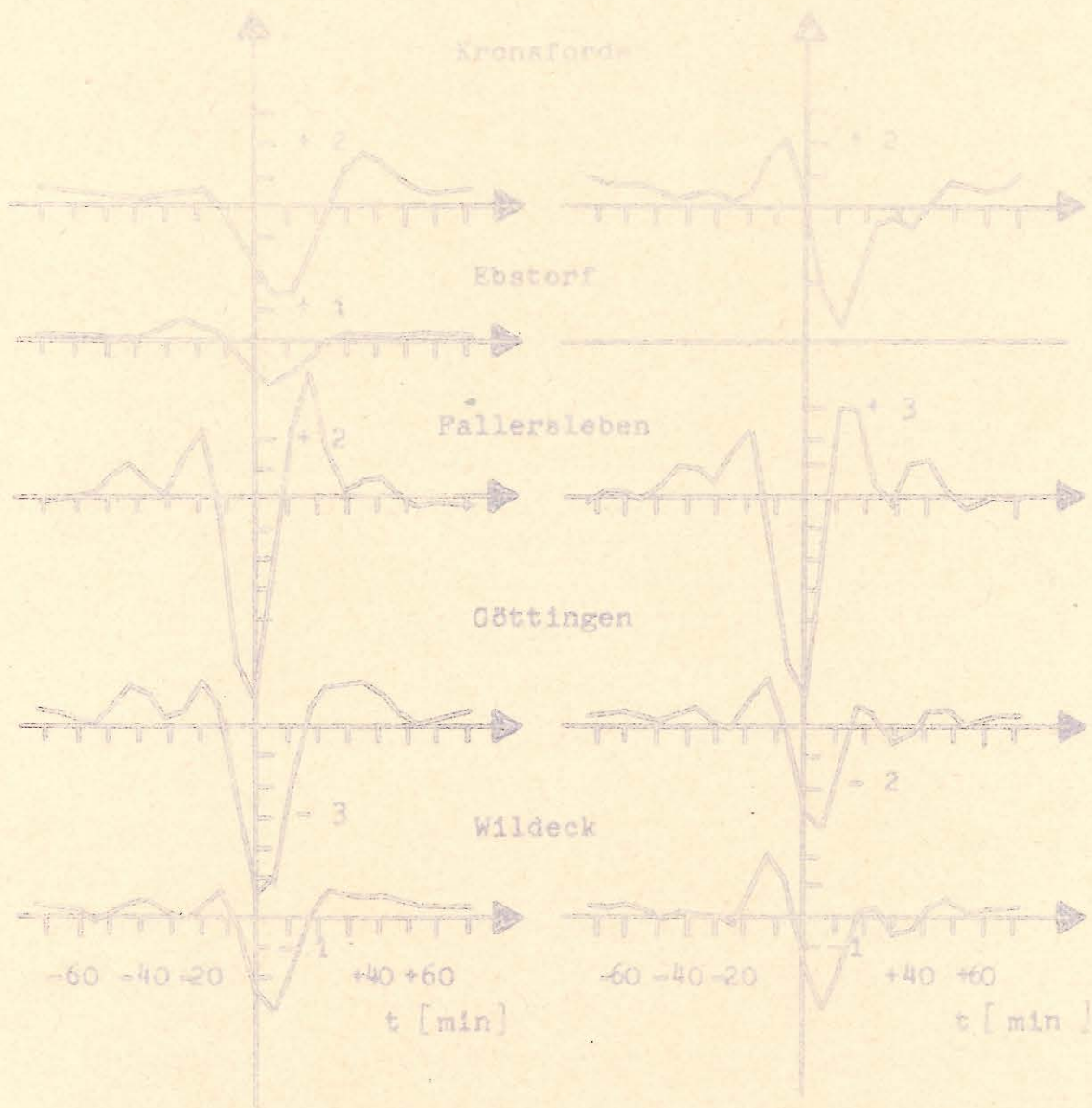
I. Intervall  
II. Intervall  
mittl. Abw.  
zweif. belegt



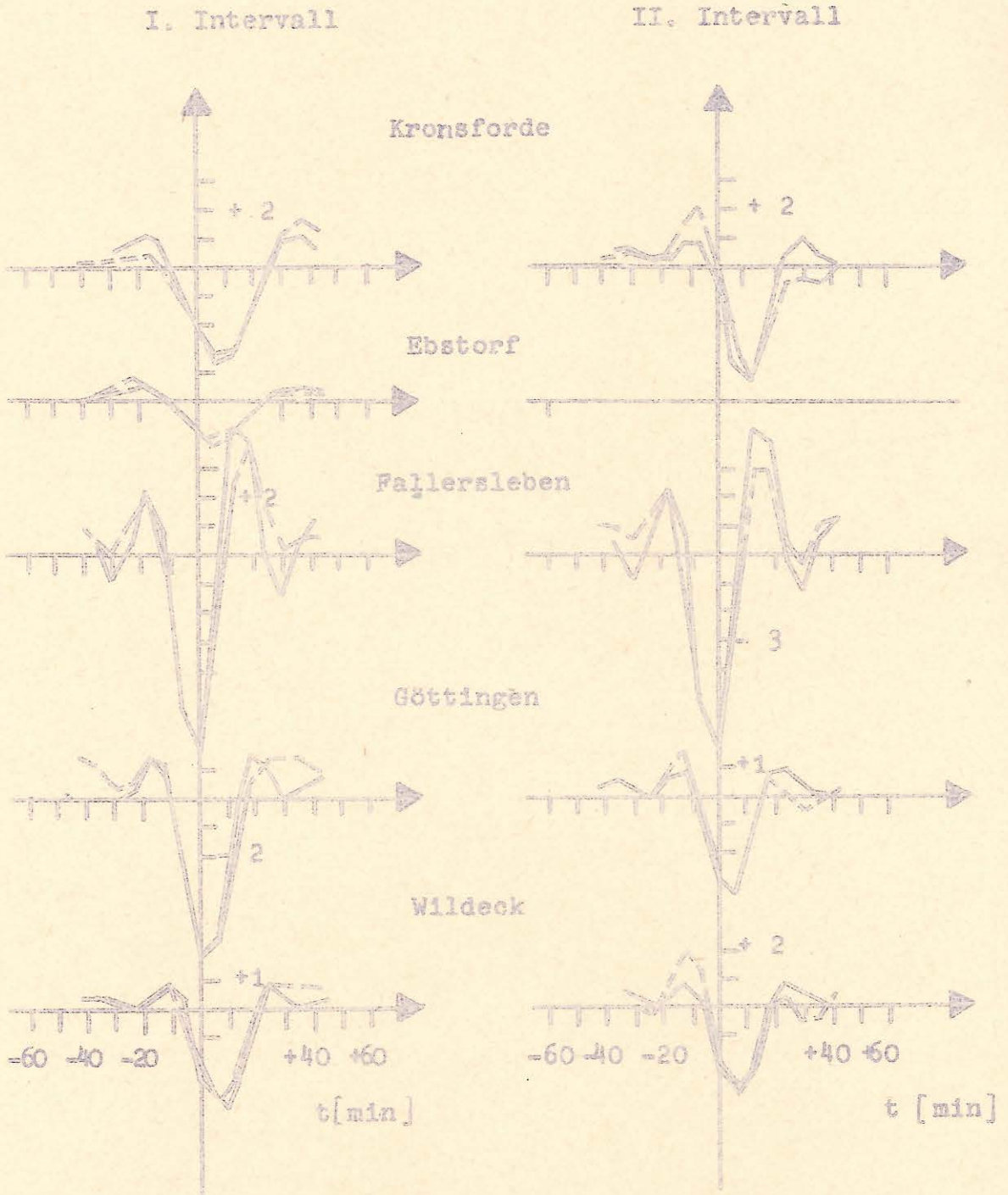
Figur 5: Relative Phasenverschiebung der Teilwellen bezogen auf  $\Delta H$  (Wildeck) als Funktion der Frequenz.

I. Intervall

II. Intervall



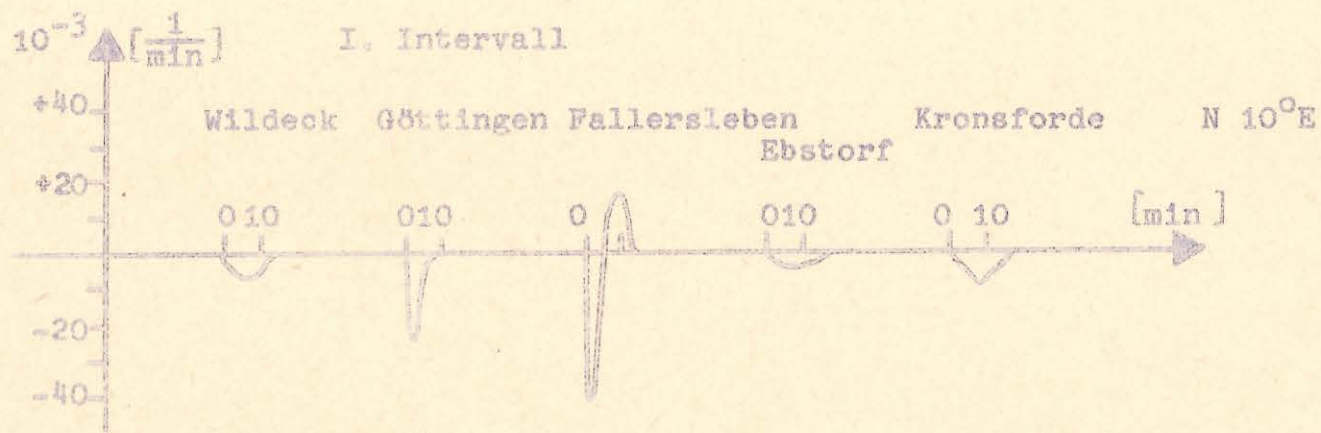
Figur 6: Empirische Kurven  $g_1(t)$ .



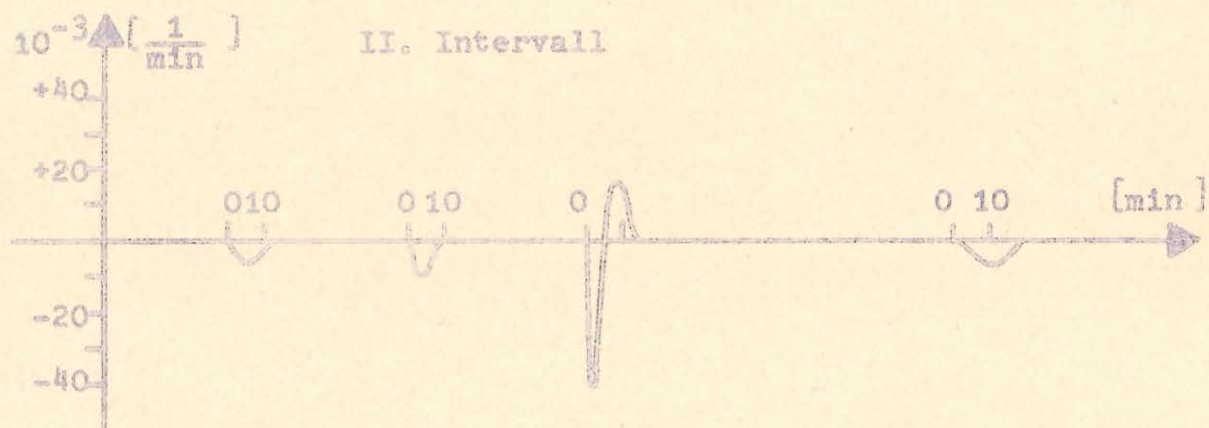
--- Empirische Kurven  $\hat{g}_1(t)$

— Approximationskurven  $\bar{g}(t)$  nach  $\bar{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t') D_{\frac{1}{2}}(t-t') dt'$

Figur 7



58km 100km 61km 81,5km



Figur 8: Meßfunktionen  $g(t)$ , alle Stationen sind auf eine Profillinie projiziert

Für eine erste Überblicksrechnung zeigte sich jedoch auch eine Differenzengleichung in zwei Raumdimensionen noch als zu kompliziert, wenn man von programmierten Rechenhilfsmitteln zunächst absieht. Daher wurde eine vorläufige Auswertung durch eine noch weitergehende Vereinfachung versucht, indem die Abhängigkeit der Funktion  $G_2$  in Gl. 10)1) von der horizontalen Koordinate außer acht gelassen wurde. An die Stelle der Gl. 10)1) tritt damit

$$11) \quad \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2} = 4\pi\sigma(z) \frac{\partial G_2}{\partial t}.$$

Da das Verhalten des Einheitspoles selbst - anstelle der Funktion  $G_2$  - interessiert, diese aber wegen der Bedingung 10)2) aus zwei Einheitspolen gleichen Vorzeichens aufgebaut ist, gilt  $G_2 = 2V$ .

In Gl. 11) sind die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zu ersetzen, hier zweckmäßigerweise durch den aufsteigenden. Aus den kontinuierlichen Funktionen werden einzelne Zahlenwerte, die bestimmten Gitterpunkten der Halbgeraden  $z \geq 0$  zugeordnet sind. Es geht

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} & \text{ über in } \frac{1}{h} (V_{n+1,1} - V_{n,1}) \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \text{ in } \frac{1}{h} (V_{n+1,1} + V_{n-1,1} - 2V_{n,1}), \end{aligned}$$

so daß aus 11)

$$12) \quad \frac{1}{h} (V_{n+1,1} + V_{n-1,1} - 2V_{n,1}) = \frac{4\pi}{\epsilon_h l} (V_{n,l+1} - V_{n,l})$$

wird. Aufgelöst nach  $V_{n,l+1}$  ergibt:

$$13) \quad V_{n,l+1} = \frac{\epsilon_h l}{4\pi h^2} (V_{n+1,1} + V_{n-1,1} - 2V_{n,1}) + V_{n,l}.$$

Der allein stehende Wert rechts erweist sich als untragbare Fehlerquelle für die numerische Rechnung, da durch ihn unvermeidliche Rechenfehler in voller Höhe in den jeweils nächsten Rechenschritt mit hindübergerommen werden, bis schließlich der Fehleranteil des Zahlenwertes den wahren Zahlenwert völlig überdeckt. Hieraus hilft die Bedingung

$$\frac{\epsilon_h l}{4\pi h^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Mittelwertbedingung}).$$

Damit wird

$$14) \quad v_{h,1+1} = \frac{1}{2} (v_{h+1,1} + v_{h-1,1}).$$

Dies ist die sog. Schmidt-Binder-Gleichung, die in der numerischen Lösung von Wärmeleitungsaufgaben seit langem benutzt wird.

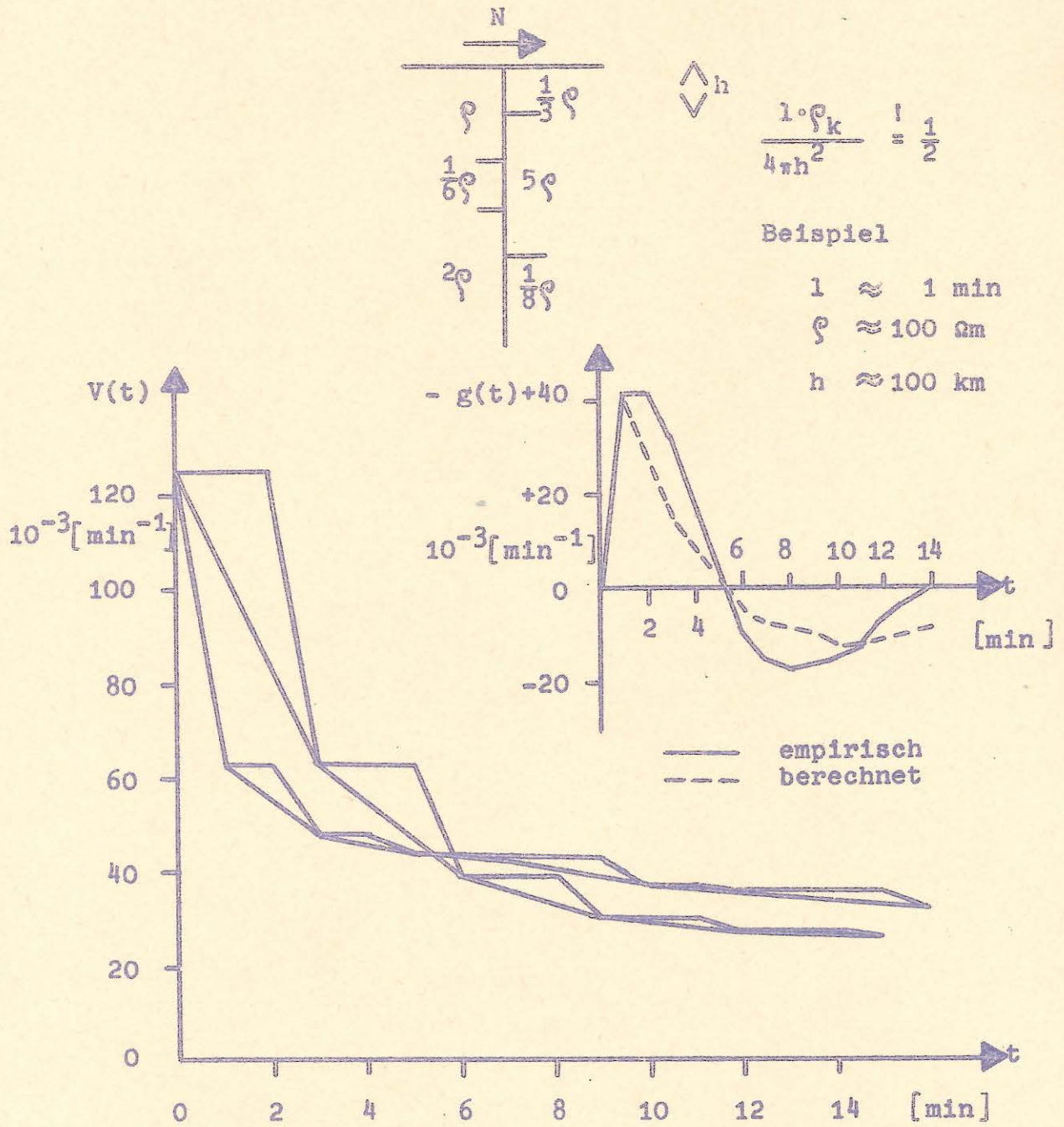
Von Gl. 9), die ja Grundlage der Modellrechnung ist, bleibt im Rahmen der geschilderten Vereinfachungen nur noch die Differenzbildung aus zwei unabhängig voneinander berechneten Abklingkurven übrig, d. h. es bleibt:

$$15) \quad g_{0,1} = \frac{q_0}{2\pi} \Delta v_{0,1}.$$

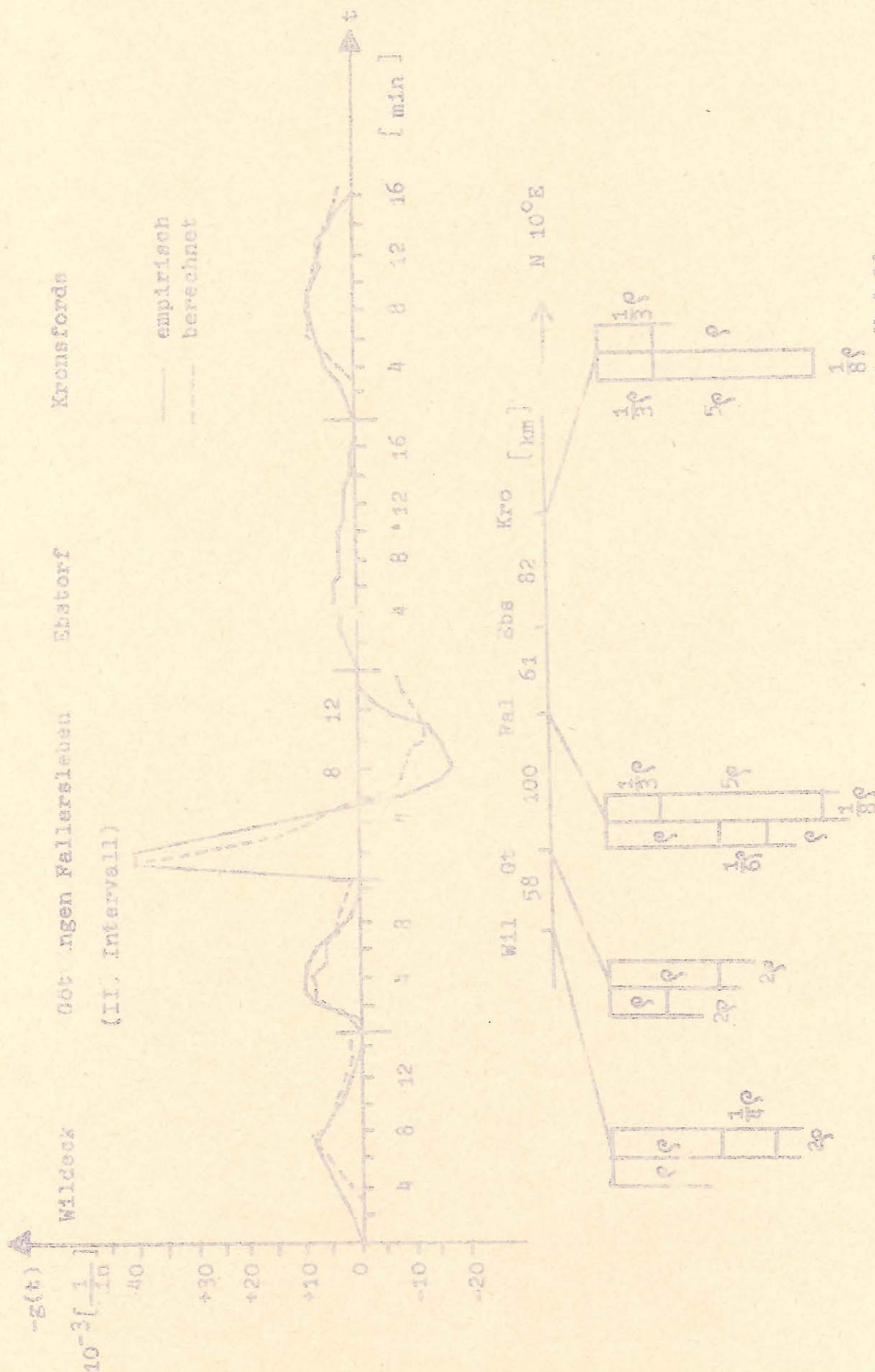
Fig. 9 zeigt das Beispiel für die Station Fallersleben: Aus den beiden Vertikalprofilen für den Widerstand folgen die beiden Abklingkurven, die im unteren Diagramm dargestellt sind. Die Differenz aus beiden Kurven führt zur theoretischen Meßfunktion  $g(t)$  (gestrichelt im mittleren Diagramm). Sie muß sich der empirischen Funktion  $g(t)$  (ausgezogen im mittleren Diagramm) optimal anpassen.

Fig. 10 enthält für vier der fünf Stationen - Station Ebstorf blieb unberücksichtigt, da die Meßfunktion nicht klar erfassbar war - die Modellprofile mit den sich daraus ergebenden theoretischen Meßfunktionen in ihrer Anpassung an die empirischen (Göttingen: 2. Interv.). Daraus läßt sich das Gesamtmodell der Fig. 11 zusammensetzen, aus dem das Modell der Fig. 12 als stark schematisiertes Modell abgeleitet wurde. Es fußt im wesentlichen auf dem Ergebnis der Station Fallersleben. Der Vorzeichenwechsel in der Meßfunktion dieser Station bedingt die von Süd nach Nord absteigende "Stufe" sowie den Abbruch der "Platte" an der Oberfläche.

Nach der Mittelwertsbedingung sowie der Beträge der empirischen Funktionen  $g(t)$  ergab sich ein Grundwertetripel für  $l$ ,  $h$  und  $q$  zu 1 min., 100 km bzw. 100  $\Omega$ m. Die Anpassung an die Oberflächenwerte im nördl. Teil des Profils erfolgten nachträglich innerhalb des obersten Gitterschritts, so daß insgesamt der Widerstand  $1/3 q$  vorherrscht. Nachträglich wurden alle Größen der Mittelwertsbedingung noch einmal um den Faktor  $3/5$  gekürzt, um den Oberflächenwiderstand noch weiter an die Meßergebnisse anzupassen.

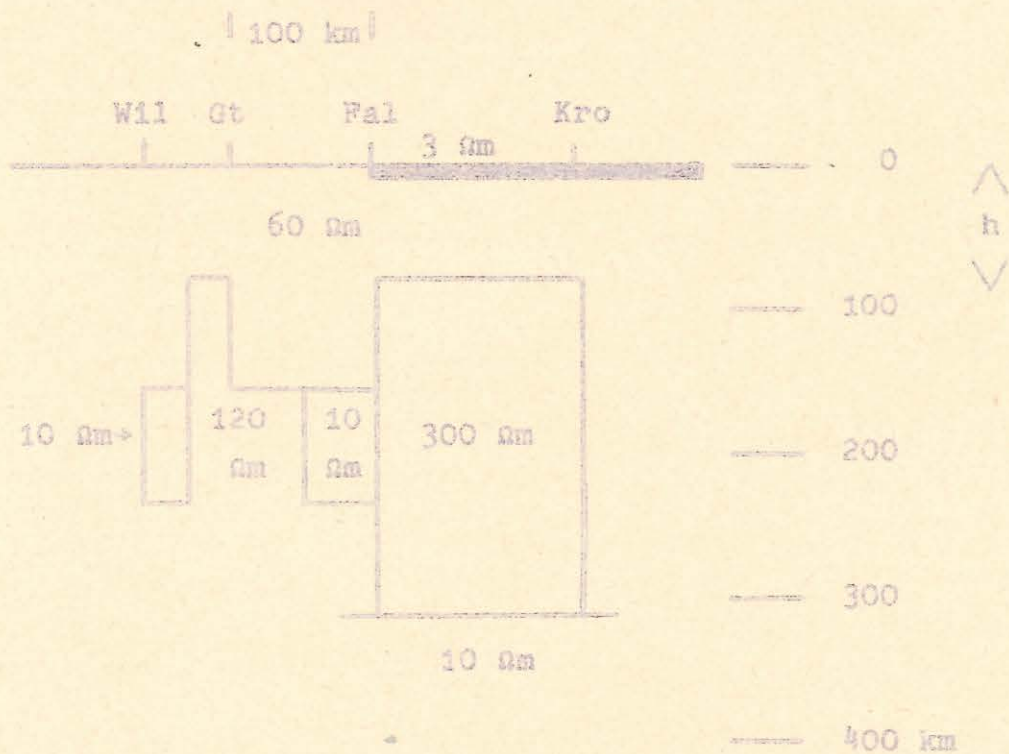


Figur 9: Modelle, Abklingkurven und Meßfunktion für Fallersleben.

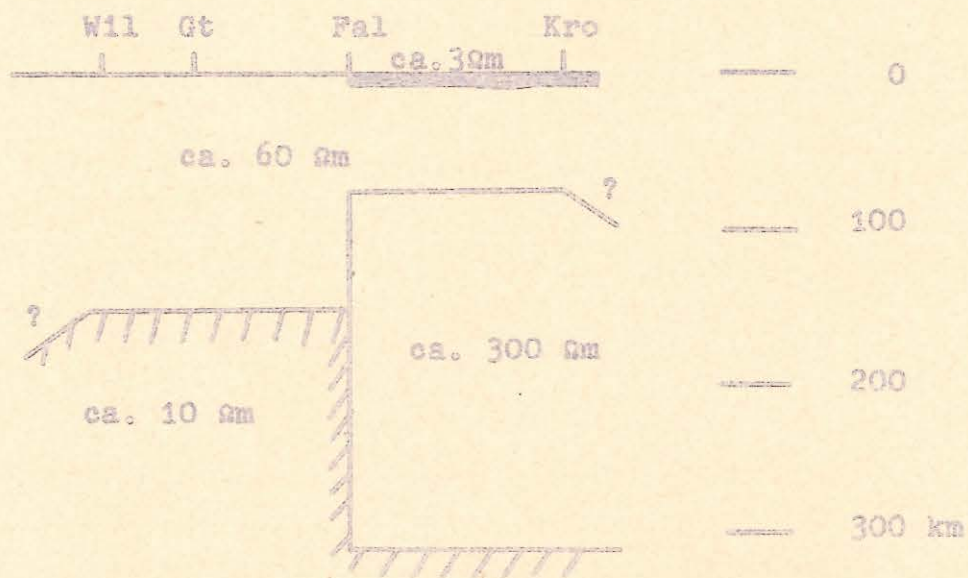


Figur 10: Meßfunktionen, Approximationskurven und zugrundegelegte Modelle.





Figur 11: Zusammenstellung der Einzelmodelle (für Göttingen: II. Intervall).



Figur 12: Stark schematisiertes Modell der Norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie im Bereich des Ostprofils von Schmucker.

Die wesentliche Aussage liegt in einer Widerstandsabnahme von Süd nach Nord an der Erdoberfläche bei einer Widerstandszunahme in gleicher Richtung in größeren Tiefen etwa im gleichen Bereich des Profils.

Literatur

- [1] Protokoll Symposium "Erdmagnetische Tiefensondierung". Salzgitter-Lebenstedt, Oktober 1963.
- [2] Schmacker, U.: "Erdmagnetische Tiefensondierung in Deutschland 1957/59, Magnetogramme und erste Auswertung". Abhandl. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., Beitr. 1. G. J., Heft 5, (1959).